

不确定随机变时滞神经网络的全局渐进稳定性

吴海霞^{1,2}, 冯 伟², 张 伟²

(1 重庆大学 计算机学院, 重庆 400044; 2 重庆教育学院 计算机与现代教育技术系, 重庆 400067)

摘 要: 采用 Itô's 微分公式和不等式分析技巧, 研究了一类不确定随机变时滞神经网络的全局渐进稳定性问题. 该模型同时考虑了神经网络模型的两种扰动因素, 即随机扰动与不确定性扰动. 不确定性参数是时变且范数有界的. 通过构造适当的 Lyapunov 泛函, 以线性矩阵不等式形式给出了平衡点在均方根意义下的全局渐进稳定性判据, 能够利用 LMI 工具箱很容易地进行检验. 此外, 仿真示例证明了结论的有效性.

关键词: 全局渐进稳定性; 随机神经网络; 不确定性; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP183

文献标识码: A

文章编号: 1000-7180(2010)02-0013-04

Global Asymptotical Stability of Uncertain Stochastic Neural Networks with Time-varying Delays

WU Hai-xia^{1,2}, FENG Wei², ZHANG Wei²

(1 College of Computer Science, Chongqing University, Chongqing 400044, China;

2 Department of Computer and Modern Education Technology, Chongqing Education College, Chongqing 400067, China)

Abstract: By Itô's differential formula and combining the method of inequality analysis, the problem of stochastic asymptotical stability of a class of stochastic neural networks with time-varying delays and parameter uncertainties is investigated. There are two kinds of disturbances which are unavoidable to be considered in neural networks. The parameter uncertainties are time-varying and norm-bounded. The time-delay factors are unknown and time-varying with known bounds. Based on Lyapunov-Krasovskii functional and stochastic analysis approaches, some new stability criteria are presented in terms of linear matrix inequalities (LMIs) to guarantee the delayed neural network to be stochastically asymptotically stable in the mean square for all admissible uncertainties. Numerical examples are given to demonstrate the usefulness of the proposed asymptotical stability criteria.

Key words: global asymptotical stability; stochastic neural networks; uncertainties; LMIs

1 引言

神经网络所具有的非线性变换特性和高度并行运算能力使其在组合最优化、模式识别、图像处理、联想记忆等领域具有广泛的应用前景. 所有这些成功应用都极大地依赖于神经网络的动态特性. 毫无疑问, 稳定性是神经网络的主要性能之一, 是设计神经网络的一个关键特征. 另一方面, 触突信号传输延迟经常发生在各种神经网络中, 并可能导致不良的动态网络特性, 如振荡和不稳定等. 时滞神经网络的

稳定性分析问题已经取得了大量的研究成果, 得到了很多保证时滞神经网络的渐近或指数稳定性的充分条件, 其中时滞类型包括常时滞、变时滞与分布时滞等^[1-2].

对于真实神经网络, 在神经网络建模过程中有两种扰动是应当考虑的, 一种是随机扰动, 另一种是参数不确定性扰动. 文献[3]中指出可以通过确定随机输入使神经网络稳定或不稳定. 多种时滞神经网络的随机稳定性分析也取得一些相应的研究成果^[4]. 另一方面, 当通过硬件来实现神经网络时, 神

收稿日期: 2009-01-03; 修回日期: 2009-03-05

基金项目: 重庆市科委自然科学基金资助项目(CSTC, 2009BB2378); 重庆市教委资助项目(KJ081501, kj091507)

经网络的参数由于电子元件误差的影响,可能会发生变化.故在神经网络建模时,应考虑参数不确定性的影响.针对该类稳定性分析问题,现已得到一些研究成果^[5-7].然而,同时考虑参数不确定性扰动与随机扰动的稳定性研究还很少.

因此在文中,采用 Itô's 微分公式和不等式分析技巧,研究了具有变时滞的不确定随机神经网络的稳定性,得到其 LMI 形式的全局渐进稳定性的充分判据,推广了相关文献的结果,并用仿真示例检验了该判据的有效性.

2 系统模型及引理

考虑如下不确定随机时滞神经网络:

$$dx(t) = [-A(t)x(t) + W_0(t)f(x(t)) + W_1(t)f(x(t - \tau(t)))]dt + [H_0(t)x(t) + H_1(t)x(t - \tau(t))]d\omega(t) \quad (1)$$

式中, $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T \in R^n$ 是神经元的状态向量, $\tau(t)$ 是满足 $0 \leq \tau(t) \leq \bar{\tau}$ 与 $i(t) \leq \tau_d < 1$ 的时滞, $\bar{\tau}, \tau_d$ 是常量. $A(t) = A + \Delta A(t)$, $W_0(t) = W_0 + \Delta W_0(t)$, $W_1(t) = W_1 + \Delta W_1(t)$, $H_0(t) = H_0 + \Delta H_0(t)$, $H_1(t) = H_1 + \Delta H_1(t)$, 其中, $A = \text{diag}[a_1, a_2, \dots, a_n] > 0$, $W_0, W_1 \in R^{n \times n}$ 分别是相应的神经元连接权值矩阵. $f(x(t)) = [f_1(x_1(t)), f_2(x_2(t)), \dots, f_n(x_n(t))]^T \in R^n$ 是神经元的激励函数向量, 满足 $f(0) = 0$. $\omega(t) = [\omega_1(t), \omega_2(t), \dots, \omega_m(t)]^T \in R^m$ 是一个定义在完备概率空间 (Ω, F, P) 的 m 维 Brownian 运动. 此外, 假设激励函数 $f(\cdot)$ 有界并满足以下条件:

$$0 \leq \frac{f_i(x) - f_i(y)}{x - y} \leq k, \forall x, y \in R^n, x \neq y \quad (2)$$

式中, $i = 1, 2, \dots, n$ 和 k 是正常数.

假设 1 不确定性参数 $\Delta A, \Delta W_0, \Delta W_1, \Delta H_0, \Delta H_1$, 定义为

$$[\Delta A \ \Delta W_0 \ \Delta W_1 \ \Delta H_0 \ \Delta H_1] = DF(t)[E_1 \ E_2 \ E_3 \ E_4 \ E_5] \quad (3)$$

式中, $D, E_1, E_2, E_3, E_4, E_5$ 是已知的适维常矩阵. 不确定矩阵 $F(t)$ 满足

$$F^T(t)F(t) \leq I \text{ for } \forall t \in R. \quad (4)$$

根据 Itô's 微分公式(或广义 Itô's 公式)^[7], 对于广义随机系统 $dx(t) = g(x(t), t)dt + h(x(t), t)d\omega(t)$ 在 $t \geq 0$ 时, 满足初始条件 $x(t_0) = x_0 \in R^n$, 其中 $\omega(t)$ 是定义在 (Ω, F, P) 上的 Brownian 运动, $g: R^n \times R^+ \rightarrow R^n$ 和 $h: R^n \times R^+ \rightarrow R^{n \times m}$. $V \in$

$C^{2,1}(R^n \times R^+; R^+)$, 算子 LV 从 $R^n \times R^+$ 到 R 定义如下:

$$LV(x, t) = V_t(x, t) + V_x(x, t)g(x, t) + \frac{1}{2} \text{trace}[h^T(x, t)V_{xx}(x, t)h(x, t)],$$

其中,

$$V_t(x, t) = \frac{\partial V(x, t)}{\partial t},$$

$$V_x(x, t) = \left(\frac{\partial V(x, t)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V(x, t)}{\partial x_n} \right),$$

$$V_{xx}(x, t) = \left(\frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{n \times n}, i, j = 1, 2, \dots, n.$$

定义 1 系统(1)的平衡点在均方根意义下对所有参数不确定性满足式(2)~式(4)是全局渐进稳定的, 如果以下条件成立:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E \|x(t; \xi)\|^2 = 0, \forall t > 0 \quad (5)$$

引理 1 [Schur 补充条件] 对给定的常对称阵 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$, 若 $\Sigma_1 = \Sigma_1^T$ 且 $0 < \Sigma_2 = \Sigma_2^T$, 那么 $\Sigma_1 + \Sigma_3^T \Sigma_2^{-1} \Sigma_3 < 0$, 当且仅当 $\begin{bmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_3^T \\ \Sigma_3 & -\Sigma_2 \end{bmatrix} < 0$, 或

$$\begin{bmatrix} -\Sigma_2 & \Sigma_3 \\ \Sigma_3^T & \Sigma_1 \end{bmatrix} < 0.$$

引理 2 对任意矩阵 $D, E, F \in R^{n \times m}$, 当 $F^T F \leq I$ 且 ϵ 为正常数, 以下不等式成立:

$$DFE + E^T F^T D^T \leq \epsilon D^T D + \epsilon^{-1} E^T E.$$

引理 3 对任意常对称阵 $M \in R^{n \times n}$, $M = M^T > 0$, 当常数 $\gamma > 0$, 向量函数 $\omega: [0, \gamma] \rightarrow R^n$ 使积分明确定义, 以下不等式成立:

$$\begin{aligned} & \left[\int_0^\gamma \omega(s) ds \right]^T M \left[\int_0^\gamma \omega(s) ds \right] \\ & \leq \gamma \int_0^\gamma \omega^T(s) M \omega(s) ds. \end{aligned}$$

3 全局渐进稳定性

定理 1 系统(1)在均方根意义下是全局渐进稳定的, 如果存在正定对称矩阵 P, Q 和 Z , 正定对角矩阵 S 和 T , 正常数 ϵ_1 与 ϵ_2 , 使得下列 LMI 成立: $\Xi =$

$$\begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & \Xi_{13} & \Xi_{14} & 0 & H_0^T P & PD & 0 \\ * & \Xi_{22} & 0 & 0 & 0 & H_1^T & 0 & 0 \\ * & * & \Xi_{33} & \Xi_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Xi_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{\tau}^{-1} Z & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -P & 0 & PD \\ * & * & * & * & * & * & -\epsilon_1 I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\epsilon_2 I \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中,“*”代表对称矩阵的对称项,且

$$\Xi_{11} = -2PA + Q + \bar{\tau}Z + \epsilon_1 E_1^T E_1 + \epsilon_2 E_4^T E_4,$$

$$\Xi_{12} = \epsilon_2 E_4^T E_5,$$

$$\Xi_{13} = PW_0 - \epsilon_1 E_1^T E_2 + S,$$

$$\Xi_{14} = PW_1 - \epsilon_1 E_1^T E_3,$$

$$\Xi_{22} = -(1 - \tau_d)Q + \epsilon_2 E_5^T E_5,$$

$$\Xi_{33} = -2k^{-1}S + \epsilon_1 E_2^T E_2,$$

$$\Xi_{34} = \epsilon_1 E_2^T E_3,$$

$$\Xi_{44} = -2k^{-1}T + \epsilon_1 E_3^T E_3.$$

证明:利用引理1,当 $\Xi < 0$,有

$$\Xi = \begin{bmatrix} (1,1) & 0 & (1,3) & PW_1 & 0 & H_0^T P \\ * & (2,2) & 0 & T & 0 & H_1^T P \\ * & * & -2k^{-1}S & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -2k^{-1}T & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{\tau}^{-1}Z & 0 \\ * & * & * & * & * & -P \end{bmatrix} + \epsilon_1 \Omega_1 \Omega_1^T + \epsilon_1^{-1} \Omega_2 \Omega_2^T + \epsilon_2 \Omega_3 \Omega_3^T + \epsilon_2^{-1} \Omega_4 \Omega_4^T < 0 \quad (7)$$

$$(1,1) = -2PA + Q + \bar{\tau}Z,$$

$$(1,3) = PW_0 + S,$$

$$(2,2) = -(1 - \tau_d)Q,$$

$$\Omega_1 = [-E_1 \ 0 \ E_2 \ E_3 \ 0 \ 0]^T,$$

$$\Omega_2 = [D^T P^T \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T,$$

$$\Omega_3 = [E_4 \ E_5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T,$$

$$\Omega_4 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ D^T P^T]^T.$$

其中

再考虑式(3)、式(4),利用引理2,则有

$$\begin{bmatrix} -2P\Delta A(t) & 0 & P\Delta W_0(t) & P\Delta W_1(t) & 0 & H_0^T P \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & H_1^T P \\ * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{\tau}^{-1}Z & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 \end{bmatrix} = \Omega_1 F^T(t) \Omega_2^T + \Omega_2 F(t) \Omega_1^T + \Omega_3 F^T(t) \Omega_4^T + \Omega_4 F(t) \Omega_3^T \leq \epsilon_1 \Omega_1 \Omega_1^T + \epsilon_1^{-1} \Omega_2 \Omega_2^T + \epsilon_2 \Omega_3 \Omega_3^T + \epsilon_2^{-1} \Omega_4 \Omega_4^T$$

因此,使得

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{11} & 0 & PW_0(t) + S & PW_1(t) & 0 & H_0^T(t)P \\ * & \Sigma_{22} & 0 & 0 & 0 & H_1^T(t)P \\ * & * & -2k^{-1}S & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -2k^{-1}T & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{\tau}^{-1}Z & 0 \\ * & * & * & * & * & -P \end{bmatrix} < 0. \quad (8)$$

再次利用 Schur 补充条件,得到

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & 0 & PW_0(t) + S & PW_1(t) & 0 \\ * & \Sigma_{22} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -2k^{-1}S & 0 & 0 \\ * & * & * & -2k^{-1}T & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{\tau}^{-1}Z \end{bmatrix} + u(t)Pu(t)^T < 0. \quad (9)$$

其中

$$\Sigma_{11} = -PA(t) - A^T(t)P + Q + \bar{\tau}Z,$$

$$\Sigma_{22} = -(1 - \tau_d)Q,$$

$$u(t) = [H_0(t) \ H_1(t) \ 0 \ 0 \ 0]^T.$$

将系统(1)的 Lyapunov-Krasovskii 泛函定义如下:

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t) + \int_{t-\tau(t)}^t x^T(s)Qx(s)ds + \int_{-\bar{\tau}}^0 \int_{\tau+\theta}^t x^T(s)Zx(s)dsd\theta \quad (10)$$

根据 Itô's 微分公式,沿着系统(1)的任意轨迹,

$V(x(t), t)$ 对时间 t 的随机导数为

$$\dot{V}(x(t)) \leq \{2x^T(t)P[-A(t)x(t) + W_0(t)f(x(t)) + W_1(t)f(x(t - \tau(t)))] + x^T(t)Qx(t) - (1 - \tau_d)x^T(t - \tau(t))Qx(t - \tau(t)) + \bar{\tau}x^T(t)Zx(t) - \int_{t-\tau(t)}^t x^T(s)Zx(s)ds + \Psi^T(t)P\Psi(t)\}dt + \{2x^T(t)P\Psi(t)\}d\omega(t),$$

式中, $\Psi(t) = [H_0(t)x(t) + H_1(t)x(t - \tau(t))]$.

考虑对任意对角阵, $S > 0, T > 0$,由式(2)得

$$0 = 2x^T(t)Sf(x(t)) + 2x^T(t - \tau(t))Tf(x(t - \tau(t))) - 2x^T(t)Sf(x(t)) - 2x^T(t - \tau(t))Tf(x(t - \tau(t))) \leq 2x^T(t)Sf(x(t)) + 2x^T(t - \tau(t))Tf(x(t - \tau(t))) - 2k^{-1}f^T(x(t - \tau(t)))Tf(x(t - \tau(t))) \quad (11)$$

将式(11)代入 $\dot{V}(x(t))$,由引理3得

$$\dot{V}(x(t)) \leq \{\xi^T(t)\Sigma\xi(t)\}dt + \{2x^T(t)P\Psi(t)\}d\omega(t),$$

其中 Σ 在式(9)中给出,同时

$$\xi^T(t) = \{x^T(t), x^T(t - \tau(t)), f^T(x(t)),$$

$$f^T(x(t - \tau(t))), (\int_{t-\tau(t)}^t x(s)ds)^T\}.$$

显然,当 $\Sigma < 0$ 时,存在正常数 $\gamma > 0$ 使得 $\Sigma + \text{diag}\{\gamma I, 0, 0, 0, 0\} < 0$,即

$$\dot{V}(x(t)) \leq \gamma \|x(t)\|^2 dt + \{2x^T(t)P\Psi(t)\}d\omega(t) \quad (12)$$

对式(12)两边求数学期望得

$$\frac{dE V(x(t), t)}{dt} \leq -\gamma E \|x(t)\|^2 \quad (13)$$

根据 Lyapunov 稳定性理论,式(13)说明系统

(1) 在均方根意义下是全局渐进稳定的.

4 仿真示例

示例 1 考虑一个二阶不确定变时滞随机神经网络(1),其参数如下:

$$A = \begin{bmatrix} 2.5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$W_0 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.1 \\ 0.1 & -0.1 \end{bmatrix},$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$\tau(t) = 0.8\sin^2(t), \bar{\tau} = 0.8, \tau_d = 0.8, k = 0.5,$$

$$D = 0.6I, E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = E_5 = 0.2I, H_0 = H_1 = 0.1I.$$

由定理 1, 应用 LMI 工具箱求解线性矩阵(式(6))可知, 系统(1) 在均方根意义下是全局渐进稳定的. 可行解如下:

$$P = \begin{bmatrix} 9.3834 & 0.0508 \\ 0.0508 & 11.0449 \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} 18.4784 & 0.0994 \\ 0.0994 & 17.2883 \end{bmatrix},$$

$$Z = \begin{bmatrix} 14.1356 & 0.0323 \\ 0.0323 & 13.7492 \end{bmatrix},$$

$$S = \text{diag}\{4.7847, 4.7847\},$$

$$T = \text{diag}\{4.9304, 4.9304\},$$

$$\epsilon_1 = 16.3495, \epsilon_2 = 15.8246,$$

$$\epsilon_3 = 16.2401, \epsilon_4 = 16.2401.$$

示例 2 采用文献[6] 中示例 1 的二阶不确定变时滞随机神经网络模型,其参数如下:

$$A = \begin{bmatrix} 1.2 & 0 \\ 0 & 1.15 \end{bmatrix},$$

$$W_0 = 0,$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0.4 & -1 \\ -1.4 & 0.4 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 \\ 0.5 & 0.3 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\tau} = 0.8, \tau_d = 0, k = 0.8,$$

$$E_1 = 0.6I, E_2 = 0, E_3 = 0.2I, E_4 = E_5 = 0, H_0 = H_1 = 0.$$

由定理 1, 利用 LMI 工具箱求解线性矩阵不等式可知, 该系统是全局渐进稳定的. 但文献[8] 中的推论 1 则不能判定系统是稳定的. 因此, 文中定理 1 比文献[8] 中的推论 1 具有更少的保守性.

5 结束语

文中研究了一类不确定变时滞神经网络模型的全局渐进稳定性问题. 基于线性矩阵不等式(LMI) 技术, 给出了对于任意的有界变时滞 $\tau(t)$, 神经网络的平衡点均为全局渐进稳定的充分条件. 文中的系统(1) 同时考虑了真实神经系统的两种扰动, 即随机扰动与不确定性扰动. 在数学模型的意义, 可以认为系统(1) 是对文献[4-5] 与文献[6, 8] 的一种广义上的推广. 文中的结论对于神经网络的分析及设计是很实用的. 通过仿真示例进一步验证了结论的有效性.

参考文献:

- [1] 覃磊, 刘文斌, 周康. 基于神经网络组的空间目标识别的信息融合方法[J]. 微电子学与计算机, 2008, 25(8): 117-120.
- [2] 杨居义, 易永宏. 基于 BP 神经网络的地震预测研究[J]. 微电子学与计算机, 2008, 25(10): 129-132.
- [3] Blythe S, Mao X, Liao X. Stability of stochastic delay neural networks[J]. Journal of the Franklin Institute, 2001, 338(4): 481-495.
- [4] Liao X, Mao X. Exponential stability and instability of stochastic neural networks[J]. Stochastic Analysis and Applications, 1996, 14(2): 165-185.
- [5] Wan L, Sun J. Mean square exponential stability of stochastic delayed Hopfield neural networks[J]. Physics Letters A, 2005, 343(4): 306-318.
- [6] Liu B, Liu X. Robust stability of uncertain discrete impulsive systems[J]. IEEE Transactions on Circuits Systems II, 2007, 54(5): 455-459.
- [7] Mao X. Stochastic differential equations and their applications[M]. UK, Horwood: Chichester, 1997.
- [8] Zhang J, Shi P, Qiu J. Novel robust stability criteria for uncertain stochastic hopfield neural networks with time-varying delays[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2007, 8(4): 1349-1357.

作者简介:

吴海霞 女, (1979-), 博士研究生. 研究方向为非线性系统、神经网络.

冯伟 男, (1978-), 博士研究生. 研究方向为非线性系统、网络控制.

张伟 男, (1970-), 博士后, 教授. 研究方向为信息安全、计算智能与数据挖掘.