

NURBS 在自适应 hp 有限元分析系统中的应用

马中华, 刘得军

(中国石油大学, 北京 102249)

摘 要: 在传统的有限元分析中, 对于曲边区域或者曲边的分界面并没有很好的近似方法, 通常使用大量的线性单元近似的描述曲边计算区域. 这些新增加的单元不仅浪费了计算时间, 而且往往并不是需要求解的部分. 采用曲线单元可以避免对单元的强制细化, 有效的提高计算的精度. 曲边单元使用非均匀有理 B 样条(NURBS)曲线实现, 可以有效的消除几何离散误差, 保证整体的高阶连续性. 详细讨论了基于 NURBS 曲线的自适应三角形网格剖分和四边形网格剖分, 并结合自适应 hp 有限元算法解决实际问题. 从计算自由度和计算时间的角度比较典型的工程算例结果, 采用 NURBS 曲边单元的 hp 有限元算法能够很好的消除几何近似导致的误差, 提高计算的效率.

关键词: NURBS; 有限元法; 自适应; 网格生成

中图分类号: TP391.9

文献标识码: A

文章编号: 1000-7180(2011)08-0216-03

Application of NURBS in Adaptive hp Finite Element Analysis System

MA Zhong-hua, LIU De-jun

(China University of Petroleum, Beijing 102249, China)

Abstract: In the traditional finite element analysis, there is not a good approximation method for curved boundaries or the interface of curved edge, and a large number of linear elements are used to describe the computational domain of curved edges. These additional elements not only waste computing time, and often are not the necessary part to solve. To use curved element can avoid the force refinement of the elements and effectively improve the calculation accuracy. By using the non-uniform rational B-spline (NURBS) curve algorithm can effectively eliminate the geometric discretization error, and ensured the overall high continuity. This paper discusses adaptive triangular mesh generation and quadrilateral mesh generation based on the NURBS curves in detail and solves practical problems with hp-adaptive finite element algorithm. The results were compared from the degree of freedom and the computing time, the NURBS based hp finite element method can eliminate the errors caused by geometric approximation and improve the computational efficiency.

Key words: NURBS; finite element method; adaptive; mesh generation

1 引言

在对实际工程的有限元分析中, 为能够真实地模拟工程的物理状态, 对物理问题的初始网格划分是一个重要环节, 目的是把模型的几何形状定义为有效的初始网格, 所划分的网格形式将直接影响最后的计算精度和计算时间. 采用基于 NURBS 曲线的曲边单元能够很准确地描述复杂模型的几何状

状, 避免了强制剖分为小单元的近似求解方法. 与有限元方法结合使用具有很高的数值精度.

自适应有限元网格的生成一直是国内外的研究热点, 近年也产生了不少的优秀算法. 四边形网格的全自动划分比三角形网格的全自动划分方法更困难, 因此大部分的网格自动生成算法只支持三角形网格. 本文介绍一种基于 NURBS 曲线的三角形和四边形网格剖分方法, 其保证了曲边网格单元的 C_1

收稿日期: 2011-05-07; 修回日期: 2011-06-23

基金项目: 国家自然科学基金项目(41074099)

或更高的连续性,并与自适应 hp-有限元算法 HERMES^[1-5]结合,可以有效地求解各种工程分析中的高阶问题。

2 NURBS 在二维有限元分析中的应用

NURBS 曲线是定义几何形状的标准工具.它可以精确地表示线、弧形、椭圆和不规则形态.通过定义级数、控制点个数、控制点权重和结点向量可以使用较少的数据定义非常复杂的几何曲线. NURBS 曲线是一个参数化曲线,其向量值分片有理函数为

$$C(t) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i P_i N_{i,k}(t)}{\sum_{i=0}^n \omega_i N_{i,k}(t)} \quad (1)$$

式中, ω_i 是控制点 P_i 的权重因子, n 是控制点的个数, $N_{i,k}$ 是 k 级归一化 B 样条基函数. NURBS 曲线的级数 k 通常是 1, 2, 3 或 5 的正整数. 线段和折线的曲线级数通常为 1, 弧线为二次的等式其级数通常为 2, 自由曲线的级数为 3 或 5. 在计算中可以把级数 k 设得很高以取得高度圆滑的曲线, 但计算时间也越长. 曲线的连续性有不同的级别, 一个级别为 2 的等式能够保证曲线的 C^1 连续性.

2.1 自适应 hp- 有限元网格剖分

自适应 hp- 有限元分析中常用的为三角形网格和四边形网格, 由于三角形网格在技术上更易实现, 所以大多数自适应有限元代码使用的是三角形网格. 自适应有限元分析的过程中, 在不考虑各网格单元多项式阶次的情况下, 通常有六种网格剖分方法. 如果考虑各网格单元多项式的高阶特性, 则有百余种网格剖分方法^[6]. 图 1 到图 3 展示了这六种剖分方法.

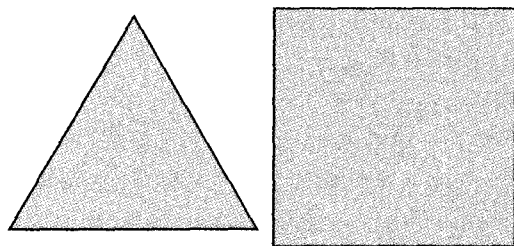


图 1 典型的三角形网格和四边形网格

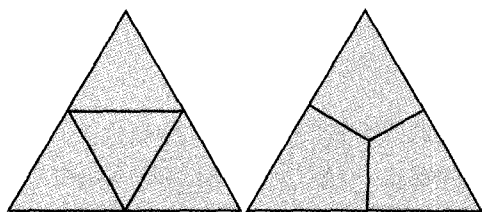
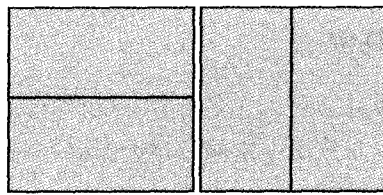
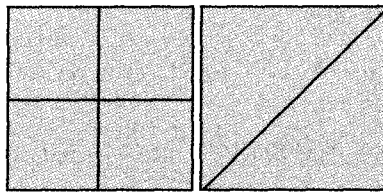


图 2 三角形网格剖分方法

对于各向同性介质, 常用图 2(a) 和图 3(c) 中的方法对网格进行剖分, 其它网格剖分方法对于各向



(a) 四边形网格水平剖分 (b) 四边形网格垂直剖分



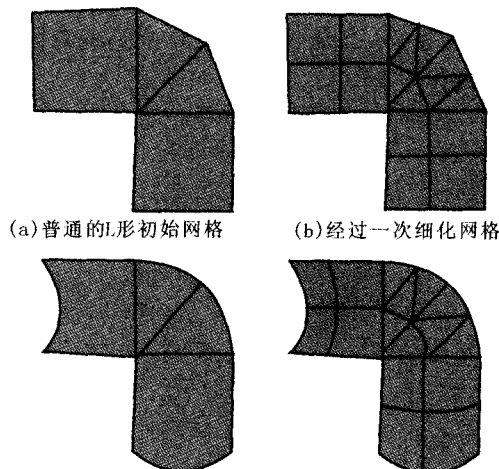
(c) 四边形剖分为四边形 (d) 四边形剖分为三角形

图 3 四边形网格剖分方法

异性介质的自适应有限元求解具有较高效率。

2.2 NURBS 曲线单元在有限元网格剖分中的应用

相比于直边单元, 曲边单元具有其无可比拟的几何近似性. 变形区域的几何精确描述其作用不容忽视, 因而模型内部和边界曲线的几何描述作为有限元分析的前置处理技术不仅直接影响到数值模拟的精度还影响到其模拟速度. 因此, 对模型曲线进行准确有效的描述是实现有限元数值模拟的前提之一. 传统的几何近似法不能很好地描述几何变形区域, 其应用范围具有一定的局限性. NURBS 方法因其具有强大的造型功能, 几乎可以精确描述所有的造型曲线, 因此正逐渐成为计算机图形学与计算机工程设计中造型, 建模的重要手段. 图 4 中演示的是采用 2 次 NURBS 曲线的几何模型. 在图 4 中, 典型的 L 形网格的拐角和边界经过 NURBS 算法处理后, 可以精确模拟所需要的几何曲线.



(c) NURBS 曲线单元网格 (d) NURBS 曲线单元一次细化网格

图 4 典型的 L 形网格区域

3 数值算例

本节通过一个工程算例对 NURBS 曲线网格的自适应有限元算法与普通网格的自适应有限元算法的性能进行比较。

时谐 Maxwell 方程的电场场量的控制微分方程如下:

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times E) + \gamma \partial E / \partial t + \epsilon \partial^2 E / \partial t^2 = 0 \quad (2)$$

消除与 t 有关的导数, 并将 $\partial E / \partial t = i\omega E$ 和 $\partial^2 E / \partial t^2 = -\omega^2 E$ 带入式(2), 这里 $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ 表示物质的介电常数, $\mu = \mu_0 \mu_r$ 表示物质的磁导率, γ 表示物质的电导率, $k = \omega/c$ 是波动数, ω 是角频率, c 是光速. 最终得到本文中使用的时谐 Maxwell 方程的规范形式为

$$\nabla \times (\mu_r^{-1} \nabla \times E) + i\gamma k \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0} E - \epsilon_r k^2 E = 0 \quad (3)$$

在图 5 所示的模型中, 在模型的最右边突起的边界加载面电流, 区域的边界使用理想导体边界条件, 中间的圆型区域为负载区域, 负载区域外的部分为真空. 通常面电流 J_s^{imp} 分量在电磁场分析中不为零, 并且由于求解的过程通常能达到指数收敛速率, 因此可以将无限大计算区域截断为有限的四边形区域, 并且应用理想导体传导边界条件使得电场的切向分量为零:

$$E \cdot t = 0$$

$$n \times (\mu_r^{-1} \nabla \times E) = i\omega J_s$$

这里 t 是切向向量. 理想导体边界条件应用于发射线圈之外的边界. 加载的向量值面电流 J_s^{imp} 可简化为 J_s , 并通过 Neumann 边界条件建立

这里对模型分别使用常规网格单元的自适应有限元算法和基于 NURBS 曲线单元的自适应有限元算法进行分析。

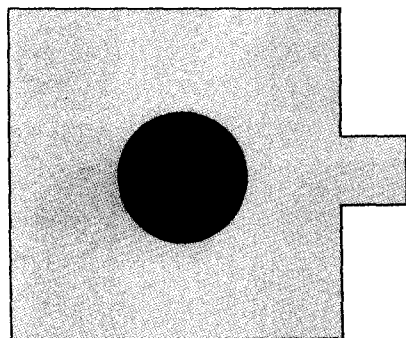


图 5 物理模型

如图 6 所示, 在误差精度为 0.1% 时, 通过强制加密中心计算区域周边的网格达到要求解的计算精

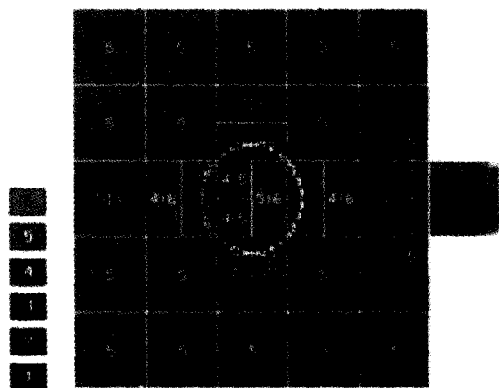


图 6 误差精度为 0.1% 时常规单元的网格剖分

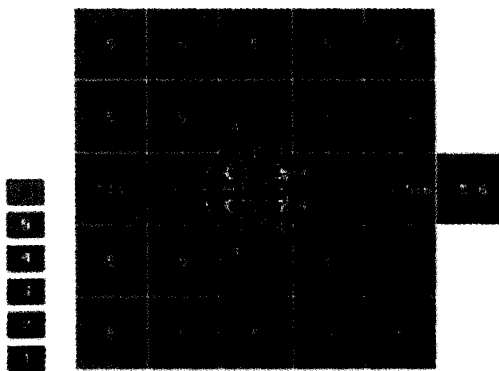


图 7 误差精度为 0.1% 时使用 NURBS 曲边单元的网格剖分图

度. 图 7 中, 在误差精度为 0.1% 时, 由于曲边单元精确的匹配模型中的圆形区域, 用较少的自由度就能达到相同的误差精度. 在图 6 和图 7 中, 网格中的数字表示所在的网格单元的多项式阶数.

在计算规模上, 采用基于 NURBS 网格单元的自适应高阶有限元分析, 用 3 426 个自由度就能达到相对误差为 0.097 569% 的精度, 而采用大量小单元近似曲边网格的自适应有限元分析, 需用 6 664 个自由度能达到相对误差为 0.093 179% 的精度. 在计算时间上, 由于自由度的减少, 采用基于 NURBS 网格单元的自适应高阶有限元分析具有更高的计算效率.

4 结束语

数值近似函数的 C^1 连续性, 是传统有限元分析的难点问题之一. 采用 NURBS 基函数可以构造任意高阶连续的近似函数, 对高阶问题的数值求解有着独到优势. 本文详细讨论了 NURBS 曲线单元的构造和优势, 将精确 NURBS 有限元法应用于实际

(下转第 221 页)

之一—H. 264, 阐述国内外相关研究近况, 为高清视频技术提供一种新的解决方向进行探讨。

参考文献:

- [1] 贾英江, 高欣宝. 可重构计算机简介[J]. 计算机应用研究. 1999, 16(5): 42—46.
- [2] Wiegand T, Sullivan G J, Bjontegaard G, et al. Overview of the H. 264/AVC video coding standard[J]. IEEE Trans Circuits Syst, 2003, 13(6): 560—575.
- [3] Juanjo Noguera, Rosa M Badia. HW/SW codesign techniques for dynamically reconfigurable architectures[J]. IEEE Trans on VLSI Systems, 2002, 10(4): 399—415.
- [4] Ann Gordon-Ross, Frank Vahid. Frequent loop detection using efficient nonintrusive On-chip hardware[J]. IEEE Trans on Computers, 54(10): 1203—1215.
- [5] Hayden Kwok-Hay So, Artem Tkachenko, Robert Brodersen. A unified hardware/software runtime environment for FPGA-based reconfigurable computers using BORPH[C]//proceeding of the International Conference on Hardware Software Codesign and System Synthesis. New York, NY, USA: ACM, Proc of CODES+ISSS, 2006: 259—264.
- [6] 周博, 邱卫东, 彭澄廉. SHUM—UCOS: 基于统一多任务模型可重构系统的实时操作系统[J]. 计算机学报,

2006(2): 208—218.

- [7] Palis M A. The granularity metric for fine—grain real—time scheduling[J]. IEEE Trans on Computers, 2005, 54(12): 1572—1583.
- [8] Asaad S, Bishay M, Wilkes D M. A low—cost, DSP based, intelligent vision system for robotic applications [C]//proceedings of the 1996 Minneapolis, MN, USA IEEE International Conference on Robotics and Automation IEEE Press, 1996: 1656—1661.
- [9] SHAN Lan shui XIAO Tiejun. Design and implementation of DCT transform and quantification in H. 264 based on FPGA[J]. Computer Engineering and Design, 2009, 30(16): 3735—3736.
- [10] Lu Yi, Luo Yongjun, Yang Ai liang. Encoder and decoder of variable length coding in H. 64 with FPGA Implementation[J]. Vionics Technology, 2009, 36(1): 34—38.
- [11] Wang Kun, Wu Zong yong. PGA implementation of binarization coder in H. 64[J]. Electronic Design Engineering, 2009, 17(9): 9—11.

作者简介:

孙香花 女, (1977—), 硕士, 讲师. 研究方向为数据库、网络。

(上接第 218 页)

工程问题, 并详细研究了该方法与直边单元近似的方法在求解工程问题中的收敛特性. 数值结果表明, 在相同的收敛精度下, 两种方法的自适应 hp-有限元分析都可以达到指数收敛速率, 基于几何精确的 NURBS 有限元法可以达到更高的收敛速率.

参考文献:

- [1] Vejchodsky T, Solin P, Zitka M. Modular hp—FEM system HERMES and its application to the Maxwell's equations[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2007 (76): 223—228.
- [2] Solin P, Cerveny J, Dolezel I. Arbitrary—level hanging nodes and automatic adaptively in the hp—FEM[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2008 (77): 117—132.
- [3] Solin P, Andrs D, Cerveny J, et al PDE—Independent a-

daptive hp—FEM based on hierarchic extension of finite element spaces[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2010(233): 3086—3094.

- [4] Solin P, Cerveny J, Dubcova L, et al. Monolithic discretization of linear thermoelasticity problems via adaptive multimesh hp—FEM[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2010(234): 2350—2357.
- [5] Solin P, Segeth K, Dolezel I. Higher—order finite element methods[M]. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2003.
- [6] 陈晓晖, 刘得军, 马中华. 基于高精度自适应 hp—FEM 的随钻电阻率测井电场数值模拟[J]. 计算物理, 2011, 28(1): 50—56.

作者简介:

马中华 男, (1983—), 博士研究生. 研究方向为自适应 hp—有限元算法及其工程应用。