

Kronecker 乘积生成分形图形和放大图像

韩 伟

(内蒙古赤峰学院 数学学院, 内蒙古 赤峰 024001)

摘 要: 分形图形生成是分形几何学研究的主要内容之一. 利用矩阵的 Kronecker 乘积, 通过构造不同的矩阵, 生成了各种不同的分形图形. 这些图形呈现出了精细的自相似结构. 与生成分形图形的 L 系统和迭代函数系统相比, 基于 Kronecker 乘积生成的分形图的自相似结构更为复杂. 同时, 借助矩阵的 Kronecker 乘积, 给出了一种根据图像内容自适应选取乘积矩阵的方法, 很好地实现了图像的放大. 与基于分形图像编码的图像放大方法相比, 本文的图像放大方法计算简单, 放大效果好.

关键词: Kronecker 乘积; 分形图形; 自相似结构; 图像放大

中图分类号: TP391 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2011)02-0049-04

Generating Fractal Graphics and Zooming Image Using Kronecker Product

HAN Wei

(Mathematics College, Chifeng University, Chifeng 024001, China)

Abstract Fractal graphics generation is one of the main fields in fractal geometry. In this paper different fractal graphics are generated by using Kronecker product of matrix. These graphics show fine self-similar structures. Compared with Iteration Function System and L-system which generates fractal graphics, self-similar structures of fractal graphics are more complicated which are based on Kronecker product. Simultaneously, a method of selecting product matrix adaptively according to image content is given by Kronecker product of matrix. Our method obtains ideal results of image magnification. Compared with image zooming method based on fractal image coding, the method proposed in this paper has low calculation cost and better image zooming effects.

Key words Kronecker product; fractal graphics; self-similar structure; image zooming

0 引 言

分形图形生成是分形的计算机生成的主要研究内容. 在众多的生成分形图形的方法中, 常用的有 L 系统和迭代函数系统. L 系统^[1]是一种形式语言, 可用于模拟植物形态和生长, 是一类生成自然景物的有效方法. 利用 L 系统生成分形图, 需要给定初始图形和生成元. 不同的初始图形或不同的生成元, 可

以生成各种各样的分形图形. 迭代函数系统^[2]是由一族压缩映射构成, 从任意初值出发, 通过对这族压缩映射的反复迭代, 就可以生成分形图. 利用 L 系统和迭代函数系统生成分形图形的研究已经非常多^[1-4], 而对矩阵的 Kronecker 乘积生成分形图的研究相对较少. 本文在对矩阵的 Kronecker 乘积研究的基础上, 给出生成分形图的各种实例.

利用矩阵的 Kronecker 乘积, 不仅可以生成不同的分形图, 而且可以对图像进行放大. 图像放大是图

像的一种超分辨率表示,是图像处理的基本研究内容之一.图像放大的方法有插值法^[5-6]、基于偏微分方程的方法^[7-8]以及基于分形图像编码的方法^[9]等.插值法算法简单、处理速度快,会导致放大图像中产生锯齿效应或使图像边缘变得模糊.基于偏微分方程的方法在图像放大效果上较插值方法有明显的改进,但当迭代次数较多时,会花费较长的处理时间.基于分形图像编码的图像放大方法能克服插值方法产生的锯齿效应,但会出现块状效应,且处理十分耗时.利用 Kronecker 乘积放大图像不仅可以消除块状效应、不产生模糊边缘,而且与基于偏微分方程和基于分形图像编码的图像放大方法相比,其计算复杂度低,运算速度快.

1 矩阵的 Kronecker 乘积

定义^[10] 假定给出两个矩阵 A, B :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$
$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pq} \end{bmatrix}$$

定义 A 与 B 的乘积运算 $C = A \otimes B$, 其中

$$C = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

于是 C 为 $mp \times nq$ 矩阵,称为 A 与 B 的 Kronecker 乘积. $a_{ij}B$ 按照数与矩阵的乘法计算,也可以定义下面的广义 Kronecker 乘积^[10-11]:

- 1) $A \otimes B = (a_{ij}B)_{mp \times nq} \pmod{N}$;
- 2) $A \otimes B = (a_{ij} \mid B)_{mp \times nq}$;
- 3) $A \otimes B = (a_{ij} \& B)_{mp \times nq}$;
- 4) $A \otimes B = (a_{ij} \text{ } B)_{mp \times nq}$

其中, N 为给定的正整数, mod 表示求余运算,而 $\mid$ 和 $\&$ 分别表示二进制的按位或、按位与以及按位异或.

2 利用 Kronecker 乘积生成分形图形

矩阵的 Kronecker 乘积 $A \otimes B$ 按分块矩阵方式

将矩阵 B 嵌入矩阵 A 的各个元素所在的位置.对于给定的图形矩阵 A 与 B ,可以按照矩阵的 Kronecker 乘积生成阶数更高的图形 C .一般而言,这个图形 C 具有更精细的自相似结构^[10].下面的三组实验分别给出了不同情况下生成的分形图.

实验 1 矩阵 A 相同, B 不同时生成的分形图.图 1(a)是给定矩阵 A 和 B_1 时生成的分形图;图 1(b)给定矩阵 A 和 B_2 时生成的分形图.对相同的矩阵 A, B 矩阵的稍微变化,得到的 Kronecker 乘积矩阵就有很大的差异.

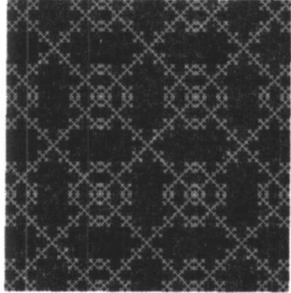
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

实验 2 不同矩阵 A 、相同 B 生成的分形图.图 2(a)和图 2(b)是在矩阵 B 相同,而矩阵 A 分别取 A_1 和 A_2 时生成的分形图.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 23 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 30 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



(a) $A \otimes B_1$



(b) $A \otimes B_2$

图 1 $A \otimes B_1$ 和 $A \otimes B_2$ 生成的分形图

从图 2 可以看出,尽管改变矩阵 A 对生成的图形有一定的影响,但不及矩阵 B 的改变对生成的图形的影响明显.这是因为,矩阵 B 是嵌入在矩阵 A 中, B 决定了嵌入的内容,而 A 的元素仅起到了改变生成图形的亮度的作用,并不能改变生成图形的细节结构.因此,构造不同的矩阵 B 是生成不同的分形图的关键.

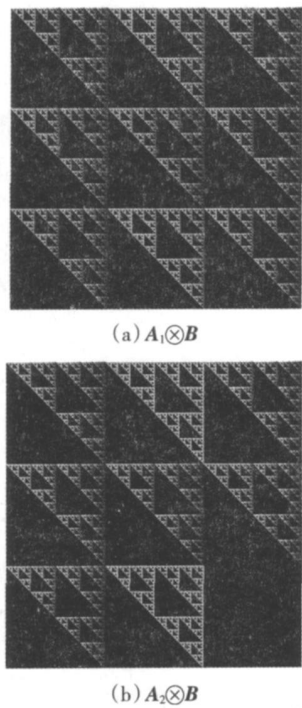


图 2 $A_1 \otimes B$ 和 $A_2 \otimes B$ 生成的分形图

实验 3 广义 Kronecker 乘积生成的分形图

图 3 是在矩阵 A 和 B 相同的情况下, 分别利用广义 Kronecker 乘积

$$A \otimes B = (a_{ij} B)$$
$$A \otimes B = (a_{ij} B) \pmod{255}$$

生成的分形图, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 20 & 14 & 56 \\ 37 & 89 & 78 \\ 9 & 49 & 65 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 9 \\ 7 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

图 3 表示对 $a_{ij}B$ 的运算规则不同, 生成的分形图形会有较大的差异。

3 基于 Kronecker 乘积的图像放大

如果 A 是原始图像矩阵, B 为反映细节的图像矩阵, 那么 $A \otimes B$ 这个更高阶的矩阵可以看作是高分辨率下的观察^[10]。基于此, 可以对给定的图像 A , 构造图像矩阵 B , 以生成高分辨率的图像 $A \otimes B$, 实现对图像 A 的放大。

设矩阵 B 的大小为 $k \times k$, 其可以表示为

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kk} \end{bmatrix}$$

对分辨率为 $N \times M$ 的图像 A 中的每一个像素

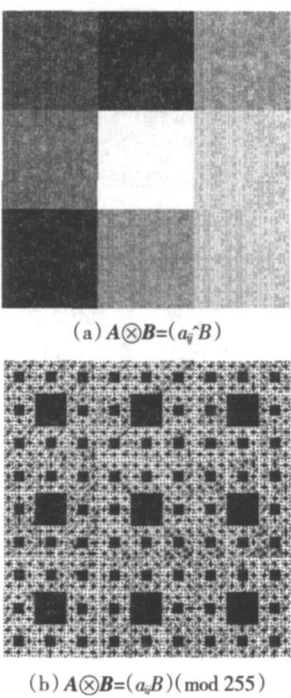


图 3 广义 Kronecker 乘积生成的分形图

$a_{ij} (i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, M)$, 构造矩阵 B 的方法为: 首先, 令 $b_{11} = 1$; 其次比较矩阵

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{ij} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,j+k-1} \\ a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,j+k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i+k-1,j} & a_{i+k-1,j+1} & \cdots & a_{i+k-1,j+k-1} \end{bmatrix}$$

中的各元素 $a_{u,v} (u \neq i \text{ 且 } v \neq j)$ 与 a_{ij} 的关系. 如果 $a_{u,v} < a_{ij}$, 取矩阵 B 中与 $a_{u,v}$ 位置相对应的元素 $b_{u,v} = 1 - w \times \text{rand}(1)$; 如果 $a_{u,v} > a_{ij}$, 取矩阵 B 中与 $a_{u,v}$ 位置相对应的元素 $b_{u,v} = 1 + w \times \text{rand}(1)$; 如果 $a_{u,v} = a_{ij}$, 取矩阵 B 中与 $a_{u,v}$ 位置相对应的元素 $b_{u,v} = 1$. 这里 $\text{rand}(1)$ 表示生成 $[0, 1]$ 上均匀分布的随机数, w 是一个正常数, 其取值不超过 0.1.

利用上述方法构造的一系列矩阵 B , 依次和图像 A 作局部 Kronecker 乘积, 即可实现对图像 A 的放大. 图 4 是对 Lena 图像放大的结果, 其中图 4(a) 是待放大的 Lena 图像, 图 4(b) 是 $k = 2, w = 0.01$ 时对 Lena 图像放大 4 倍的结果。

图 5 是对 Pepper 图像放大的结果, 其中图 5(a) 是待放大的 Pepper 图像, 图 5(b) 是 $k = 3, w = 0.01$ 时对 Pepper 图像放大 9 倍的结果。

参数 k 的大小决定了每次图像的放大倍数. 参数 w 是构造 Kronecker 乘积中 B 矩阵元素的一个扰动量. w 值超过 0.1 在放大图像中会产生斑点效应. 因此, 合适的参数选择是保证放大图像质量的关键。



图 4 Lena 图像放大结果

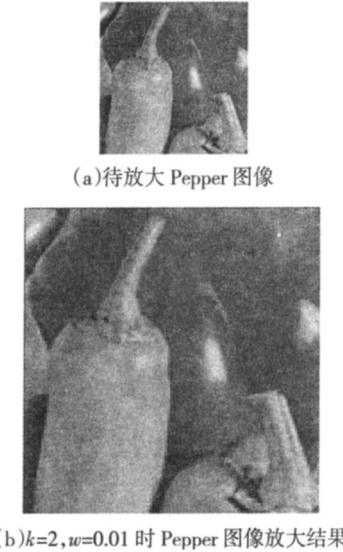


图 5 Pepper 图像放大结果

图 6是分别利用分形图像编码方法和本文方法对图像放大的结果,其中图 6(a)是待放大的图像,图 6(b)是定义域子块大小为 4×4 时利用分形图像编码方法对待放大图像放大 4 倍的结果;图 6(c)是本文方法放大的结果 ($k=2, w=0.05$). 图 6(b)的放大图像存在明显的方块效应,其处理时间为 110.922 s 而图 6(c)的处理时间仅为 0.5 s(运行环境为 LenovoX200 Matlab6.5). 由此可以看到,利用矩阵的 Kronecker 乘积实现对图像的放大,与基于分形编码的图像放大方法相比,不仅运算速度快,而且可以获得理想的放大效果.

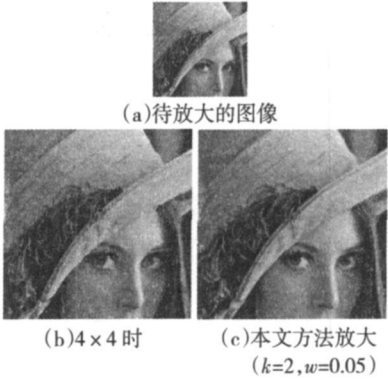


图 6 不同方法对图像的放大结果

4 结 语

本文利用矩阵的 Kronecker 乘积分别实现了分形图形的生成和图像的放大. 在分形图形生成部分,给出了 3 种不同情形下生成的分形图. 讨论了不同的生成矩阵 A 和 B 对生成的分形图形的影响. 图像放大时,针对待放大图像的每一个像素的邻域信息,构造不同的矩阵,完成图像的放大. 与基于分形编码的图像放大方法相比,利用 Kronecker 乘积放大图像,在获得理想的放大效果的同时,运算速度更快.

参 考 文 献:

[1] 李水根,赵翔鹏. 二维和高维空间的分形图形艺术 [M]. 北京: 科学出版社, 2009 30- 50

[2] 李水根. 分形 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2004 9- 13

[3] 孙博文. 分形算法与程序设计: Visual C++ 实现 [M]. 北京: 科学出版社, 2004 9- 13

[4] TOMASZ M. Realistic Rendering 3D IFS Fractals in Realtime With Graphics Accelerators [J]. Computer & Graphics 2010 34(2): 167- 175.

[5] LEHMANN T, CONNER C, SPITZER K. Survey: Interpolation Methods in Medical Image Processing [J]. IEEE Trans Medical Imaging 1999, 18(11): 1049- 1075

[6] ARANDIGA F, DONAT R, MULET P. Adaptive Interpolation of Images [J]. Signal Processing 2003, 83(2): 459- 464

[7] 朱宁,吴静,王忠谦. 基于偏微分方程的图像放大法 [J]. 计算机辅助几何设计与图形学学报. 2005 17(9): 1939- 1945

[8] ABDELMONNIN Behloul, FRÉDÉRIC Guichard. A Partial Differential Equation Approach to Image Zoom [C] // 2004 International Conference on Image Processing (ICIP), 2004 649- 652

[9] JACQUIN A. E. A Novel Fractal Block-coding Technique for Digital Image [C] // Proceeding of ICASSP, New Mexico 1990 2225- 2228

[10] 齐东旭. 分形及其计算机生成 [M]. 北京: 科学出版社, 1994: 12- 20

[11] 许君一,孙伟,齐东旭. 矩阵 Kronecker 乘积及其应用 [J]. 计算机辅助几何设计与图形学学报, 2003, 15(4): 377- 388

(编辑: 王 萍)