

广义 Voronoi 图的快速生成算法

焦立男¹, 孙朝云¹, 沙爱民², 唐 威³, 杨小军¹

(1 长安大学 信息工程学院, 陕西 西安 710064; 2 长安大学 公路学院, 陕西 西安 710064;

3 西安微电子技术研究所, 陕西 西安 710054)

摘 要: 广义 Voronoi 图(GVD)的生成可以分为直接法和近似法. 利用 VDC(Van Der Corput)采样序列, 结合了近似法, 设计了一种基于 VDC 采样序列的 GVD 生成算法. 该算法改进了一般生成 GVD 的近似方法, 使得点集的采样可以增量进行, 并且精度可控, 提高了现有 GVD 生成算法的性能.

关键词: Voronoi 图; GVD; VDC; 采样序列

中图分类号: TP391.41

文献标识码: A

文章编号: 1000-7180(2010)12-0034-03

A GVD Algorithm Based on VDC Sampling Sequence

JIAO Li-nan¹, SUN Zhao-yun¹, SHA Ai-min², TANG Wei³, YANG Xiao-jun¹

(1 College of Information Engineering, Chang'an University, Xi'an 710064, China;

2 College of Highway, Chang'an University, Xi'an 710064, China;

3 Xi'an Microelectronic Technology Institute, Xi'an 710054, China)

Abstract: The method of figuring out Generalized Voronoi Diagram (GVD) can be categorized into direct and approximate methods. The paper combines VDC (Van Der Corput) sampling sequence and approximate method to design a GVD algorithm based on VDC sampling sequence. The algorithm improves common approximate GVD algorithm, sampling process is incremental and precision is controllable, thus current GVD algorithm performance is enhanced.

Key words: Voronoi Diagram; GVD; VDC; sampling sequence

1 引言

Voronoi 图(Voronoi Diagram)作为一种通用的几何结构,在物理学、天文学、地理信息系统、计算机图形学、图像处理、机器人学等众多领域都有着广泛应用^[1].

Voronoi 图的历史可以追溯到 19 世纪中期,在机器人学方面的应用至今仍频频出现^[2]. 在机器人运动规划中,障碍物不能用质点来表示,基点变为线段、多边形或多面体,此时的 Voronoi 图称为一般或广义 Voronoi 图(Generalized Voronoi Diagram, GVD)^[3],GVD 正好表示了 Voronoi 划分区域之间

的拓扑连通关系. 因此研究 GVD 的快速计算有很广泛的理论和应用意义.

GVD 的构建分为直接法与近似法. 直接法直接计算组成 Voronoi 边的线段和曲线,曲线边的计算复杂而且往往一种算法只能用于特定的简单环境,因此绝大多数的方法都是近似法. 文献[4]首先用一组点集逼近多边形的边界,计算出这些点集的普通 Voronoi 图,然后移去多余的 Voronoi 边和点. 文献[5]也采用了这种点集逼近的方法,但是提出了用点近似 Voronoi 图与被近似的一般 Voronoi 图中对应 Voronoi 边所围区域的面积来衡量近似程度的观点,分析了影响近似效果的因素,用这个近似程度来

收稿日期: 2009-12-13; **修回日期:** 2010-02-26

基金项目: 中国博士后科学基金面上项目(20100471589);国家自然科学基金项目(60975028);西部交通建设科技项目(200831881264)

控制精度,选择采样点的数量.

这两种通用方法,精度可随着采样点的增加而增加,因此经常被采用.但是由于要么采用了直接对几何边均分获得采样点的方法,要么直接在以前的采样点之间添加新采样点,每一次提高精度,前者必须重新计算采样点,后者则无法保证采样的均匀性,因此本文提出了一个有效的采样方法以提高采样的效率并保证采样的均匀性,并设计了一个 GVD 生成算法,实验结果证明可以有效提高算法效率.

2 VDC 采样序列

采样序列可以定义为一个点集族,这个序列应该具有这样一个我们期望的性质:对于在一个空间上的无限采样序列,序列最终应该到达空间的每一个点.对于在多边形线段边界上采样,这个性质实际是不可能的,因为一个线段可以映射于闭区间 $[0, 1]$,而区间 $[0, 1]$ 中的实数点是无限不可数的^[6].但是一个序列任意的逼近空间中每个点是可能的.在拓扑空间中就是稠密这个概念:设 U 和 V 是拓扑空间中的集合,假如 U 的闭包 $cl(U) = V$, U 称为在 V 中是稠密的.采样序列的集合如果是稠密的,那么称序列是稠密的.另一个期望的性质是均匀性,直观上解释,采样点应该尽量全面地代表被采样空间,如果采样点分布得越均匀,就越能代表被采样的空间.

对于 $[0, 1]$,任何分子是1的分数序列是它的子集,满足稠密的定义,因此我们可以用分数序列逼近它上面的点,再映射到被采样的线段上对应的采样点.因此根据设定的采样点数量对 $[0, 1]$ 均分就可以产生一个分数集合,不同数量就产生了一个不同精度的采样序列,并且它们都是很均匀分布的.这种简单的采样虽然直观并且均匀性好,但是每当需要增加采样点提高精度,所有的采样点位置都必须重新计算,如果旧采样点位置保持不变,只是新增加采样点的话,势必又会破坏均匀性.为了解决这个问题,我们采用了荷兰数学家 Van Der Corput 提出的一种采样序列^[7],以下简称为 VDC 序列.

为了解释 VDC 序列,假设在 $[0, 1]$ 放置 16 个采样点,最容易的均分产生点集 $S = \{i/16 | 0 \leq i < 16\}$,点之间间隔为均匀的长度 $1/16$.对于如何把它变成一个序列,并且在采样点数量增加和减少的同时保持一定的均匀性,表 1 显示了 VDC 如何做到这点.开始的两列是一种简单采样方法,按值的增加排序将 S 转换成一个序列,问题是在 i 小于 8 时,有一半的空间被忽略, i 变化时难以保证采样的均匀性.当

序列用二进制数表示时,VDC 序列用反转二进制位顺序的方法解决了这个问题.在原始序列中,最高位仅仅变化一次,而最低位每一步都变化,反转后最高位每一步都在变化,这表示序列的新采样点总是在区间的上半部分和下半部分交替取样.表 1 的第 3 和 4 列显示了原始的和反转后的二进制数表示.最后一列展示了每一次新增加的采样点 $v(i)$ (黑点)优雅的在区间中移动.

表 1 VDC 序列

i	原始序列	二进制	反转的二进制	VDA 序列	$[0,1]$ 中的点
1	0	.0000	.0000	0	●
2	1/16	.0001	.1000	1/2	●
3	1/8	.0010	.0100	1/4	○
4	3/16	.0011	.1100	3/4	○
5	1/4	.0100	.0010	1/8	○
6	5/16	.0101	.1010	5/8	○
7	3/8	.0110	.0110	3/8	○
8	7/16	.0111	.1110	7/8	○
9	1/2	.1000	.000	1/16	●
10	9/16	.1001	.1001	9/16	○
11	5/8	.1010	.0101	5/16	○
12	11/16	.1011	.1101	13/16	○
13	3/4	.1100	.0011	3/16	○
14	13/16	.1101	.1011	13/16	○
15	7/8	.1110	.0111	7/16	○
16	15/16	.1111	.1111	15/16	○

和原始序列比较,VDC 序列中 $v(i)$ 总是远离 $v(i+1)$,更进一步,任何一个 i 个点的序列总是比较合理地均匀分布在区间中.当 i 是 2 的幂时,分布最为均匀,对于其他的 i ,任何长度间隔 l 内包含的点数都近似为 $i \times l$,仍然具有较好的均匀性.例如 $i=10$ 时,任何长度为 $1/2$ 的间隔总是近似包含 5 个采样点.使用 VDC 序列,在产生 GVD 时,控制精度更加方便,并且由于优良的均匀性,性能也可以得到改善.基于 VDC 序列的 GVD 计算结果如图 1 所示.采样数为 230 和 440 的计算结果如图 2 所示.

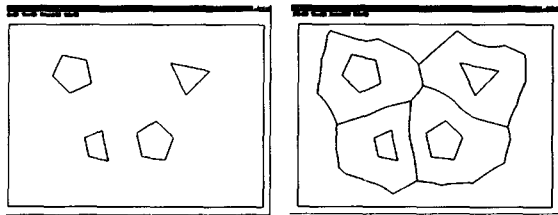


图 1 基于 VDC 序列的 GVD 计算结果

3 基于 VDC 序列的 GVD

对于如何判断近似 GVD 的精度,文献[5]用对应 Voronoi 边所围成的区域面积的接近程度来衡量

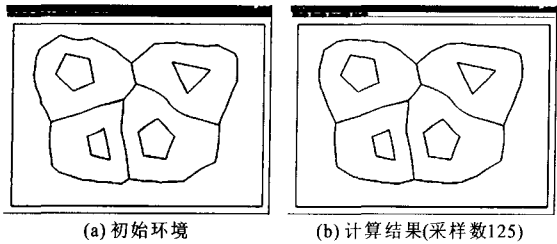


图 2 采样数为 230 和 440 的计算结果

近似程度的高低,但是该方法中,需要选取一个近似对象以外的母点,该母点如何选取以及对结果有何影响作者并未提出有效的方法,因此该方法的实际应用效果并不好. GVD 的近似计算实际是一个逼近 GVD 的过程,而精确的 GVD 其长度是一定的,因此近似 GVD 的长度可以作为近似程度的衡量. 结合上述 VDC 采样序列,我们设计了一个计算 GVD 的算法,如下:

基于 VDC 的 GVD 近似算法

- (1) 设置每个线段初始采样点的数量;
- (2) 用函数 $VDC(n)$ 计算每个线段上采样点位置;
- (3) 用 Fortune 算法计算 Voronoi 图;
- (4) 删除 Voronoi 图中同一对象的采样点所产生的边和顶点,剩余边即为 GVD;
- (5) 增加采样数量,重复(2)~(4),产生新的当前 GVD;
- (6) 比较当前 GVD 与上一个 GVD 边总长的差异,假如差值小于预先设定的精度值,当前 GVD 即为所求结果,继续下一步,否则转到(5);
- (7) 结束

(1)中,采样点的设置是首先选取障碍多边形中任意一个线段为参考线段,设置采样点数后,其他的线段则按照长度比例设置采样点的数量. (2)中, $VDC(n)$ 是反转字节的函数,将计算出的数值从 $[0, 1]$ 区间按比例映射到需采样的线段上即可得到采样点的坐标, n 最大为该线段的采样数,时间复杂性是线性的. (3)中的 Fortune 算法是一个经典的平面扫描算法,可以在 $O(n \log(n))$ 的时间内构造出整个 Voronoi 图. (4)中只要对所有的 Voronoi 边遍历一遍即可得到,时间复杂性是线性的. 设定精度后,计算 Voronoi 图的次数是常数,因此整个算法的时间复杂性维持在 $O(n \log(n))$. 与其他算法相比,VDC 采样序列使得产生的 GVD 从均匀性上来说更接近实际 GVD,而且采样点可以增量的添加,操控性能良好. 图 1 右边是左边计算后的结果,总采样数为

125,图 2 是另外两个结果,其右侧图已经达到精度要求. 从这些图可以看出随着采样精度的增加,近似 GVD 越来越接近精确的曲线 GVD.

4 实验与分析

对简单采样法和 VDC 采样,我们分别进行了 GVD 的计算,VDC 方式用 VDC 序列增量计算采样点位置,普通采样方式将采样线段均分后计算采样点位置,由于采样都是线性的,也都采用了 Fortune 算法计算 Voronoi 图,所以理论的时间平均复杂性都是 $O(n \log(n))$,但是 VDC 采样可以从技巧上节省不少时间. 实际计算结果如表 2 所示,其中的采样数指参考线段的采样数. 将表 2 中的结果绘制为折线图(图 3)可以清楚地看出 VDC 一定程度上节省的计算时间,这是由于每次采样数增加时,VDC 只是计算新增加的采样点,而普通采样每次所有的采样点都需要重新计算.

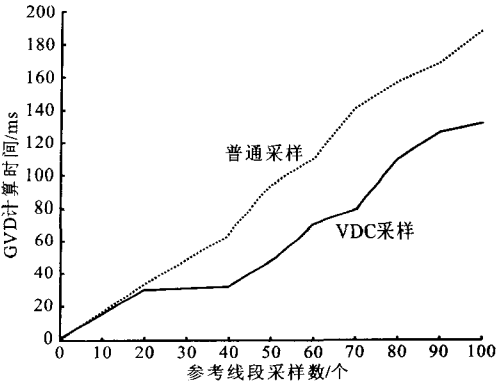


图 3 普通采样与 VDC 采样计算 GVD 的时间复杂性比较

表 2 两种采样方式计算 GVD 的结果 ms		
采样数/个	VDC 采样	普通采样
10	15.4	15.4
20	30.6	31.1
30	30.9	47
40	32	63
50	46.9	78.9
60	69.8	94
70	79.3	110.3
80	109.7	156
90	125.9	171.9
100	131.8	203.7

5 结束语

本文对计算几何中 Voronoi 图的扩展形式—GVD 的计算进行了探讨,针对近似法生成 GVD 中
(下转第 41 页)

踪和补偿。

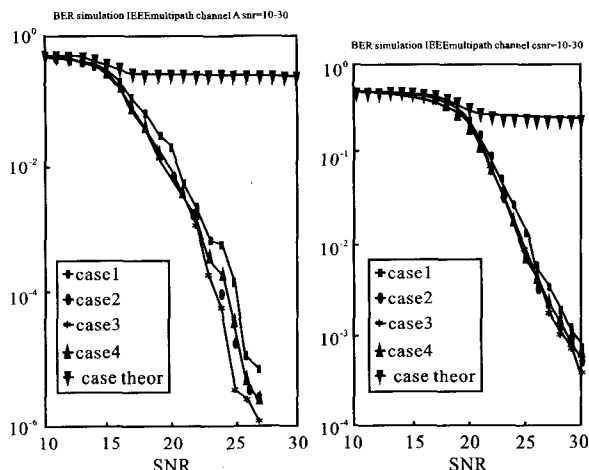


图7 不同跟踪方法的误码率

参考文献:

- [1] Jeil Jo, Kim Hyung Woo. Residual frequency offset compensation for 802.11a[J]. IEEE, 2004, 42(10): 2908—2914.
- [2] Choong Li Yeh, Dong Seung Kwon, Whan Woo Kim. An efficient channel tracker using pilots in OFDM systems[J]. IEEE Transactions on Personal Indoor and Mobile Radio Communications, 2003(9):241—244.
- [3] Zhao Minjian, Huang Aiping, Zhang Zhaoyang. ALL digital tracking loop for OFDM symbol timing[C]// 2003 IEEE 58th Vehicular Technology Conference. Or-

lando: IEEE, 2003.

- [4] Tseng Wei Hsiang Chang Ching chi, Wang Chornng kuang. Digital VLSI OFDM transceiver architecture for wireless SoC design[C]// IEEE International Symposium Arcuits and Systems. Kobe: IEEE, 2005: 5794—5797.
- [5] The Institute of Electrical and Electronic Engineers. IEEE802.11n/D4.00 Wireless LAN medium access control(MAC) and physical layer(PHY) specifications; Amendment 4; enhancements for higher throughput[S]. New York: IEEE, 2008.
- [6] Speth M, Fechtel S A, Fock G, et al. Optimum receiver design for wireless broad-band systems using OFDM-part I[J]. IEEE Transactions on Communications, 1999, 47(11):1668—1676.
- [7] IEEE. IEEE Std. 802.2004.11-03/040r4 TGn Channel Models[S/OL]. [2009-08-01]. <http://www.ieee802.org/11/DocFiles/03/11-03-0940-04-000n-tgn-channel-models.doc>.

作者简介:

吴斌 男,(1976—),副研究员.研究方向为宽带通信信号处理、宽带通信 SOC 体系架构、实时信号处理 VLSI 体系架构。

周玉梅 女,(1962—),研究员,博士生导师.研究方向为深亚微米集成电路设计技术和低功耗设计技术。

(上接第 36 页)

的采样问题,使用了 VDC 采样序列改善了近似法生成 GVD 的性能,设计的算法精度可以调控,实际的时间复杂性比基于普通采样的方法有所提高,实验结果证明了算法的有效性。

参考文献:

- [1] Aurenhammer F. Voronoi diagrams—a survey of a fundamental data structure[J]. ACM Computing Surveys, 1991, 23: 345—405.
- [2] Ji Yeong Lee, Howie Choset. Sensor-based exploration for convex bodies: A new roadmap for a convex-shaped robot[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2005, 21(2): 240—247.
- [3] Takahashi O, Schilling R J. Motion planning in a plane using generalized voronoi diagrams[J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1989, 5(2):143—150.
- [4] Sugihara K. Approximation of generalized voronoi diagrams by ordinary voronoi diagrams [J]. CVGIP:

Graphical Models and Image Process, 1993, 55(6):522—531.

- [5] 张有会, 浅野哲夫, 小保方幸次. 关于一般图形 Voronoi 图的近似构造法的研究[J]. 数值计算与计算机应用, 2002, 9(3):216—225.
- [6] 葛显良. 应用泛函分析 [M]. 2 版. 杭州:浙江大学出版社, 1998.
- [7] Van Der J G Corput. Verteilungsfunktionen I[J]. Akademie van Wetenschappen, 1935(38):813—821.

作者简介:

焦立男 男,博士,讲师.研究方向为图像处理、机器视觉、模式识别、运动规划。

孙朝云 女,博士,教授.研究方向为计算机测控技术、数字图像处理。

沙爱民 男,博士,教授.研究方向为道路与铁道工程。

唐威 男,博士,高级工程师.研究方向为 VLSI 设计。

杨小军 男,博士,副教授.研究方向为传感器网络。