

基于 Bezier 样条的曲线光滑处理及交互降噪方法

刘丽丽¹, 陈明^{1,2}, 路游¹

(1 中国石油大学(北京) 计算机科学与技术系, 北京 102249; 2 首都师范大学 信息工程学院, 北京 100048)

摘要: 针对计算机辅助测试的数字采样信号向模拟信号转化时出现的拟合失真现象, 对 Bezier 样条插值法进行优化, 提出一种基于 Bezier 样条插值的采样数据光滑曲线拟合方法, 并针对个别采样数据失效, 提出了一种可直观交互的降噪处理方案. 在降噪处理中, 依据数字采样信号出现异常的物理特点, 从待降噪控制点集合中计算出最佳降噪控制点, 并对最佳降噪控制点的临近采样点按照合理的幅度进行降噪, 在高效降噪的同时保证了曲线的光滑, 保证了拟合曲线的质量, 更加准确地反应了模拟信号所代表的物理意义. 通过在基于 WPF 的 MVVM 模式设计的测井数据处理系统中应用, 验证了方法的有效性, 取得了很好的效果.

关键词: Bezier 样条插值; 曲线拟合; 降噪处理; 模数转换

中图分类号: TP311

文献标识码: A

文章编号: 1000-7180(2010)08-0124-04

The Technology of Curve Smoothing Based on Bezier Spline Interpolation and Interactive Noise Attenuation

LIU Li-li¹, CHEN Ming^{1,2}, LU You¹

(1 Department of Computer Science and Technology, China University of Petroleum (Beijing), Beijing 102249, China;

2 College of Information Engineering, Capital Normal University, Beijing 100048, China)

Abstract: Aiming at the distortion problem generated by curve fitting in the process of D/A, this paper optimize the method of bezier spline interpolation and put forward a method of fitting smooth curve based on bezier spline interpolation and sample data. To deal with the failure sample data, we propose a method for noise reduction which is intuitionist and interactive. According to the physical characteristics of sample data, the most efficient point for noise reduction can be found. Noise reduction can be achieved by adjust the closest points of the most efficient point reasonable. These methods can make noise reduction efficiently, and guarantee the fitted curve quality. The physical meaning of the analog signal can be expressed rightly. By using those in the well logging processing and interpretation system which is based on the WPF MVVM model, the feasibility and effectiveness are verified.

Key words: Bezier spline interpolation; curve fitting; noise attenuation; D/A

1 引言

在数字采样信号向模拟信号转化时常常出现拟合失真现象. 为了准确地表现模拟信号, 需要拟合曲线经过离散点并对其进行光滑处理. 本文提出了基于 Bezier 样条插值^[1]的采样数据光滑曲线形成法, 对 Bezier 样条插值法进行优化, 取已知离散点作为 Bezier 样条控制多边形的顶点, 计算出 Bezier 样条的控制点集合, 这些控制点可以调整 Bezier 样条的

形状达到光滑连接的效果, 进而消除了失真现象, 保证拟合曲线的质量. 由于个别采样数据失效, 拟合曲线中会有跳动或不正常变化的现象发生, 需要人为根据专业知识或数据解释经验对这些异常值进行局部的降噪处理, 现有的降噪处理方法虽然可以将异常点回归到正常位置, 却不能保证拟合曲线的整体光滑. 本文提出了一种可直观交互的降噪处理方案, 依据数字采样信号出现异常的物理特点, 从待降噪控制点集合中计算出最佳降噪控制点, 使用鼠标拖

动的方法将控制点降噪到合理位置,并对最佳降噪控制点的临近采样点按照合理的幅度进行降噪,这样避免了降噪过程对整条曲线光滑的破坏,在操作方便、直观的同时提高了降噪的质量和效率.

2 Bezier 曲线的定义以及 Bezier 曲线之间的光滑连接条件

1971年,法国雷诺汽车公司的Bezier发表了用控制多边形定义曲线和曲面的方法.Bezier曲线是以逼近为基础的参数多项式曲线,它能够比较直观地表示给定条件和所产生曲线之间的关系,可以通过修改输入参数方便地更改曲线的形状和次数.Bezier曲线具有良好的几何性质,能简洁、完美地描述和表达自由曲线,在CAD/CAM技术中得到广泛的应用.Bezier曲线的最大优点是可以通过控制点来调整Bezier曲线的形状,因此是很好的曲线拟合的工具.

2.1 Bezier 曲线的定义

定义1 给定 $n+1$ 个控制顶点 $P_i (i=0 \sim n)$, 可以逼近生成如下的 n 次 Bezier 曲线^[1-2]:

$$P(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(t); t \in [0, 1]$$

式中, $B_{i,n}(t)$ 称为基函数. 它的多项式表示为

$$B_{i,n}(t) C_n^i (1-t)^{n-i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i}; t \in [0, 1]$$

当 $n=3$ 时, 就是三次 Bezier 曲线, 有四个控制点 P_0, P_1, P_2, P_3 , 是以 P_0 为起点, P_3 为终点的自由曲线, 其数学表示为

$$B(t) = (1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 t P_1 + 3(1-t)t^2 P_2 + t^3 P_3, t \in [0, 1] \quad (1)$$

因此, 只要给定特征多边形的 4 个控制顶点矢量 P_0, P_1, P_2, P_3 , 并利用式(1), 即可构造一条三次 Bezier 曲线^[3].

2.2 三次 Bezier 样条曲线光滑拼接的条件

上述 Bezier 曲线定义的仅仅是一段曲线, 不是样条曲线, 所谓 Bezier 样条曲线是一段段的 Bezier 曲线在保证足够光滑条件下连接起来的整条曲线^[4]. 设两段三次 Bezier 曲线 $B_1(P_0, P_1, P_2, P_3)$ 和 $B_2(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$, 使 B_1 和 B_2 保持足够光滑连接的条件如下^[2]:

(1) 要求 B_1 与 B_2 有共同的连接点, 即 G_0 连续, 得 $P_3 = Q_0$.

(2) 要求 B_1 与 B_2 在连接点处有成比例的一阶

导数, 即 G_1 连续, 即 $B'_1(1) = \alpha B'_2(0)$, 得出 $Q_1 - Q_0 = \alpha(P_3 - P_2)$, α 为一常数, 本文取 $\alpha = 1$.

(3) 要求 B_1 与 B_2 在连接点处有成比例的二阶导数, 即 G_2 连续, 即 $B''_1(1) = \beta B''_2(0)$, 得 $Q_0 - 2Q_1 - Q_2 = \beta(P_1 - 2P_2 - P_3)$, β 为一常数, 本文取 $\beta = 1$.

3 以采样数据作为插值条件生成的 Bezier 样条光滑曲线

设采样数据集 S , 包含如表1所示的 $n+1$ 个采样点 $P_i(x_i, y_i), i \in [0, n]$.

表1 采样点数据

x	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

下面介绍如何以此表作为插值条件, 生成基于 Bezier 样条插值的采样数据光滑曲线.

以数据集中相邻两点作为每一段 Bezier 曲线的控制多边形的顶点, 即起点和终点, 这样只需求出每段 Bezier 曲线的另两个控制点. 这些控制点用来调节每段 Bezier 曲线的形状来达到三次 Bezier 样条曲线的光滑拼接, 所以必须满足三次 Bezier 样条曲线光滑拼接的条件.

设经过采样数据集上每个点所形成的光滑曲线有 n 个 Bezier 子线段, 第 $i-1$ 个子线段与第 i 个子线段相连. 约定标记: $P_i (i=1, \cdots, n)$ 为第 i 个点; P_{1_i} 为靠近 P_i 的第一个控制点, 即靠近 P_i 的前一子线段的第二个控制点; P_{2_i} 为靠近 P_i 的第二个控制点, 即靠近 P_i 的后一子线段的第一个控制点. 第 i 个 Bezier 子线段的数学表示为

$$B_i(t) = (1-t)^3 P_{i-1} + 3(1-t)^2 t P_{1_i} + 3(1-t)t^2 P_{2_i} + t^3 P_i \quad t \in [0, 1] \quad (2)$$

对式(2)进行一阶、二阶求导得

$$B'_i(t) = -3(1-t)^2 P_{i-1} + 3(3t^2 - 4t + 1) P_{1_i} + 3(2t - t^2) P_{2_i} + 3t^3 P_i$$

$$B''_i(t) = 6(1-t)^2 P_{i-1} + 6(3t - 2) P_{1_i} + 6(1 - 3t) P_{2_i} + 6t P_i$$

根据 Bezier 曲线的光滑连接的条件(2)得 $B_{i-1}'(1) = B'_i(0)$, 条件(3)得 $B_{i-1}''(1) = B''_i(0)$, 因此得出

$$P_{1_i} + P_{2_{i-1}} = 2P_{i-1}; (i=2, \cdots, n) \quad (3)$$

$$P_{1_{i-1}} + 2P_{1_i} = P_{2_i} + 2P_{2_{i-1}}; (i=2, \cdots, n) \quad (4)$$

因为存在 $B''_1(0) = 0$ 和 $B''_n(1) = 0$, 得

$$2P_{1_1} - P_{2_1} = P_0 \quad (5)$$

$$2P_{2_n} - P_{1_n} = P_n \quad (6)$$

这样我们便可以从式(3)~(6)中得出 n 个可以用于求解控制点 $P_{1_i} (i = 1, \dots, n)$ 的方程:

$$2P_{1_1} + P_{1_2} = P_0 + 2P_1$$

$$P_{1_1} + 4P_{1_2} + P_{1_3} = 4P_1 + 2P_2$$

...

$$P_{1_{i-1}} + 4P_{1_i} + P_{1_{i+1}} = 4P_{i-1} + 2P_i$$

...

$$P_{1_{n-2}} + 4P_{1_{n-1}} + P_{1_n} = 4P_{n-2} + 2P_{n-1}$$

$$2P_{1_{n-1}} + 7P_{1_n} = 8P_{n-1} + P_n$$

而 $P_{2_i} (i = 1, \dots, n)$ 的值可以通过将 $P_{1_i} (i = 1, \dots, n)$ 相对应的带入式(3)~(6)求出。

得到每段 Bezier 曲线的控制点后,便可以生成光滑连接的 Bezier 样条曲线。很多开发平台都提供了 Bezier 曲线绘画函数,比如在 VS.NET2008 中的 WPF 几何图形系统中,只需要提供 Bezier 曲线的四个控制点,便可以画出 Bezier 曲线段。因此根据本文的方法依据采样点数据计算出控制点后,便可以很方便的拟合出一条既经过采样数据又光滑的曲线了。

图 1 和图 2 是基于 WPF 的 MVVM 模式所拟合的曲线在应用本文方法前后效果对比。很显然,采用本文所提出的方法对失真现象做到了很好的光滑处理,更好的展示了模拟信号。

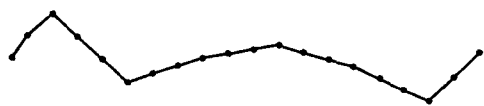


图 1 失真的拟合曲线

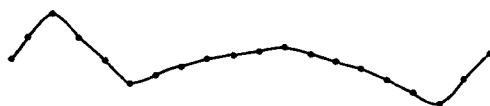


图 2 应用本文的方法处理后的效果

4 二维图形的比例变换

基本的比例变换是指图形相对于坐标原点,按比例系数 (S_x, S_y) ($S_x \neq 0, S_y \neq 0$) 放大或缩小的变换,如图 3 所示。

假定点 $P(x, y)$ 相对于坐标原点沿 X 方向放缩 S_x 倍,沿 Y 方向放缩 S_y 倍 (S_x, S_y 为比例系数),

则变换后 $P'(x', y')$ 点的坐标值分别为

$$x' = x * S_x, y' = y * S_y \quad (7)$$

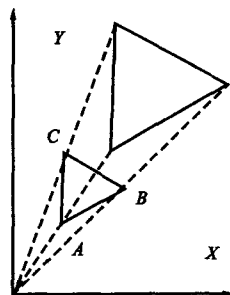


图 3 二维比例变换图

简写为 $P' = P \cdot T$ 。如果对图形点集中的每一个点都按式(7)中进行变换,就可实现对图形的比例变换。

若是相对于原坐标原点的比例变换,从图 3 中可以看到,图形对象的大小和位置都发生了变化。若取变换时位置不动的点作为原点构建一个新坐标系,在新坐标系中进行比例变换便可以保证图形对象在原坐标系中的位置不变。如图 4 所示,假设以点 A 作为原点的话,则 A 点坐标为 $(0, 0)$ 则无论比例因子为多少, A 点的位置都不会改变而只是改变图形的大小。

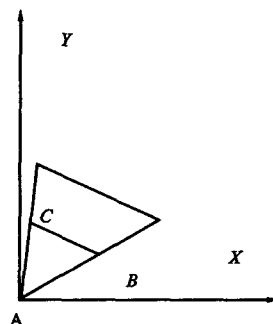


图 4 改变坐标系后的比例变换

5 可直观交互的降噪处理方案

个别采样数据失效会造成拟合曲线跳动或不正常变化的现象,依据数字采样信号出现异常的特点,从待降噪控制点集合中计算出最佳降噪控制点,使用鼠标拖动该控制点来带动其周围的临近采样点按照合理的幅度进行降噪,在高效降噪的同时保证了曲线的光滑,更加准确地反应了模拟信号所代表的物理意义。

图 5 中是需要降噪的一段拟合曲线, P 点是计算出的最佳降噪控制点,要对 P 点及其周围的临近采样点进行降噪达到图 5 中 P' 点所在位置的效果。

设需要降噪的有 n 个采样点(曲线上圆点所示),坐标标记为 $(px_i, py_i) (i = 1 \cdots n)$.

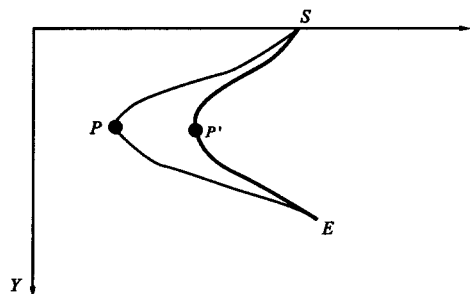


图5 拟合曲线中的异常点

由于可以通过鼠标事件获得鼠标所在位置的坐标,所以用户使用鼠标水平拖动点 P 到点 $P'(px', py')$,便可以获得 px', py' 的值.将降噪后曲线上点的坐标标记为 $(px'_i, py'_i) (i = 0 \cdots n)$,那么如何求出这些点的坐标呢?

首先,以过 P 点的水平线将待降噪曲线分为上下两部分,并建立分别以上端点 $S(x_1, y_1)$,下端点 $E(x_2, y_2)$ 为原点的新坐标系 XOY 和 $X'O'Y'$,分别在两个坐标系中对上下两部分曲线段进行求解.下面以上半部分为例进行计算(下半部分的求解与上半部分方法相同).

通过分析问题,可以看出这是二维图形在改变的坐标系 XOY 和 $X'O'Y'$ 中的一种比例变换,比例系数 $Sy = 1, Sx$ 可以通过 P 与 P' 两点的坐标值求得.新坐标系建立如图6所示.

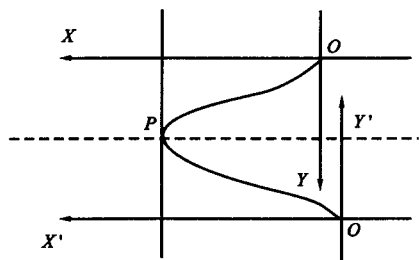


图6 新坐标系的建立

图7中直观显示出一些关键点在原始坐标系中的坐标位置. P' 点和 P 点的坐标是已知的.依据式(7)知 $x_1 - px' = Sx * (x_1 - px)$,则

$$Sx = \frac{x_1 - px'}{x_1 - px} \quad (8)$$

比例系数 Sx 求得后,根据二维图形的比例变换原理,可以通过式(7)求得降噪后的点坐标为

$$\begin{aligned} px'_i &= x_1 - Sx * (x_1 - px_i) \\ py'_i &= py_i \quad (i = 0 \cdots n) \end{aligned} \quad (9)$$

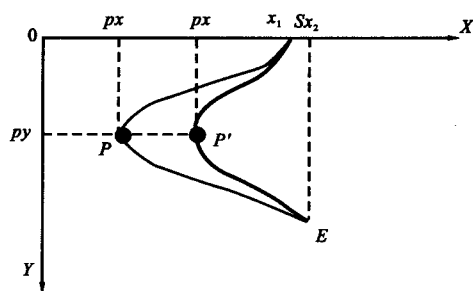


图7 关键点的坐标定义

6 结束语

综上所述,本文所提出的基于 Bezier 样条插值的采样数据光滑曲线拟合方法很好的解决了计算机辅助测试中数字采样信号向模拟信号转化时出现的拟合失真现象,该方法可以使拟合曲线具有良好的几何性质,简洁、完美地将采样数据拟合光滑自由曲线,更加准确真实地还原模拟信号.采用友好和直观的交互方式对个别采样数据失效进行降噪处理,通过对最佳降噪控制点并带动临近采样点达到合理的降噪效果,在高效去除噪声的同时,更加准确地反映了模拟信号所代表的物理意义.将该方法应用于基于 WPF 的 MVVM 模式设计的测井数据处理系统的预处理中,不仅实现了 WPF 的视觉效果,也取得了很好的成效.

参考文献:

- [1] Hartmut Prautzsch, Wolfgang Boehm, Marco Paluszny. Bezier and B-spline techniques[M]. Berlin: Springer, 2002.
- [2] Wolfgang Boehm. Generating the bezier points of B-spline curves and surfaces[J]. Computer - Aided Design, 1981, 13(6): 113 - 122.
- [3] Helmut Pottmann, Gerald Farin. Developable rational Bézier and B-spline surfaces[J]. Computer Aided Geometric Design, 1995, 12(5): 513 - 531.
- [4] 檀结庆,王燕,李志明.三次 H-Bezier 曲线的分割、拼接及其应用[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2009(5): 640 - 643.

作者简介:

刘丽丽 女, (1982-), 硕士研究生. 研究方向为数据库系统及应用、软件工程.

陈明 男, (1949-), 博士生导师, 教授. 研究方向为分布式计算、并行计算、云计算.

路游 男, (1957-), 博士后, 副教授. 研究方向为图形与图像处理、计算智能及应用.