

新的分数阶混沌系统及其同步控制

王 慧¹, 白晨希²

(1 河南大学 图书馆, 河南 开封 457004; 2 河南大学 计算中心, 河南 开封 457004)

摘 要: 研究了一个新的分数阶系统的混沌动力学行为. 基于分数阶微积分理论和数值模拟, 发现在该新的分数阶系统中存在混沌, 并且得出该分数阶系统能产生混沌吸引子的最低阶数为 2.49 阶. 根据分数阶动力系统稳定性理论, 通过设计非线性控制器, 实现了新的分数阶混沌系统的投影同步, 该方法设计简便, 并且不需要计算 Lyapunov 指数, 数值模拟结果验证了该同步方法的有效性.

关键词: 分数阶系统; 混沌; 同步控制; 投影同步

中图分类号: TP301.5

文献标识码: A

文章编号: 1000-7180(2011)01-0064-05

A New Fractional-order Chaotic System and Its Synchronization

WANG Hui¹, BAI Chen-xi²

(1 School of Computer & Information Engineering, Henan University, Kaifeng 475004, China;

2 Computing Center, Henan University, Kaifeng 475004, China)

Abstract: The chaotic behaviors in a new fractional-order system are investigated in this paper. By applying the fractional calculus theory and computer simulations, it is found that chaos does exist in the new fractional-order three-dimensional system with order less than 3. The lowest order to yield chaos in this system is 2.49. Further, based on the stability theory of the fractional-order system, projective synchronization of the new fractional-order chaotic system through designing the suitable nonlinear controller is studied. The proposed scheme is rather simple and need not compute the conditional Lyapunov exponents. Numerical results are performed to verify the effectiveness of the proposed synchronization scheme.

Key words: the fractional-order system; chaos; chaotic synchronization; projective synchronization

1 引言

近十几年来, 分数阶微积分理论在松弛、振荡、湍流、控制等领域得到了广泛应用, 特别是近年来, 分数阶动力系统的混沌现象研究引起了人们的广泛兴趣, 人们在研究蔡氏电路^[1]、Chen 系统^[2]等混沌系统的过程中发现, 当混沌系统的阶数为分数时仍然出现混沌现象, 并且更能反映系统的工程物理现象, 从而促进了分数阶混沌系统的研究以及分数阶微积分理论的发展.

自从 1990 年 Pecora 和 Carroll 做出关于耦合混沌系统同步性质研究的开创性工作以来, 提出了

很多有效的混沌控制方法^[3]. 由于投影同步可以把二进制数扩展到 M 进制来实现通信信号的更快传输, 因此对此类同步现象的研究已成为混沌系统同步研究的一个新方向.

本文基于分数阶系统稳定性理论^[4], 通过设计非线性控制器, 实现了分数阶混沌系统完全状态投影同步, 该同步方法理论严格, 设计简单, 且无需计算系统的条件 Lyapunov 指数, 能够达到任意比例因子的完全状态同步. 数值仿真结果证实了该方法的有效性.

2 分数阶微分及近似算法

分数阶微分有多种定义^[5-6], 常用的是 Rie-

mann-Liouville 定义的分数阶微分和 Caputo 定义的分

数阶微分,本文采用 Caputo 定义的分

数阶微分,其数学表达式如下:

$$D^{\alpha}_{\tau} (y) = J^{m-\alpha} y^{(m)} (x) \quad (1)$$

式中, $m = [\alpha]$, 为第一个不小于 α 的整数, $y^{(m)}$ 为 y 的 m 阶导数, J^{β} 是阶 Riemann-Liouville 积分算子, 定义如下:

$$J^{\beta} \varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{(t-\tau)^{1-\beta}} d\tau. \quad (2)$$

目前, 实施分数阶微积分运算的求解方法有多种, 但常用的方法主要有波特图近似方法^[7] 和预估一校正算法^[2], 下面简单介绍本文利用的预估一校正方法, 即广义的 Adams - Bashforth - Moulton 方法, 考虑如下微分方程:

$$\begin{cases} \frac{d^{\alpha} x}{d\tau^{\alpha}} = f(t, x), 0 \leq t \leq T \\ x^{(k)}(0) = x_0^{(k)}, k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \end{cases} \quad (3)$$

与式(3)等价的 Volterra 积分方程为

$$x = \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} x_0^{(k)} \frac{t^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau, x)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \quad (4)$$

式(4)可离散化为

$$x_h(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} x_0^{(k)} \frac{t_{n+1}^k}{k!} + \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+2)} f(t_{n+1},$$

$$x_h^p(t_{n+1})) + \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+2)} \sum a_{j,n+1} f(t_j, x_h(t_j)),$$

式中,

$$x_h^p(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} x_0^{(k)} \frac{t_{n+1}^k}{k!} +$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} f(t_j, x_h(t_j)),$$

$$a_{j,n+1} =$$

$$\begin{cases} n^{\alpha+1} - (n-\alpha)(n+1)^{\alpha+1}, j=0 \\ (n-j+2)^{\alpha+1} + (n-j)^{\alpha+1} - 2(n-j+1)^{\alpha+1}, \\ 1 \leq j \leq n, b_{j,n+1} = \frac{h^{\alpha}}{\alpha} ((n-j+1)^{\alpha} - (n-j)^{\alpha}) \\ 1, j=n+1 \end{cases}$$

3 新的分数阶混沌系统

3.1 分数阶系统存在混沌的必要条件

分数阶线性系统的稳定性已经得到了深入的研究, 并且得到了分数阶线性系统稳定的充分必要条件^[8]. 考虑如下—类分数阶系统:

$$D^{\alpha} x = Ax, x(0) = x_0, \quad (5)$$

式中, $0 < \alpha \leq 1, x \in R^n, A \in R^{n \times n}$. 如果 $|\arg(\text{eig}(A))| > \alpha\pi/2$, 则分数阶系统(5)渐近稳定. 图1所示为线性分

数阶系统的稳定与不稳定区域分布.

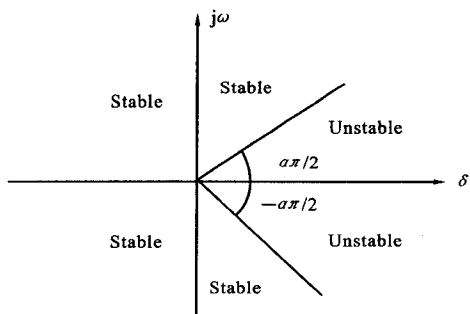


图1 线性分数阶系统的稳定与不稳定区域分布图

在非线性系统中, 鞍点可分为1类鞍点和2类鞍点. 1类鞍点指的是, 其中一个特征值处于不稳定区域, 而其他特征值均处于稳定区域; 2类鞍点指的是, 其中一个特征值处于稳定区域, 而其他两个特征值均处于不稳定区域. 在混沌系统中, 涡卷产生在2类鞍点周围, 而1类鞍点仅仅负责连接这些涡卷. 假设混沌系统 $\dot{x} = f(x)$ 有三个平衡点, 如果该系统有双涡卷吸引子, 则其中一个平衡点为1类鞍点, 其他平衡点为2类鞍点. 假设是其中一个2类鞍点的不稳定特征值, 则分数阶系统(5)存在混沌的必要条件是使得特征值处于不稳定区域, 即

$$\tan(\alpha\pi/2) > |\text{Im}(\lambda)| / \text{Re}(\lambda) \Rightarrow \alpha >$$

$$\frac{2}{\pi} \arctan(|\text{Im}(\lambda)| / \text{Re}(\lambda)), \quad (6)$$

式中, $\text{Im}(\lambda)$ 表示特征值 λ 的虚部, $\text{Re}(\lambda)$ 表示特征值 λ 的实部.

3.2 新的分数阶混沌系统动力学行为分析

文献[9]中提出了一个新的混沌动力学系统并用电路实现, 它由如下的三维自治方程组来描述:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y-x) \\ \dot{y} = bx + cy - xz \\ \dot{z} = x^2 - hz \end{cases} \quad (7)$$

式中, x, y, z 为状态变量, a, b 和 c 为系统的控制参数. 当参数 $a = 20, b = 14, c = 10.6$ 和 $h = 2.8$ 时, 系统(7)进入混沌状态, 图2所示为新系统(7)的混沌吸引子.

系统(7)的分数阶形式可用如下的三维自治微分方程组来描述:

$$\begin{cases} \frac{d^{\alpha} x}{dt^{\alpha}} = a(y-x) \\ \frac{d^{\alpha} y}{dt^{\alpha}} = bx + cy - xz, 0 < \alpha \leq 1, \\ \frac{d^{\alpha} z}{dt^{\alpha}} = x^2 - hz \end{cases} \quad (8)$$

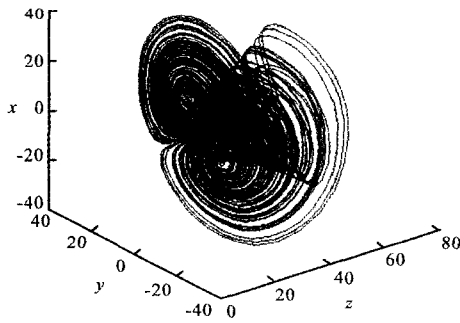


图2 新的混沌系统(7)的吸引子

令 $d^a x/dt^a = 0, d^a y/dt^a = 0, d^a z/dt^a = 0$, 可得系统(8)的平衡点为 $E_0(0, 0, 0), E_1(\sqrt{h(b+c)}, \sqrt{h(b+c)}, b+c)$ 和 $E_2(-\sqrt{h(b+c)}, -\sqrt{h(b+c)}, b+c)$. 当 $a = 20, b = 14, c = 10.6$ 和 $h = 2.8$ 时, 可求得分数阶系统(8)的三个平衡点分别为 $E_0(0, 0, 0), E_1(8.2994, 8.2994, 24.6)$ 和 $E_2(-8.2994, -8.2994, 24.6)$, 各平衡点的特征值分别为

$$E_0: \lambda_1 = -27.3736, \lambda_2 = 17.9736, \lambda_3 = -2.8;$$

$$E_1: \lambda_1 = -18.6839, \lambda_2 = 3.2419 + 11.7072i, \lambda_3 = 3.2419 - 11.7072i;$$

$$E_2: \lambda_1 = -18.6839, \lambda_2 = 3.2419 + 11.7072i, \lambda_3 = 3.2419 - 11.7072i.$$

显然, 平衡点 E_0 是 1 类鞍点, E_1, E_2 为 2 类鞍点. 根据不等式(6), 分数阶系统(8)中存在混沌的必要条件为 $\alpha > \frac{2}{\pi} \arctan(|\operatorname{Im}(\lambda_2)| / \operatorname{Re}(\lambda_2))$ 或 $\alpha > \frac{2}{\pi} \arctan(|\operatorname{Im}(\lambda_3)| / \operatorname{Re}(\lambda_3))$. 容易得到, $\alpha \approx 0.83$, 则分数阶系统(8)中存在混沌的最低阶数为 2.49.

在本文的所有数值模拟中, 我们都将利用预估-校正算法去求解分数阶微分方程. 图3给出了当分数阶 α 分别为 0.96、0.9、0.83、0.75 时, 分数阶系统(8)的相图. 由图3可看出, 当 $\alpha \geq 0.83$ 时, 分数阶系统(8)处于混沌状态.

4 分数阶混沌系统的同步

4.1 分数阶混沌同步设计

考虑如下—类分数阶混沌系统:

$$\frac{d^a x}{dt^a} = f(x) \quad (9)$$

式中, $x \in R^n$ 为状态变量, $f(x): R^n \rightarrow R^n$ 为光滑的非线性函数. 假定系统(9)为驱动系统, 引入控制器 $u: R^{2n} \rightarrow R^n$, 则响应系统可表示为

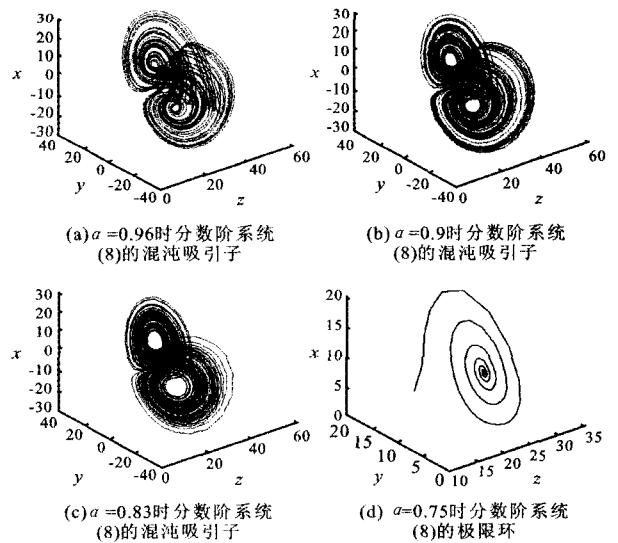


图3 分数阶系统(8)的相图

$$\frac{d^a y}{dt^a} = g(y) + u(x, y) \quad (10)$$

式中, $y \in R^n$ 为响应系统的状态变量, $g(y): R^n \rightarrow R^n$ 为关于 y 的光滑非线性函数, $u(0, 0) = 0$. 驱动系统(9)与响应系统(10)的同步误差定义为 $e = x - My$, 假设存在对角矩阵 $M = \operatorname{diag}\{\beta, \dots, \beta\}$ ($M \in R^{n \times n}, \beta \neq 0$). 对于任意的初始值 $x(0), y(0)$, 如果 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e\| = 0$ 成立, 则驱动系统(9)与响应系统(10)达到了投影同步.

基于以上分析, 我们研究新的分数阶混沌系统的投影同步. 令驱动系统为

$$\begin{cases} \frac{d^a x_1}{dt^a} = a(y_1 - x_1) \\ \frac{d^a y_1}{dt^a} = bx_1 + cy_1 - x_1 z_1 \\ \frac{d^a z_1}{dt^a} = x_1^2 - hz_1 \end{cases} \quad (11)$$

响应系统为

$$\begin{cases} \frac{d^a x_2}{dt^a} = a(y_2 - x_2) \\ \frac{d^a y_2}{dt^a} = bx_2 + cy_2 - x_2 z_2 + u_1 \\ \frac{d^a z_2}{dt^a} = x_2^2 - hz_2 + u_2 \end{cases} \quad (12)$$

这里 u_1, u_2 是非线性控制器, 可使得驱动系统(11)和响应系统(12)达到投影同步. 定义同步误差为 $e_1 = x_2 - \beta x_1, e_2 = y_2 - \beta y_1, e_3 = z_2 - \beta z_1$ (β 为投影同步比例因子). 根据式(11)和(12), 可得到如下误差系统:

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha e_1}{dt^\alpha} = -ae_1 + ae_2 \\ \frac{d^\alpha e_2}{dt^\alpha} = be_1 + ce_2 - x_2z_2 + \beta x_1z_1 + u_1 \\ \frac{d^\alpha e_3}{dt^\alpha} = -he_3 + x_2^2 - \beta x_1^2 + u_2 \end{cases} \quad (13)$$

根据分数阶动力系统稳定性理论,为获得驱动系统(11)和响应系统(12)的投影同步,必须使得误差系统(13)在原点渐近稳定,为此设计非线性控制器为

$$\begin{cases} u_1 = -be_1 - (c+1)e_2 + x_2z_2 - \beta x_1z_1 \\ u_2 = -x_2^2 + \beta x_1^2 \end{cases} \quad (14)$$

将式(14)代入式(13)可得

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha e_1}{dt^\alpha} = ae_1 + ae_2 \\ \frac{d^\alpha e_2}{dt^\alpha} = -e_2 \\ \frac{d^\alpha e_3}{dt^\alpha} = -he_3 \end{cases} \quad (15)$$

显然, $e_i = 0 (i = 1, 2, 3)$ 是误差系统(15)的平衡点. 令 J 为误差系统(15)在平衡点的 Jacobi 矩阵, 则有

$$J = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -h \end{bmatrix}.$$

由于 $|\arg(\lambda_i(J))| > 0.5\pi (i = 1, 2, 3)$, 根据分数阶动力系统稳定性理论可知, 平衡点 e_i 是误差系统(15)的渐近稳定平衡点, 故有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_i\| = 0 (i = 1, 2, 3)$ 成立, 即驱动系统(11)和响应系统(12)达到了投影同步.

4.2 数值模拟

采用预估-校正算法去求解方程(11)、(12)和(15), 选取系统参数 $a = 20, b = 14, c = 10.6$ 和 $h = 2.8$, 驱动系统(11)和响应系统(12)的初始值分别选取为 $(x_1(0), y_1(0), z_1(0)) = (-5, 2, -4)$, $(x_2(0), y_2(0), z_2(0)) = (4, 7, -3)$. 当 $\alpha = 0.9, \beta = 2$ 时, 利用非线性控制器(14), 驱动系统(11)和响应系统(12)可达到投影同步(图3). 图3(a)为驱动系统(11)和响应系统(12)的完全状态投影同步相图, 图3(b)所示为驱动系统(11)和响应系统(12)的同步误差图. 图4给出了当 $\alpha = 0.96, \beta = -0.5$ 时, 驱动系统(11)和响应系统(12)的投影同步模拟结果. 图4(a)所示为驱动系统(11)和响应系统(12)的反相位完全状态投影同步相图, 图4(b)所示为驱动系统(11)和响应系统(12)的同步误差.

为 $\alpha = 0.96, \beta = -0.5$ 时的同步相图与同步误差.

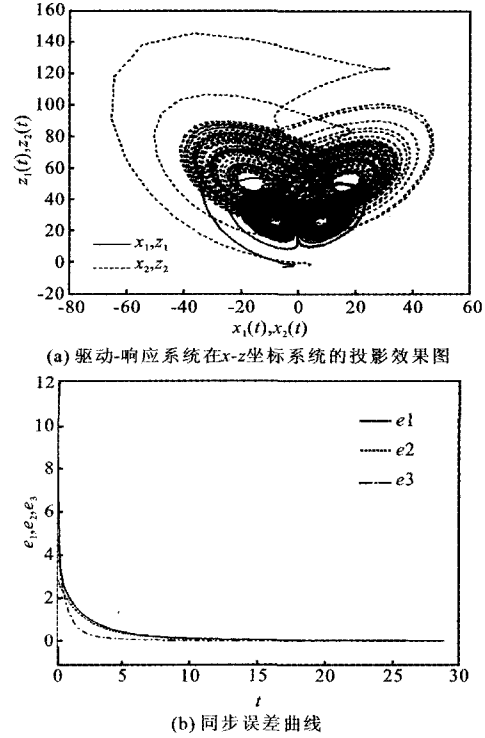


图 4 当 $\alpha = 0.9, \beta = 2$ 时驱动系统(11)和响应系统(12)投影同步模拟结果

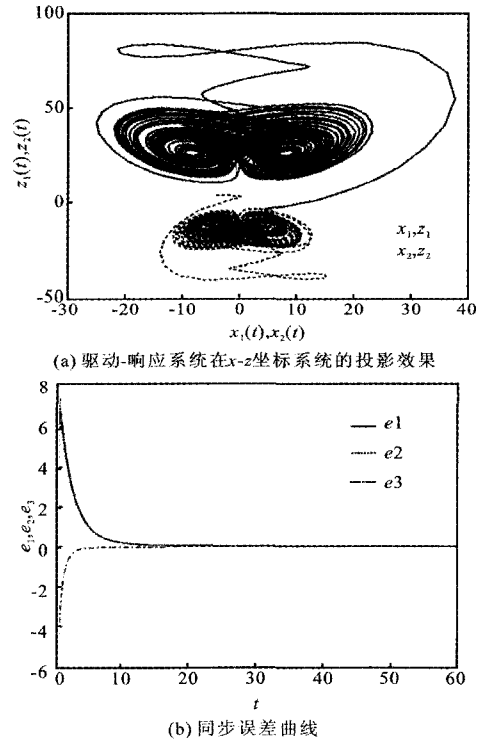


图 5 当 $\alpha = 0.96, \beta = -0.5$ 时驱动系统(11)和响应系统(12)投影同步模拟结果

5 结束语

基于分数阶微积分理论,研究了一个新的分数阶系统的混沌动力学特性.数值模拟证明该分数阶系统确实存在混沌,并且得出分数阶系统能产生混沌吸引子的最低阶数为 2.49 阶.基于分数阶系统稳定性理论,设计了非线性控制器,从而使得分数阶混沌系统达到混沌投影同步.该方法设计简便,不需要计算 Lyapunov 指数,数值仿真结果验证了该同步方法的有效性.

参考文献:

- [1] Hartley T T, Lorenzo C F, Qammer H K. Chaos in a fractional order Chua's system[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I, 1995, 42(8): 485-490.
- [2] Li C P, Peng G J. Chaos in Chen's system with a fractional order[J]. Chaos Solitons & Fractals, 2004, 22(2): 443-450.
- [3] 盛苏英,陆国平,吴新华.混沌同步新方法研究[J]. 微电子学与计算机, 2007, 24(5): 80-82.
- [4] Matignon D. Stability results of fractional differential e-

quations with applications to control processing[C]// IMACS. Lille: IEEE-SMC, 1996.

- [5] Hifer R. Applications of fractional calculus in physics [M]. New Jersey: World Scientific, 2001.
- [6] Podlubny I. Fractional differential equations[M]. New York: Academic Press, 1999.
- [7] Charef A, Sun H H, Tsao Y Y, et al. Fractal system as represented by singularity function [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1992, 37(9): 1465-1470.
- [8] Tavazoei M S, Haeri M. A necessary condition for double scroll attractor existence in fractional-order systems[J]. Physics Letters A, 2007, 367(1/2): 102-113.
- [9] 蔡国梁,谭振梅,周维怀,等.一个新的混沌系统的动力学分析及混沌控制[J]. 物理学报, 2007, 56(11): 6230-6237.

作者简介:

王 慧 女, (1981-), 硕士生. 研究方向为聚类分析、混沌控制.

白晨希 女, (1981-), 硕士生. 研究方向为 XML 安全性理论、混沌控制.

(上接第 63 页)

用来改进部分积产生电路,并对部分积压缩电路进行了关键路径优化,进一步降低了电路延迟和功耗.所采用的电路优化在对并行乘法器整体性能改进的同时,有效地降低了乘法器电路的功耗.为了进一步改善并行乘法器的性能、功耗和面积,下一步工作将从部分积产生以及压缩树算法上对并行乘法器结构进行优化改进.

参考文献:

- [1] Young E K, Yoon J O, Cho K J, et al. Efficient design of modified Booth multipliers for predetermined coefficients[C]// ISCAS 2006. Island of Kos: IEEE, 2006. 2717-2720.
- [2] Kang J, Gaudiot J. A simple high-speed multiplier design[J]. IEEE Transactions on Computers, 2006, 55(10): 1253-1258.
- [3] Strollo A G M, De Caro D. Booth folding encoding for high performance squarer circuits[J]. IEEE Transac-

tions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing, 2003, 50(5): 250-254.

- [4] Kuang S, Wang J, Guo C. Modified booth multipliers with a regular partial product array[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2009, 56(5): 404-408.
- [5] Sahoo S K, Shekhar C. Design and analysis of a compact fast parallel multiplier for high speed DSP applications using novel partial product generator and 4:2 compressor[J]. International Journal of Electronics, 2008, 95(1/2): 139-157.
- [6] Goto G, Inoue A, Ohe R, et al. A 4.1-ns compact 5454-b multiplier utilizing sign-select Booth encoders[J]. IEEE Journal of Solid-state Circuits, 1997, 32(11): 1676-1682.
- [7] Yeh W, Jen C. High-speed Booth encoded parallel multiplier design[J]. IEEE Transactions on Computers, 2000, 49(7): 692-701.