

Logistic 二维多峰曲线现象研究

张洪斌,程 乐,徐义晗

(淮安信息职业技术学院 计算机科学与工程系,江苏 淮安 223003)

摘 要: 通过研究 Logistic 混沌映射动力系统性态特征,发现由 Logistic 混沌序列值通过固定间隔标记的二维空间中的点,具有沿某种“规律多峰曲线”随机分布的现象,即形成“Logistic 多峰曲线图象”(Logistic Multi-Peak Curves Image). 针对这一现象展开深入研究,得到了一系列关于“Logistic 多峰曲线”(Logistic Multi-Peak Curves)的性态特征和 Logistic 混沌序列值标记的二维点在其上分布的特性. 得到如下规律:Logistic 多峰曲线图象在保留了 Logistic 动力系统遍历性、伪随机性的同时,还具有自身可控性、稳定性和对称性等特性.

关键词: Logistic 混沌映射;Logistic 混沌序列;Logistic 多峰曲线;Logistic 多峰曲线图象

中图分类号: TN914. 42

文献标识码: A

文章编号: 1000-7180(2011)05-0053-05

Research on the Phenomenon of Logistic Two Dimension Multi-Peak Curves

ZHANG Hong-bin, CHENG Le, XU Yi-han

(Department of Computer Science and Engineering, Huaian College of Information Technology, Huaian 223003, China)

Abstract: By studying the behavior of Logistic map, it has been found that the points which have been located by Logistic Chaotic Series will distribute on some kinds of law curve. This paper summarizes a series of properties on the Phenomenon and characteristics of Logistic Multi-Peak Curves. This paper proves that Logistic Multi Peak Curves Image has ergodicity, pseudo-randomness, controllability, stability and symmetry and so on.

Key words: Logistic map; Logistic Chaotic Series; Logistic Multi-Peak Curves; Logistic Multi Peak Curves Image

1 引言

混沌理论是一门研究奇异函数和奇异图形的数学理论,是一门研究自然界有序和无序规律的科学. 当在确定性的系统中出现类似随机的过程则称之为“混沌”(Chaos). Logistic 混沌映射由 May 提出,发表于“Nature”杂志^[1],影响巨大. 此后 Feigenbaum 通过研究发现 Logistic 映射是通过倍周期分岔到达混沌的^[2],此项研究结论在 Logistic 映射的自身动力系统性态研究中具有重大意义,产生深远影响. 由于 Logistic 混沌映射具有参数敏感性、难预测性、伪随机性和遍历性等特性,因此在现代网络通信、信息安全、图形图像、优化算法、生态学等领域均有着广泛的应用^[3-7]. 例如,1989 年 Robert Matthews 在

Logistic 映射的变形基础上给出了用于加密的伪随机序列生成函数^[8],由此混沌密码学及混沌密码分析得到了迅速的发展和广泛的应用. 此外,2004 年朱中梁等人提出一种利用 Logistic 映射产生混沌跳频序列的新方法,推动了混沌跳频序列领域的研究^[9]. 同样,Logistic 混沌映射也被广泛的应用于优化算法领域,如 2008 年提出的蚁群算法(Ant Colony Optimization, ACO)的改进算法:NFCACO(new fast continuou ant colony optimization algorithm, NFCACO)算法,该算法采取利用 Logistic 混沌序列确定侦察蚁的初始位置,然后由侦察蚁与觅食蚁的相互协作在解空间进行全局大视域快速搜索的方法求解^[10]. NFCACO 算法为 ACO 算法应用于连续域问题进行了积极的探索,并取得了很好的效果.

收稿日期: 2010-06-16; **修回日期:** 2010-09-02

基金项目: 国家自然科学基金项目(70671025)、江苏省自然科学基金项目(SBK200921319)

综上所述, Logistic 混沌映射的应用促进了诸多领域的发展, 对其展开研究无论在科研还是在工程领域都具有重要的现实意义. 为此, 文中在总结了相关学者对 Logistic 混沌映射倍周期、分叉、初值敏感性等特性研究结论的基础上, 深入研究了该混沌系统映射值之间的规律性联系, 由此发现了 Logistic 多峰曲线(Logistic Multi Peak Curves)现象, 并得出其相关特性. 文中深入研究了 Logistic 混沌序列值标记的二维空间中的点在 Logistic 多峰曲线上分布的动力学性态特征. 并得出: Logistic 多峰曲线图像除了保留 Logistic 混沌映射的伪随机性和遍历性的同时, 更具有自身特有的可控性和稳定性等特性.

2 Logistic 混沌映射主要特性

2.1 Logistic 混沌映射的参数限定

Logistic 混沌映射的可以用一个简单的差分方程表示如下:

$$x_{n+1} = \mu \cdot x_n \cdot (1 - x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1)$$

式中, μ 为 Logistic 参数, 实验证明: 当 $\mu \in (3.569\ 945\ 6, 4)$ 并且 $x_0 \in (0, 1)$ 时, Logistic 生成的混沌序列将呈现一种为随机的分布状态, 其值遍历于 $(0, 1)$ 区间. 当 μ 和初值 x_0 满足 $\mu = 3.999$, $x_0 = 0.5$ 时, 迭代 400 次其混沌序列分布状态如图 1 所示.

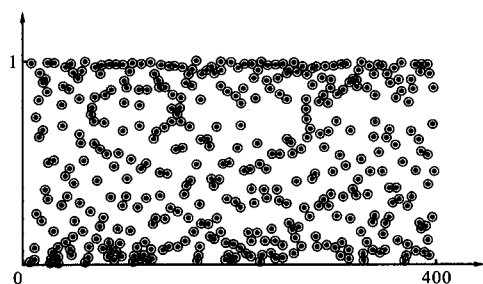


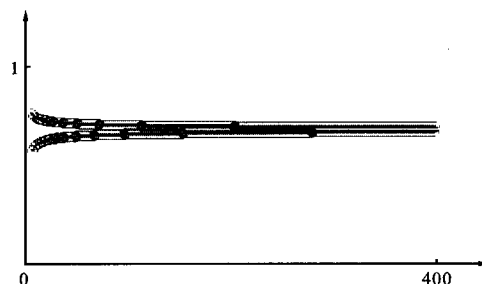
图 1 $\mu = 3.999$, $x_0 = 0.5$,
在 400 次迭代的混沌序列分布

当 μ 和 x_0 取值在其他范围时, 混沌序列或收敛于某一值, 或为随机性和遍历性较差. 如图 2 参数取值分别是: $\mu = 3$, $x_0 = 0.5$; $\mu = 3.999$, $x_0 = 1$ 时, (a)、(b) 迭代同为 400 次.

2.2 倍周期及分叉性

纵轴表示 x_n 的取值, 横轴表示 μ 的取值, $x_0 = 0.6$, μ 从 1 递增至 4, 每次增加 0.01, μ 每取值一次, 程序迭代 400 次, 即计算出每个 μ 值对应的 $x_1 \sim x_{400}$. 实验结果如图 3 所示.

根据图 3 实验分析, 可得出如下结论:



(a)



(b)

图 2 $\mu \notin (3.5699456, 4)$ 或
 $x_0 \notin (0, 1)$ 沌序列分布状态

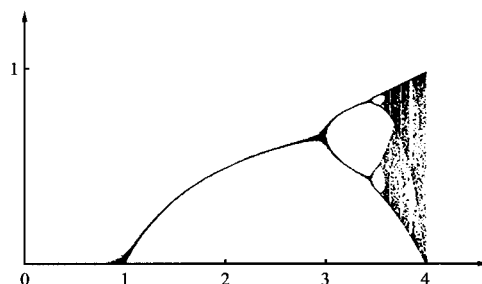


图 3 μ 遍历 $[0, 4]$ 的 logistics 混沌序列分布

(1) μ 取值越接近 4 的时候, 其混沌序列的遍历性和伪随机性越明显.

(2) 仔细观察图 3 可以发现, 当 $\mu \geq 3$ 时, 得到的混沌序列值一分为二, 进一步研究可知, 其本质是对应着周期为 2 的解, 随着 μ 增加, 周期数将加倍, 迭代值周而复始地在有限个周期轨道之间重复, 从而进入 2^n ($n = 1, 2, 3, \dots$) 的倍周期分岔 (Bifurcation) 区, 进而进入多片混沌区.

(3) 当 $\mu = 4$ 时, 混沌序列值进入单片混沌区, 周期为任意整数的解都存在, 且不稳定. 当 μ 逐渐小于 4 时, 出现混沌区的倒分岔行为.

(4) 混沌区有些空白的窗口, 最大的窗口是周期 3 窗口. 它出现在 $\mu = 3.828$ 的地方. 周期 3 窗口附近还有周期为 7, 9, $\dots$ 等窗口, 在混沌的 2 带区则有 $2 \times 3, 2 \times 5, 2 \times 7, \dots$ 等周期窗口; 在 $2n$ 带区中有 $2n \times 3, 2n \times 5, 2n \times 7, \dots$ 等周期窗口.

2.3 初值敏感性

Logistic 混沌映射的初值敏感性是指无论是 μ 或者 x_0 取值的微小变化,对得到的混沌序列都将产生很大影响,类似于“蝴蝶效应”(Butterfly Effect).

如图 4 所示的实验,两个 Logistic 混沌映射 μ 值相同: $\mu = 3.999$, x_0 取值分别为 0.123 450 00 和 0.123 450 01. 图 4 展示的是两个序列差值图形(图 4 中的点标记了一个序列某次运算的迭代值减去另一个序列同次运算迭代值).

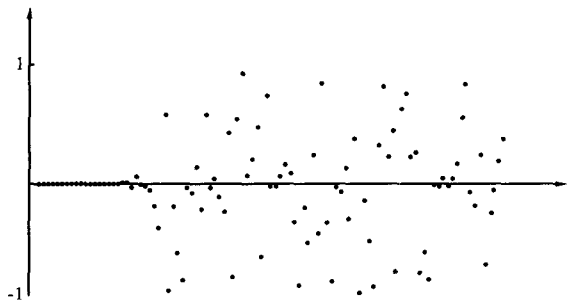


图 4 两个混沌序列的差值图形

由图 4 可以看出,在开始几次迭代中,两个混沌序列值相差并不很大,但随着迭代的增加值的差异越来越明显. 因此 Logistic 混沌系统具有很好的雪崩效应. 当使用 Logistic 混沌系统时,可以让系统先迭代一定次数之后,再使用生成的值,这样可以更好地掩盖原始的情况,使雪崩效应扩大,此方法具有更好的安全性.

3 Logistic 多峰曲线图像的动力系统性态

为了便于描述给出如下符号替代:

表 1 几种 Logistic 多峰曲线的参数设置

	τ_1			τ_8			τ_{64}		
	I	II	III	I	II	III	I	II	III
μ	3.999	3.999	3.999	3.999	3.999	3.999	3.999	3.999	3.999
x_0	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
δ	1	1	1	4	4	4	7	7	7
m	10	100	1 000	10	100	10 000	10	1 000	10 000

表 1 中每类曲线考察三次,每次取点数量依次增多,按表 1 参数设置生成仿真实验图像如图 5 所示.

观察图 5 可以发现,按一定的顺序间隔 δ 取 Logistic 混沌序列值作为点坐标,其点位置将分布在某种固定的、平滑的、规律的 Logistic 多峰曲线上.

(1) N : 正整数

(2) δ : Logistic 混沌序列值之间的顺序间隔,例如:点 (x_0, x_7) , 则 $\delta = 7, (\delta \in N)$;

(3) m : 生成 Logistic 多峰曲线图像所取的点的数量;

(4) τ : 峰顶密度. 即 Logistic 多峰曲线在 $x \in (0, 1)$ 区间上的峰顶数量,单峰曲线表示为 τ_1 , 双峰曲线表示为 τ_2 , n 个峰顶曲线表示为 τ_n ;

定义 1 Logistic 多峰曲线: 当式(1) 满足 2.1 节中的混沌条件时($\mu \in (3.569\ 945\ 6, 4)$, $x_0 \in (0, 1)$), 得到的混沌序列值按间隔 δ 定位的坐标点在二维空间中将严格按着某种规律的多峰曲线分布, 则此多峰曲线称为“Logistic 多峰曲线”.

定义 2 Logistic 多峰曲线图像: 分布于 Logistic 多峰曲线曲线上的, 由 Logistic 混沌序列值按间隔 δ 标记的点(点 $(x_\alpha, x_\beta) (\beta - \alpha = \delta)$), 所形成的几何图像.

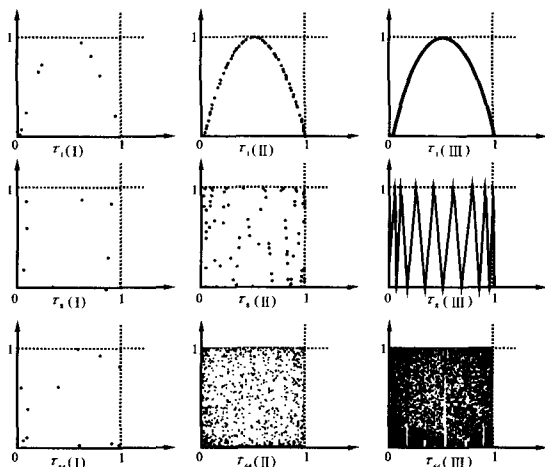
由定义 2 可知: Logistic 多峰曲线图像是由 Logistic 混沌映射值标记的二维空间中的离散点, 因此, Logistic 多峰曲线图像只是线性排列的点在 Logistic 多峰曲线上形成的图像, 而并非真正意义的连续曲线. 根据 2.1 节叙述可知 $x_\alpha, x_\beta \in (0, 1)$, 因此所有峰顶将出现在 $x \in (0, 1)$ 区间上.

选取单峰(τ_1)、8 峰(τ_8)、64 峰(τ_{64}) 的 Logistic 多峰曲线进行研究, 参数设置如表 1 所示.

3.1 Logistic 多峰曲线图象的可控性

观察图 5 可以发现, Logistic 多峰曲线峰顶数量 τ 具有一定的规律性. 通过 Logistic 混沌系统形态理论研究和大量实验数据分析, 文中得出 τ 与 Logistic 混沌序列值顺序间隔 δ 之间的关联规律:

定理 1 若 Logistic 多峰曲线由点 $(x_\alpha, x_\beta) (\beta - \alpha = \delta)$ 构成, 则峰顶密度 τ 可通过以下 4 得出:

图5 τ_1 、 τ_8 、 τ_{64} 的 Logistic 多峰曲线生成过程

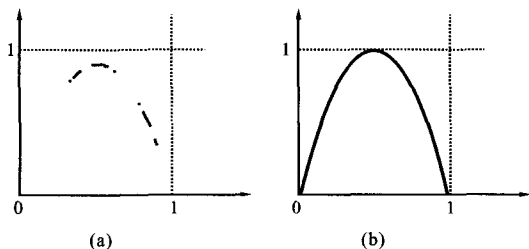
$$\delta = (\log_2 \tau) + 1 \quad (\tau = 2^n (n \in \mathbb{N})) \quad (2)$$

式(2)表明:通过控制 δ 的取值可以控制 τ 的规模. 并且 δ 与 τ 呈现对数阶数量级关系. 式(2)还可以理解为:当 Logistic 混沌序列取值点的间隔为 δ 时,由其标记的点将分布在峰顶数量为 $2^{\delta-1}$ 的 Logistic 多峰曲线上. 因此,Logistic 多峰曲线图像具有一定的可控性.

3.2 Logistic 多峰曲线图像的遍历性

式(1)参数满足混沌条件时,Logistic 生成的混沌序列将呈现一种为随机的分布状态, μ 取值越接近 4 混沌序列的遍历性和伪随机性越明显. 同样的 Logistic 多峰曲线也有类似的性质:

定理 2 当参数 μ 和 x_0 数满足混沌条件是,利用此 Logistic 混沌序列值可以得到 Logistic 多峰曲线. 而且 μ 取值越接近 4,其生成的点或多峰曲线轨迹上的遍历性越明显,生成图像越完整. 如图 6 中参数分别为: $\mu = 3.569\ 945\ 6$, $x_0 = 0.1$; $\mu = 3.999$, $x_0 = 0.1$. (a)、(b) 同取 10 000 点, $\delta = 1$.

图6 μ 取值对 Logistic 多峰曲线图像的影响

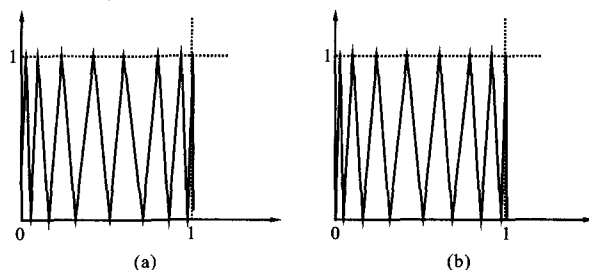
观察图 6 可以发现,图 6(b) 中由于取 μ 值更接近 4,因此其点轨迹覆盖整个 τ_1 曲线. 观察图 5 中 τ_8 (III) 同样可以发现,靠近横轴 $x=0$ 和 $x=1$ 处均有部分图像缺失. 根据定理 2 可改变 μ 取值接近 4 的程度得到遍历性更优的 τ_8 图像(图 7).

图 7 中取 $\delta = 7$; (a)、(b) 同取 10 000 点;其他参

数设置如下:

$$(a): \mu = 3.999 \quad x_0 = 0.5$$

$$(b): \mu = 3.999\ 9 \quad x_0 = 0.5$$

图7 通过更改 μ 值得到遍历性更优的 τ_8 (III) 图像

在研究过程中发现,在保证取得相对完整的 Logistic 多峰曲线图像的前提下, τ 的规模与 μ 接近 4 的程度成正比关系. 即: τ 的规模越大,为取得完整的 Logistic 多峰曲线图像所需的 μ 接近 4 的程度就越高.

为了进一步验证 Logistic 多峰曲线图像的遍历性,文中采用“取模归一”法,将组成 Logistic 多峰曲线图像的点映射成 $(0,1)$ 范围内的值. 具体方法主要有以下三步:

将 (x_a, x_b) ($\beta - \alpha = \delta$) 转换成向量 $\mathbf{P}$, 即:

$$\mathbf{P} = x_a \mathbf{i} + x_b \mathbf{j} \quad (3)$$

对式(3)进行去模运算得到

$$|\mathbf{P}| = \sqrt{x_a^2 + x_b^2} \quad (4)$$

对式(4)做“归一”处理,得到映射值 ρ :

$$\rho = \sqrt{x_a^2 + x_b^2} / \sqrt{2} \quad (5)$$

利用“取模归一”法,参考图 1 生成图像方法,对图 7(b) 取前 400 个点,转换成映射值 ρ , 如图 8 所示.

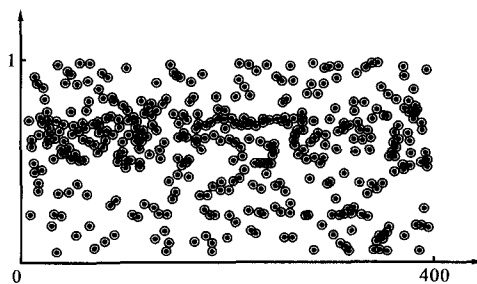


图8 针对图 7(b)映射的序列值

观察图 8 可知:

(1) Logistic 多峰曲线图像上的点,坐标不重合的遍布于 Logistic 多峰曲线上.

(2) 利用本节提供的“取模归一”法,将 Logistic 多峰曲线图像上的点映射成 $(0,1)$ 范围内的值,同样可以得到具有伪随机性和遍历性的混沌序列.

3.3 Logistic 多峰曲线图像的稳定性

通过 2.3 节研究可知:与 Logistic 混沌映射生成序列具有初值敏感性,可产生雪崩效应. Logistic 多峰曲线则不具备初值敏感性(图 9).

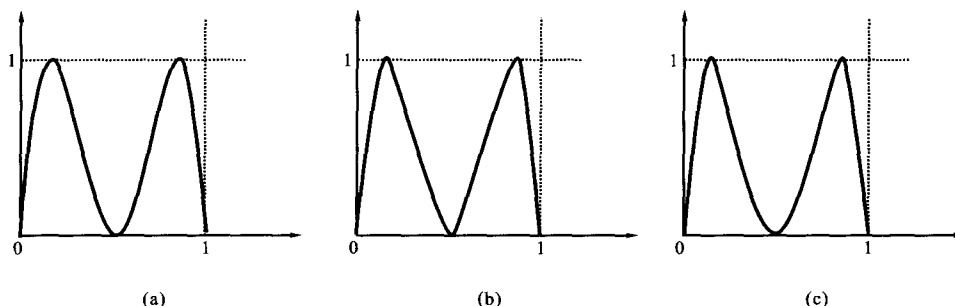


图 9 参数值差异很大的 τ_2 对比图像(c: a 和 b 在同一坐标系中)

图 9(c)是将(a)、(b)图像置于同一坐标系,观察图 9(a)、图 9(b)和图 9(c)可以发现:在保证图像遍历性的前提下,差异巨大的初值对所生成的图像无影响.

定理 3 当参数在满足 Logistic 混沌映射良好的遍历性范围内变化时,生成的 Logistic 多峰曲线轨迹图像将不受 μ 和 x_0 参数影响,表现出稳定性.

3.4 Logistic 多峰曲线图像的伪随机性和对称性

图 5 显示,组成 Logistic 多峰曲线图像的点并非顺序出现,这是因为 Logistic 混沌序列本身具有一定的伪随机性.

定理 4 组成 Logistic 多峰曲线图像的点,在 Logistic 多峰曲线上出现次序呈现伪随机性.

观察图 5 同样可以发现 Logistic 多峰曲线具有对称性.

定理 5 Logistic 多峰曲线严格关于 $x=0.5$ 对称,并且 $\tau \geq 8$ 时,越远离 $x=0.5$ 位置其峰底跨度越小.

4 结束语

文中提出了与 Logistic 混沌映射相关联“Logistic 多峰曲线”和“Logistic 多峰曲线图像”概念,研究了 Logistic 混沌序列标记的点在 Logistic 多峰曲线上分布的诸多性态,其中重点研究了 Logistic 多峰曲线图像的可控性和遍历性,得出了相应的峰顶密度公式,并利用“取模归一”法进一步验证了 Logistic 多峰曲线图像的遍历性.文中针对 Logistic 多峰曲线和 Logistic 多峰曲线图像的研究仍处在初步阶段,同时,Logistic 多峰曲线和 Logistic 多峰曲线图像的诸多性质在其他领域的应用也有待进一步

图 9 中 $\tau=2$; (a)、(b)图像同取 10 000 点;其他参数设置如下:

(a): $\mu=3.999$ $x_0=0.0001$

(b): $\mu=3.999999$ $x_0=0.9999$

研究.

参考文献:

- [1] May R M. Simple mathematical models with very complicated dynamics[J]. Nature, 1976, 26(1): 459-467.
- [2] Feigenbaum M J. Quantitative universality for a class of non-linear transformations[J]. Journal of Statistical Physics, 1978, 19(1): 25-52.
- [3] 牛志广, 张宏伟, 辛志伟. 基于 log2logistic 概率分布的近海水质组合预测方法研究[J]. 系统工程理论与实践, 2006, 26(5): 112-116.
- [4] 罗启彬, 张健. 混沌密钥序列的 DSP 实现算法研究[J]. 微电子学与计算机, 2009, 26(2): 44-50.
- [5] 马若微, 唐春阳. 考虑误判损失的 Logistic 违约预测模型构建[J]. 系统工程理论与实践, 2007, 27(8): 34-38.
- [6] 万志超. 利用非线性函数控制的混沌异结构同步[J]. 微电子学与计算机, 2005, 22(4): 53-55.
- [7] 李赵红, 侯建军. 基于 Logistic 混沌映射的 DCT 域脆弱数字水印算法[J]. 电子学报, 2006, 34(12): 2135-2137.
- [8] Robert A, Matthews J. On the derivation of a chaotic encryption algorithm[J]. Cryptologia, 1989, 13(1): 29-42.
- [9] 米良, 朱中梁. 一种基于 Logistic 映射的混沌跳频序列[J]. 电波科学学报, 2004, 19(3): 334-337.
- [10] 马卫, 朱庆保. 求解函数优化问题的快速连续蚁群算法[J]. 电子学报, 2008, 36(11): 2121-2123.

作者简介:

张洪斌 男, (1961-), 硕士, 研究员. 研究方向为系统仿真、智能控制.

程乐 男, (1979-), 双硕士, 讲师. 研究方向为人工智能.