

快速球谐函数展开的并行算法设计及实现

王 翔, 宋君强, 卢风顺, 杨锦辉

(国防科学技术大学 计算机学院, 湖南 长沙 410073)

摘 要: 球谐函数展开是一种广泛应用的数学方法. 在研究 Rokhlin-Tygart 球谐函数展开快速算法(RT 算法)的基础上, 扩充并完善了 RT 算法, 建立了所有阶连带 Legendre 多项式展开系数的计算过程, 进而研究了该算法的 MPI 并行策略并给出了 RT 并行算法. 数值实验表明, RT 算法的计算量随三角截断波数的增大而急剧增长; MPI 并行技术能够有效提高其运算速度, 较好地提升算法的整体性能, 但并行效率会受多核处理器 cache 大小和访存带宽的限制.

关键词: 球谐函数; 连带 Legendre 多项式; MPI; 并行算法

中图分类号: TP312

文献标识码: A

文章编号: 1000-7180(2011)08-0026-06

Design and Implementation of Parallel Algorithm for Fast Spherical Harmonic Expansions

WANG Xiang, SONG Jun-qiang, LU Feng-shun, YANG Jin-hui

(College of Computer, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: Spherical harmonic expansions are a widely used tool of applied mathematics. Based on the research of Rokhlin-Tygart's fast algorithm for spherical harmonic expansions (RT algorithm), the procedure for computing expansion coefficients of all orders of associated Legendre functions is established, while the RT algorithm is extended and consummated. Furthermore, the strategy of MPI parallelization of RT algorithm is developed, and its parallel algorithm is designed and implemented. Numerical results show that, the computation of RT algorithm grows violently with the lift of the highest Fourier wave number of triangular truncations; MPI parallelization can efficiently bring up the computing speed and improve the performance of the algorithm. However, the efficiency of parallelization could be limited by the cache size of multi-cores processors and the bandwidth of memory access.

Key words: spherical harmonic; associated Legendre function; MPI; parallel algorithm.

1 引言

球谐函数展开(Spherical Harmonic Expansions, SHE)作为一种数学方法, 被广泛应用于气象预报模型、地球物理、化学物理、偏微分方程数值解等众多领域. 大气具有各向异性^[1], 因此在全球数值天气预报模式中, 一般使用谱方法来表达某一变量场的水平结构. 谱模式具有精度高、稳定性好等优点, 但运算量和存储量较大. 当预报模式的水平分辨

率提高时, 谱变换的计算量增加很快, 在模式总计算量中所占比重也会随之增加. 对欧洲中期天气预报中心(ECMWF)的集成预报系统 IFS 而言, 如采用静力模式, 当水平分辨率取 2 047 时, 谱变换的计算量约占总体的 30%; 当水平分辨率为 3 999 时, 其计算量约占 39%. 如采用非静力模式, 上述两项比重将分别达到 47% 和 54%. 因此, 发展新的快速谱变换并行算法对数值天气预报系统的持续发展具有非常重要的意义, 亟需有效突破.

收稿日期: 2011-05-31; **修回日期:** 2011-06-30

基金项目: 国家自然科学基金项目(40505023)

球谐函数是球面纬向微分算子的特征函数,也是球面拉普拉斯算子的特征函数,利用它可以很好地避免球极问题,可获得全局一致分辨率^[2].

Rokhlin^[3]和 Tygert^[4-5]发展了一种快速 SHE 算法,通过对函数进行奇偶分解计算展开系数,将计算复杂性降至 $O(N^2(\log N)\log(1/\epsilon))$. Suda 和 Takami^[6]发展了一种连带 Legendre 变换的近似快速算法,使用分治法分解 Legendre 多项式将计算复杂性降至 $O(N^2\log N)$. Mohlenkamp^[7]推导了两种算法,通过稠密矩阵的局部三角化可将问题快速规约为固定阶数的连带 Legendre 多项式矩阵,从而其计算复杂性可达到 $O(N^2\log N)^2$. Blais、Provins、Soofi^[8]等提出使用四重精度计算可在截断波数达到 3 600 时使均方根误差仅为 $10^{-31} - 10^{-29}$. 另外,Inda^[9]、Huadong Xiao^[10]、Reuter^[11]、赵廷刚^[12]、Alpert^[13]、Chandrasekaran^[14-15]等在 SHE 算法的基础、改进、应用方面也做了相关工作.

2 球谐函数及 RT 算法

2.1 球谐函数简介

在谱模式中,通常选择球谐函数作为谱展开式的基函数.对于二维球面函数 $f \in S^2 (S^2 \subseteq \mathbb{R}^3)$,其展开形式为

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{m=-M}^M e^{im\varphi} \sum_{l=|m|}^M \alpha_l^m \bar{P}_l^{|m|}(\cos\theta) \quad (1)$$

式中, $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, M$ 为三角截断波数,连带 Legendre 多项式 $\bar{P}_l^{|m|}(x)$ 为

$$\bar{P}_l^{|m|} = \frac{(1-x^2)^{|m|/2}}{2^l \cdot l!} \sqrt{\frac{2l+1(l-|m|)!}{2(l+|m|)!}} \cdot \frac{d^{|m|+l}}{dx^{|m|+l}} (x^2-l)^l, |m| \leq l \quad (2)$$

RT 算法是对式(1)中内层求和的快速算法,仅讨论 $m \in [0, M]$ 的情形.

2.2 RT 算法描述

RT 算法的目标是求对某一变量场 $f_0, f_1, \dots, f_{M-1}, f_M$ 的任意 m 阶展开式

$$f(x) = \sum_{l=0}^{M-m} p_l^m \bar{P}_{l+m}^m(x) \quad (3)$$

中的系数值 $p_0, p_1, \dots, p_{M-m-1}, p_{M-m}$. 其中 $M = 2^r - 1$.

1. 算法分四步, SerSTEP 为串行程序步骤.

SerSTEP1: 函数分解

将函数值 $f_0, f_1, \dots, f_{M-1}, f_M$ 分解为偶函数部分向量 f^+ 与奇函数部分向量 f^- :

$$\begin{cases} f_k^+ = \frac{f_k + f_{M-k}}{\sqrt{2}} \\ f_k^- = \frac{f_k - f_{M-k}}{\sqrt{2}} \end{cases}, 0 \leq k \leq M \quad (4)$$

SerSTEP2: 快速 Fourier 变换 (Fast Fourier Transform, FFT)

对 f^+ 进行第二类余弦变换 (DCT-II), 得到展开系数 c^+ , 取 $c_i^+ = c_{2i}$, 满足展开式

$$f^+(x) = \sum_{k=0}^{(M-1)/2} c_k^+ T_{2k}(x) \quad (5)$$

对 f^- 进行余弦变换, 得到展开系数向量 c^- , 取 $c_j^- = c_{2j+1}$; 对 f^+ 进行第二类正弦变换 (DST-II), 得到展开系数 u^+ , 取 $u_i^+ = u_{2i}$; 对 f^- 进行正弦变换, 得到展开系数 u^- , 取 $u_j^- = u_{2j+1}$.

SerSTEP3: 低阶连带 Legendre 多项式展开系数

由快速 Fourier 展开系数得到 1、2 阶连带 Legendre 多项式展开系数: 由 c^+ 得到 2 阶系数向量 $p^{2,+}$, 由 u^+ 得到 1 阶系数向量 $p^{1,+}$. 同理, c^- 得到 $p^{2,-}$, u^- 得到 $p^{1,-}$. $A_{l,k}^{(M-1)/2,2,+}$ 为 $(M-1)/2 \times (M+1)/2$ 阶矩阵, 乘以向量 $c^+ = (c_0^+, c_1^+, \dots, c_{(M-3)/2}^+)$, $c_{(M-1)/2}^+$ 后得到 2 阶连带 Legendre 多项式展开系数向量 $p^{2,+} = (p_0^{2,+}, p_1^{2,+}, \dots, p_{(M-5)/2}^{2,+}, p_{(M-3)/2}^{2,+})^T$, 满足展开式

$$f^+(x) = \sum_{l=0}^{(M-3)/2} p_l^{2,+} \bar{P}_{2l+2}^2(x) \quad (6)$$

上述变换的逆变换矩阵为 $B_{k,l}^{(M-1)/2,2,+}$. 同理, 对于 c^- 、 u^+ 、 u^- 的变换计算也有相应的 A、B 矩阵, 限于篇幅, 此处略去.

SerSTEP4: 任意阶连带 Legendre 多项式展开系数

由低阶连带 Legendre 多项式展开系数得到任意阶 ($2 < m < M$) 系数: 由 $p^{2,+}$ 得到偶数阶系数 $p_e^{m,+}$, 由系数 $p^{1,+}$ 得到奇数阶系数 $p_o^{m,+}$. 同理, $p^{2,-}$ 得到 $p_e^{m,-}$, $p^{1,-}$ 得到 $p_o^{m,-}$. $U^{m,+}$ 为 $G^{(M-1)/2,m,+}$ 的特征向量矩阵, $G^{(M-1)/2,m,+}$ 为 $(M-1)/2 \times (M-1)/2$ 阶矩阵, $U^{m,+T}$ 为 $U^{m,+}$ 的转置矩阵. $U^{m,+T}$ 乘以向量 $p^{2,+}$ 可得任意偶数阶连带 Legendre 多项式展开系数 $p_e^{m,+} = (p_0^{m,+}, p_1^{m,+}, \dots, p_{(M-5)/2}^{m,+}, p_{(M-3)/2}^{m,+})^T$, 满足展开式

$$f^+(x) = \sum_{l=0}^{(M-m-1)/2} p_l^{m,+} \bar{P}_{2l+m+1}^m(x) \quad (7)$$

系数向量中 $p_{M-m+1}^m/2 = \dots = p_{(M-5)/2}^m = p_{(M-3)/2}^m = 0$.

上述变换的逆变换矩阵为 $U^{m,+}$. 同理, 对于任

意阶数 m 的计算都有相应的 G 、 U 、 U^T 矩阵,限于篇幅,此处略去。

至此,RT 算法结束,可求得任意 m 阶展开系数向量。本文扩展了 RT 算法,可得到四个 SHE 系数矩阵,包含所有阶数 m 的展开系数向量,见表 1。

表 1 SHE 系数矩阵

矩阵	矩阵阶数	展开函数	Legendre 阶数 m
P_e^+	$\frac{M-1}{2} \times \frac{M-1}{2}$	$f^+(x)$	$2 \sim M-1$
P_o^+	$\frac{M+1}{2} \times \frac{M+1}{2}$	$f^+(x)$	$1 \sim M$
P_e^-	$\frac{M-1}{2} \times \frac{M-1}{2}$	$f^-(x)$	$2 \sim M-1$
P_o^-	$\frac{M+1}{2} \times \frac{M+1}{2}$	$f^-(x)$	$1 \sim M$

ADDITIONAL STEP: 0 阶连带 Legendre 多项式展开系数

由于文献[3]所述算法中未提及 $m=0$ 时的情形,本文对其进行补充,添加了 0 阶连带 Legendre 多项式展开系数的计算,以获得完整的快速 SHE 算法。对于 $m=0$,函数 f 无需分解为奇偶两部分。由 0 阶连带 Legendre 多项式

$$\bar{P}_l(x) = \frac{l+0.5}{2^l \cdot l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2-1)^l, 0 \leq l \leq M \quad (8)$$

可得 $\bar{P}_0(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\bar{P}_1(x) = \frac{\sqrt{6}}{2}x$,再由递推公式

$$\bar{P}_{l+1}(x) = \frac{\sqrt{2l+3}}{l+1} (x\sqrt{2l+1})\bar{P}_l(x) - \frac{1}{\sqrt{2l-1}}(P_{l-1}(x)) \quad (9)$$

可得 $\bar{P}_l(x_k)$ ($0 \leq l, k \leq M$)。展开系数由式 (10) 定义

$$p_l = \int_{-1}^1 \bar{P}_l(x) f(x) dx \quad (10)$$

该式可离散为式 (11) 的形式

$$p_l = \sum_{i=0}^{M-1} (x_i - x_{i+1}) \frac{\bar{P}_l(x_i) f(x_i) + \bar{P}_l(x_{i+1}) f(x_{i+1})}{2} \quad (11)$$

由此可求得向量 $\mathbf{p} = (p_0, p_1, \dots, p_{M-1}, p_M)^T$,即为 0 阶连带 Legendre 多项式展开系数。

3 并行算法的设计与实现

本节根据 RT 算法的特性,研究了其 MPI 并行策略,设计并实现了 RT 并行算法。

3.1 并行策略

上节所述 RT 算法的计算量集中于 SerSTEP3

与 SerSTEP4。另外,在 SerSTEP2 中, c^+ 、 c^- 、 u^+ 、 u^- 的计算相互独立,因此也可以并行执行。

对于 SerSTEP3,主要计算量在于预处理步骤,即四个矩阵的计算。由于四个 A 矩阵规模大、元素计算复杂且矩阵行与行之间相互独立,因此将每个 A 矩阵分别按行分配计算任务,每个进程负责计算 A 矩阵的一行元素。每行元素计算完毕后,再与 SerSTEP2 中相应的 Fourier 变换结果进行内积运算,由此可得低阶连带 Legendre 多项式展开系数向量中对应位置的元素,最后由根进程收集数据并广播,以备 SerSTEP4 使用。

对于 SerSTEP4,关于每阶 m ($2 < m \leq M$) 均分别对 f^+ 与 f^- 计算一次 G 矩阵,再求 U 、 $U^T A$ 矩阵,之后通过矩阵向量乘运算求得 m 阶展开系数向量,此计算过程共需执行 $2(m-2)$ 次。因此, SerSTEP4 步可按 m 分配任务,每个进程计算一阶 m 值的相关计算过程。得到每阶展开系数向量后,根进程收集数据,完成最终的四个系数矩阵。

3.2 并行算法

本小节分步描述 RT 并行算法,其中最大进程数为 N ,根进程为 0。ParaSTEP 为并行程序步骤。RT 并行算法流程见图 1,图中灰色框代表各进程计算所得数据及处理范围,虚线框代表各 ParaSTEP 处理范围。

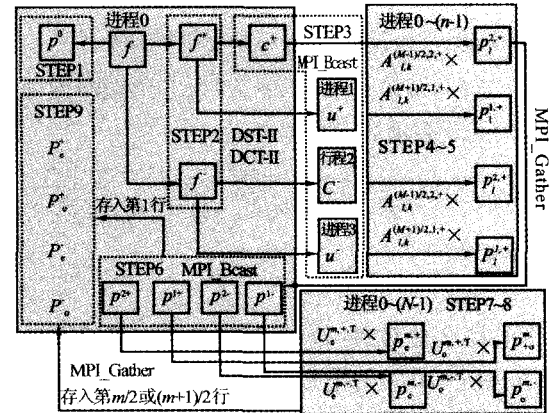


图 1 RT 并行算法流程

ParaSTEP1: 进程 0 计算 0 阶连带 Legendre 多项式展开系数向量 $\mathbf{p}$;

ParaSTEP2: 进程 0 拆分函数 f 为偶函数部分 f^+ 与奇函数部分 f^- ;

ParaSTEP3: 进程 0 发送 f^+ 至进程 1、 f^- 至 2 和 3,进程 0、1、2、3 分别计算 c^+ 、 c^- 、 u^+ 、 u^- ,计算后广播结果;

ParaSTEP4: 对最大进程数 N ,将矩阵

$A_{l,k}^{(M+1)/2,1,+}$ 行号循环 l 分配给各进程,计算第 l 行的值;再将第 l 行与向量 u^+ 做内积,求得向量 $p^{1,+}$ 的第 l 项,计算后进程 0 收集数据. 对矩阵 $A_{l,k}^{(M+1)/2,1,-}$ 重复上述过程;

ParaSTEP5: 对于 $p^{2,+}$ 和 $p^{2,-}$, 向量长度与 $p^{1,+}$ 和 $p^{1,-}$ 相比少 1, 计算过程与 ParaSTEP4 类似;

ParaSTEP6: 进程 0 广播系数向量 $p^{1,+}$ 、 $p^{1,-}$ 、 $p^{2,+}$ 、 $p^{2,-}$, 并将其分别存入最终结果所得系数矩阵 P_o^+ 、 P_o^- 、 P_e^+ 、 P_e^- 的第 1 行中;

ParaSTEP7: 对最大进程数 N , 当阶数 m 为奇数 ($m = 3 \sim M$) 时, 将 m 循环分配给各进程, 对于偶函数 f^+ 计算矩阵 $G^{(M+1)/2,M,+}$ 并求其特征向量矩阵 $U_o^{m,+}$, 再求 $U_o^{m,+}$ 的转置矩阵 $U_o^{m,+T}$; 用 $U_o^{m,+T}$ 乘以向量 $p^{1,+}$ 求得系数向量 $p_o^{m,+}$, 计算后进程 0 收集数据. 对于奇函数 f^- 重复上述过程;

ParaSTEP8: 当 m 为偶数 ($m = 4 \sim M-1$) 时, 计算过程与 ParaSTEP7 类似.

ParaSTEP9: 进程 0 将系数向量 $p_o^{m,+}$ 、 $p_o^{m,-}$ 分别存入最终结果系数矩阵 P_o^+ 、 P_o^- 的第 $(m+1)/2$ 行, $p_e^{m,+}$ 、 $p_e^{m,-}$ 存入 P_e^+ 、 P_e^- 的第 $m/2$ 行. 算法结束.

3.3 并行算法实现

ParaSTEP4-5 以及 ParaSTEP6-7 使用所有 N 个进程, 这四步的重点在于如何为各进程分配任务.

对于 ParaSTEP4, 根据最大进程数 N , 将矩阵 $A_{l,k}^{(M+1)/2,1,+}$ 的行号 l 分配给各进程进行相关计算. 若总行数大于 N , 则将前 N 个行号分配至相应进程, 再将剩余行号按进程数进行满排, 直至剩余行号数量小于 N . 对于剩余的行号, 从 0 开始取对应数量的进程划分为新的进程组, 进行相关计算. 若总行数小于 N , 则直接划分出新的进程组进行计算. 对矩阵 $A_{l,k}^{(M+1)/2,1,-}$ 重复上述过程. ParaSTEP5 的过程与 ParaSTEP4 类似.

对于 ParaSTEP7, 根据最大进程数 N , 当阶数 m 为奇数 ($m = 3 \sim M$) 时, 将 m 分配给各进程, 对 f^+ 进行相关计算. 若奇阶数 m 的个数大于 N , 则将前 N 个分配至相应进程, 再将剩余 m 按进程数进行满排, 直至剩余 m 数量小于 N . 对于剩余的 m , 从 0 开始取对应数量的进程划分为新的进程组, 进行相关计算. 若奇阶数 m 的个数小于 N , 则直接划分出新的进程组进行计算. 对 f^- 重复上述过程. ParaSTEP8 的过程与 ParaSTEP7 类似.

4 数值实验与分析

本文采用 C 程序设计语言实现了 RT 算法的串

行及并行版本, 实验平台为 5 万亿次机群, 配置如下所示:

计算节点: 共 64 个, 每个节点由双路四核 Intel Xeon E5345 CPU 构成, 主频 2.33 GHz, 内存 8 GB;

操作系统: 每个节点上的操作系统均为 Red-Hat Linux AS 4.0;

并行环境: 并行计算环境采用 MPICH2. 通过 Infiniband 高速互连组成, 采用全局共享并行文件系统, 存储容量 8 TB.

实验程序在计算第二类离散余弦变换 (DCT-II) 时参考了^[16]中的相关理论; 在计算特征向量矩阵时调用了 LAPACK 库函数, 版本为 CLAPACK 3.

1.1.1. 实验中采样函数选取

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 \quad (12)$$

其中采样点为

$$x_k = \cos\left(\frac{\pi(k+1/2)}{M+1}\right), 0 \leq k \leq M \quad (13)$$

4.1 串行版本

RT 算法串行程序实验使用 5 万亿次机群的 1 个计算节点. 表 2 对不同 M 规模进行了实验对比, 其中对于矩阵 A 、 G 、 U 、 U^T 的计算属于预处理步骤 (PRE), 其余属于球谐函数展开核心步骤 (SHE).

表 2 串行版本在不同 M 规模下时间对比 s

M	255	511	1 023	2 047	4 095
PRE	16.53	227.87	3 343.25	52 242.55	822 421.78
SHE	0.03	0.23	1.48	13.50	100.16
0 阶	0.01	0.04	0.22	0.96	3.89
总计	16.57	228.14	3 344.95	52 257.02	822 525.83

随着计算规模的指数性扩大, 计算时间急剧上升, 对于更大的 M , 串行程序实现已无应用价值, 须用并行方法进行加速.

4.2 并行版本

RT 算法并行程序使用 5 万亿次机群的 6 个计算节点. 表 3 中列出了在不同规模下, 计算进程数分别为 48 和 24 时, 并行程序的各部分运行时间及加速比、并行效率.

随着计算规模的指数性扩大, 加速比与并行效率的变化如图 2 所示.

4.3 实验分析

串行实验表明, 随着三角截断波数的提高, 程序运行时间急剧增长, 而预处理部分占据了几乎全部的时间. 在并行实验中, 将计算进程数固定为 48 或

24,随着三角截断波数的提高,并行加速比和并行效率均呈现先上升后下降的趋势。

表 3 并行版本在不同 M 规模下各部分时间对比 s

进程	对比	255	511	1 023	2 047	4 095
48	PRE	0.424	6.03	82.3	2 053.0	40 194.3
	SHE	0.000 152	0.001 35	0.022 9	0.640	5.61
	0 阶	0.007 31	0.030 1	0.137	0.628	2.594
	通信	0.013 0	0.014 8	0.046 8	0.349	6.46
	总计	0.445	6.079	82.5	2 054.6	40 209.0
	加速比	37.2	37.5	40.5	25.4	20.5
24	效率	77.5%	78.2%	84.5%	53.0%	42.6%
	总计	0.873	11.1	163.0	2 546.4	44 323.8
	加速比	19.0	20.5	20.5	20.5	18.6
	效率	79.1%	85.5%	85.5%	85.5%	77.3%

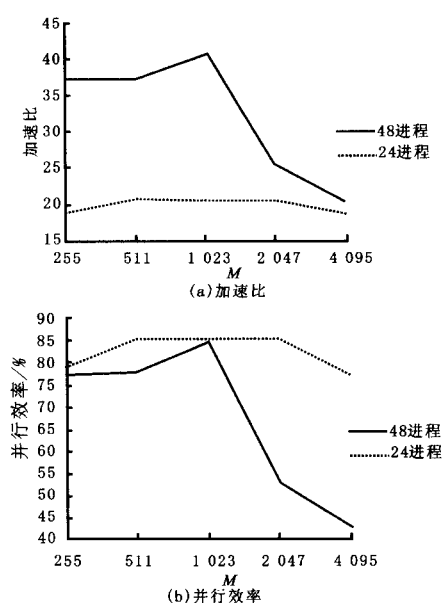


图 2 加速比与并行效率在不同计算规模下的变化

RT 算法预处理步骤的时间占了总时间的 99% 以上,而预处理中,求矩阵并求其特征向量矩阵更是占据了几乎全部的时间。在 $M=4\ 095$ 时,对于每一奇数阶 $m(3 \leq m \leq 4\ 095)$,其双精度实型矩阵 G 规模均为 $2\ 048 \times 2\ 048$ (偶数阶为 $2\ 047 \times 2\ 047$),数据大小为 32 MB($M=2\ 047$ 时矩阵大小为 8 MB)。求矩阵的特征向量矩阵需要多次整体迭代,而处理器 cache 仅为 4 MB,因此需要反复读取内存数据,但这也无疑会降低 cache 命中率,延长程序运行时间。

上述问题,串行算法和并行算法都会遇到,并非降低并行效率的重要因素。由于矩阵特征问题的多次迭代性,以及上述反复访存问题,对于共享内存的计算节点来说,在多核并行计算各自所分配阶数对应的特征向量矩阵时,处理器的访存带宽将影响各进程读取内存数据的速度,从而延长求特征向量矩阵的时间,造成并行效率的下降。表 4 中分别对比了

$M=2\ 047$ 与 $4\ 095$ 时,计算进程规模与求一次特征向量矩阵所需时间、加速比、并行效率的关系。

表 4 计算规模与求特征(s)、加速比、并行效率的关系

进程	2 047			4 095		
	特征	加速	效率	特征	加速	效率
串行	12.6	—	—	98.1	—	—
24	15.5	20.5	85.5%	134.8	18.6	77.3%
36	19.6	24.8	68.8%	181.5	20.2	56.1%
48	25.7	25.4	53.0%	232.5	20.5	42.6%

5 结束语

本文基于 Rokhlin-Tygart 球谐函数展开快速算法,将 RT 算法结果扩展为包含所有阶展开系数的矩阵,并补充了 0 阶连带 Legendre 多项式展开系数的计算方法,使球谐函数展开的内层求和计算得以完整,进而研究了 RT 算法的 MPI 并行策略,提出并实现了 RT 并行算法。数值实验表明,MPI 并行技术可有效提高运算速度,提升算法整体性能,但并行效率会受多核处理器 cache 大小和访存带宽的限制。由于算法中预处理步骤占据了支配性的时间比例,为了更好地提升 RT 算法的性能,下一步将测试其他求特征向量矩阵的方法,如分治法、同伦法等,以求一方面减少求特征向量矩阵的计算时间,加快算法整体速度;另一方面降低计算中对内存的访问次数,提高算法的并行效率。

参考文献:

- [1] 雷兆崇,章基嘉. 数值模式中的谱方法[M]. 北京:气象出版社,1991.
- [2] 张理论,李晓梅,宋君强. 谱方法数值计算研究进展[J]. 指挥技术学院学报,2001,12(6):98-103.
- [3] Vladimir Rokhlin, Mark Tygart. Fast algorithms for spherical harmonic expansions[J]. SIAM J SCI COMPUT, 2006, 27(6): 903-1928.
- [4] Mark Tygart. Fast algorithms for spherical harmonic expansions, II[J]. Journal of Computational Physics, 2008 (227): 4260-4279.
- [5] Mark Tygart. Fast algorithms for spherical harmonic expansions, III[J]. Journal of Computational Physics, 2010(229): 6181-6192.
- [6] Reiji Suda, Masayasu Takami. A fast spherical harmonics transform algorithm[J]. Mathematics of Computation, 2001, 71(238): 703-715.

- [7] Martin J. Mohlenkamp. A fast transform for spherical harmonics[J]. The Journal of Fourier Analysis and Applications, 1999, 2(2/3): 159—184.
- [8] Blais J A R, Provins D A, Soofi M A. Optimization of spherical harmonic transform computations[J]. Computational Science, 2005(3514): 393—401.
- [9] Marcia A Inda, Rob H Bisseling, David K Maslen. On the efficient parallel computation of legendre transforms [J]. SIAM J SCI Comput, 2001, 23(1): 271—303.
- [10] Xiao Huadong, Lu Yang. Parallel computation for spherical harmonic synthesis and analysis[J]. Computers & Geosciences, 2007 (33): 311—317.
- [11] Matthew G Reuter, Mark A Ratner, Tamar Seideman. A fast method for solving both time—dependent Schrodinger equation in angular coordinates and its associated “m—mixing” problem[J]. The Journal of Chemical Physics, 2009(131): 94-108.
- [12] 赵廷刚, 张刚. 谱方法的 Chebyshev—Legendre 变换 [J]. 甘肃高师学报, 2006, 11(2): 1—3.
- [13] B Alpert, V Rokhlin. A fast algorithm for the evaluation of Legendre expansions[J]. SIAM J Sci Statist Comput, 1991(12): 158—179.
- [14] S Chandrasekaran, M Gu. A divide—and—conquer algorithm for the eigendecomposition of symmetric block—diagonal plus semiseparable matrices [J]. Numer Math, 2004, 96: 723—731.
- [15] Healy D M, Kostelec P J, Rockmore D. Towards safe and effective high—order Legendre transforms with applications to FFTs for the 2—sphere[J]. Adv Comput Math, 2004(21): 59—105.
- [16] Press W H, Teukolsky S A, Vetterling W T, et al. Numerical recipes in fortran 77[M]. 2nd. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1992.
- [17] 王鹏, 吕爽, 聂治, 等. 并行计算应用及实战[M]. 北京: 机械工业出版社, 2009.
- [18] Calvin Lin, Lawrence Snyder. Principles of parallel programming[M]. USA: Pearson Education, 2009.

作者简介:

王翔 男, (1986—), 硕士研究生, 研究方向为大规模科学与工程计算研究.

宋君强 男, (1962—), 博士生导师, 研究员, 研究方向为高性能计算和数值天气预报研究.

卢风顺 男, (1982—), 博士研究生, 研究方向为通用 GPU 并行计算研究.

杨锦辉 男, (1986—), 博士研究生, 研究方向为云计算研究.

(上接第 25 页)

- [6] Jeung H, Park S. A GML data storage method for spatial databases [J]. Journal of GIS Association of Korea, 2004, 12(4): 307—319.
- [7] Li Y, Zhou S, Li J. GML Storage: A Spatial Database Approach [C]// Proceeding of ER'04 Workshops 2004. Berlin: Springer, 2004: 55—66.
- [8] W3C XQuery 1.0 and XPath 2.0 formal semantics[EB/OL]. [2011—6—21]. <http://www.w3.org/TR/2005/WD-xquery-semantics-20050211>
- [9] Fernandez M F, Kadiyska Y, Morishima A, et al. SilkRout: A framework for publishing relational data in XML[J]. ACM TODS, 2002, 27(4): 438—493
- [10] Dehaan D, Toman D, Consens, M P et al. A comprehensive XQuery to SQL translation using dynamic Interval encoding[C]// Proceedings of the ACM SIGMOD international conference on management of data, New York, NY, USA: ACM, 2003, 623—634
- [11] Sun H W, Zhang S S, Zhou J T. XQuery—to—SQL translating algorithm with little on schema mapping between XML and RBB. [C]// proceedings of the 8th International conference on Computer Supported Cooperative Work in Design[s. l.]: IEEE, 2004.
- [12] 曹莉, 李新宇, 许钟. XML 数据查询及优化方法研究 [J]. 微电子学与计算机, 2006, 23(8): 125—128.
- [13] W3C. SVG1. 1 Specification. [EB/OL]. [2011—6—21]. <http://www.w3.org/TR/2004/WD-SVG11-200215/>. 2002.
- [14] ArcInfo. [EB/OL]. [2011—6—21]. <http://www.esri.com/software/arcgis/arcinfo/index.html>
- [15] GML 文档[EB/OL]. [2011—6—21]. <http://schemas.opengis.net/sampling/1.0.0/Examples/>
- [16] Nicola M, Linden B. Native XML Support in DB2 Universal Database [C]// Proceedings of the 31st international conference on very large data bases, 2005. Norway: IEEE, 2005: 1164—1174

作者简介:

张龙 男, (1968—), 硕士, 研究方向为空间数据库管理.