

矩阵 LU 分解对数字图像细微差别的放大作用

张广军, 陈兴林

(哈尔滨工业大学 航天学院, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘 要:通过对数字图像的矩阵进行 LU 分解,研究了 LU 分解后的矩阵与原图像的关系,并对一幅图像施加不同程度的盐椒噪声,进行 LU 分解,得出了运用矩阵的 LU 分解来判断图像细微差别的方法。

关键词:数字图像; 矩阵; LU 分解; 盐椒噪声; 细微差别

中图分类号: TP319 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-2683(2009)01-0016-03

Amplification of Small Difference to Digital Image Based on Matrix LU Decomposition

ZHANG Guang-jun, CHEN Xing-lin

(Astronautics College, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: Through the matrix LU decomposition to digital image, this paper researched the connection between the image and the matrix LU decomposition. Through adding different salt & pepper noises to an image and successive LU decomposition, this paper presented an approach for judgement of small difference based on matrix LU decomposition.

Key words: digital image; matrix; LU decomposition; salt and pepper noise; small difference

1 引言

数字图像是以矩阵形式表示出来的,因此可以通过研究矩阵,对矩阵进行操作来实现对数字图像的处理。在获取图像过程中,由于要经过摄像、扫描等操作环节,会受到仪器及周围环境等外界因素的影响,使所获取的数字图像的位置和形状发生变化,导致图像失真或者是图像上含有各种各样的噪声,当图像含有较重的噪声时,可以得到,但是当噪声很轻时,无法用眼睛看到。本文就是利用矩阵的 LU 分解,给出了一种判断数字图像细微差别的方法。

2 矩阵的 LU 分解

2.1 三角阵

在线性代数中,对于 n 阶方阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$,若 $i > j$ ($i < j$) 时 $a_{ij} = 0$,则称 A 为上(下)三角阵,上、下三角阵统称为三角阵。

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

2.2 矩阵的 LU 分解

对于 n 阶方阵 A ,若有下三角阵 L 和上三角阵

使得 $A = LU$, 则称 A 可以三角分解, 称 $A = LU$ 为 A 的三角分解或 LU 分解.

2.3 矩阵形式表示

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ b_{21} & l_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & & l_{nn} \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

2.4 MATLAB中的 LU分解

在 MATLAB 中进行 LU 分解的命令是 `lu`

$$[LU] = \text{lu}(A)$$

举例:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 \\ 0.3333 & 1.0000 & 0 \\ 0.5000 & 0.2308 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 6.0000 & 2.0000 & 3.0000 \\ 0 & 4.3333 & 7.0000 \\ 0 & 0 & 5.8846 \end{bmatrix}$$

3 矩阵的 LU 分解在数字图像处理中的应用

3.1 图像的 LU 分解

把一幅图像分解成 L 图像和 U 图像. 从图 2、图 3 可以看出, L 图像几乎完全是黑色的, 对于 U 图像而言, 下三角是黑色的, 上三角呈现出灰度的变化. 这是因为在用 MATLAB 进行矩阵的 LU 分解时, 所得出的 L 矩阵中的数值是非常小的, 以至于当用灰度图像显示时看不出灰度的变化, 即几乎是全黑色的. 而对于 U 矩阵, 是上三角矩阵, 且上三角部分的数值比较大, 所以对 U 进行灰度显示时, 下三角部分是黑色的, 上三角部分呈现出灰度的明显变化.

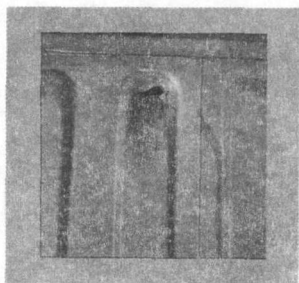


图 1 原图像

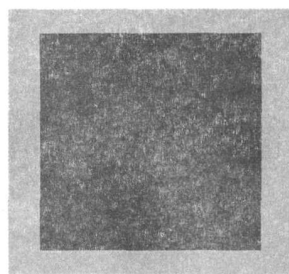


图 2 L 图像

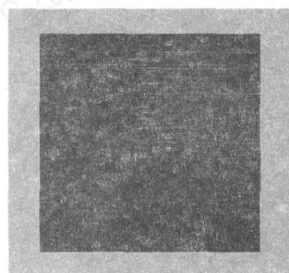
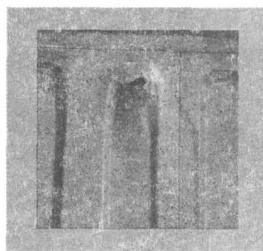


图 3 U 图像

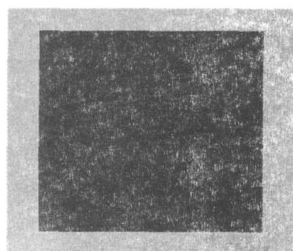
3.2 加噪声后图像的 LU 分解

为了进一步说明上面的情况, 对原图像分别加了两种不同密度的噪声, 然后再对图像进行 LU 分解.

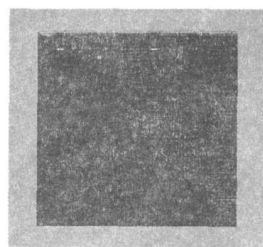
由图 4、图 5 可以看出, 对原图加不同程度的噪声, 分解后 L 几乎看不到变化, 而 U 却有很大的变化.



(a) 原图像 LU 分解



(b) L 图像 LU 分解



(c) U 图像 LU 分解

图 4 添加密度为 0.02 盐椒噪声后图像的 LU 分解

3.3 矩阵 LU 分解的应用

从前面的分析可以看出, 原图像的灰度变化在

进行 LU 分解后只反映在 U 矩阵的上三角处.

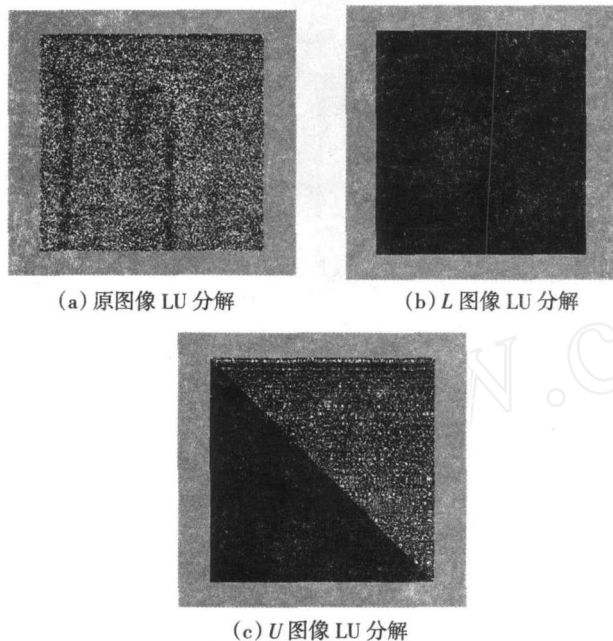


图 5 添加密度为 0.5 盐椒噪声后图像的 LU 分解

当原图含有较大的噪声时,可以直接通过观察原图即可知道原图含有噪声.但当原图含有不明显噪声时,比如取系数为 0.000 05 时,即使通过比较命令也几乎看不到加噪声后的图像和原图像的区别.此时便可以通过比较 U 的区别来判断.

从图 6 很难看出两幅图像的差别,从图 7 可见,两幅图像的差别仅仅表现在一两个极小的白点处.但是从图 8 看,差别是很明显的.因此此种方法可以用于细微差别的判断,类似于放大镜的作用.

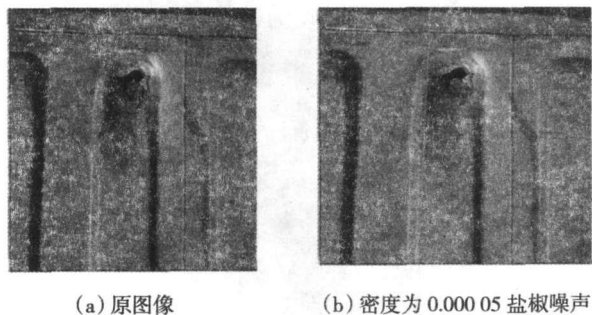


图 6 原图像和添加密度为 0.000 05 盐椒噪声图像

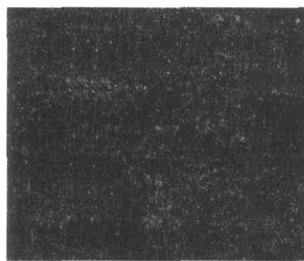


图 7 原图像和噪声图像之间的差别

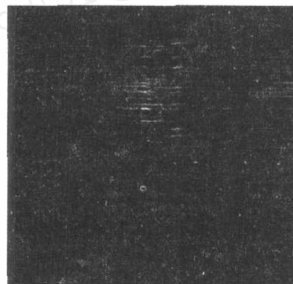


图 8 原图像的 U 图像和噪声图像的 U 图像之间的差别

4 结 语

由以上分析可以看出,数字图像经过矩阵的 LU 分解后,图像的变化主要反映在矩阵 U 的上三角处.这样就把变化因素的活动范围从整个矩阵缩小到了矩阵的上三角处.因此较整个矩阵更能清晰地显现出变化的程度.

通过对图像施加不同程度的盐椒噪声,对比 LU 分解前图像之间的差别和 LU 分解后图像之间的差别,很好的说明了该方法的有效性.

参 考 文 献:

- [1] 冈萨雷斯. 数字图像处理 [M]. 阮秋琦, 译. 第 2 版. 北京: 电子工业出版社, 2003.
- [2] 董增福. 矩阵分析教程 [M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2003.
- [3] 王沫然. MATLAB 6.0 与科学计算 [M]. 北京: 电子工业出版社, 2001.
- [4] 王家文, 曹 宇. MATLAB 6.5 图形图像处理 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2004.

(编辑:付长缨)