

基于直觉模糊集多属性决策的灰色关联分析法

杨红军, 董 礼

(秦皇岛职业技术学院, 河北省 秦皇岛 066100)

摘 要: 基于直觉模糊集理论, 提出了一种新的灰色关联分析方法来研究模糊多属性决策问题. 首先, 根据直觉模糊集的几何意义, 引入了两个直觉模糊集之间的距离, 且每个备选方案的评价值用直觉模糊值表示. 其次, 依据传统灰色关联分析方法的基本思想, 通过计算每个方案对直觉模糊正、负理想方案的灰色关联度, 然后计算备选方案对直觉模糊正理想方案的相对关联度. 最后, 通过一个具体实例说明该方法的有效性和具体应用过程.

关键词: 多属性决策; 灰色关联分析; 直觉模糊集; 直觉模糊距离

中图分类号: TP18

文献标识码: A

文章编号: 1000-7180(2011)09-0155-03

Method of Grey Relational Analysis for Multiple Attribute Decision Making Based on Intuitionistic Fuzzy Sets

YANG Hong-Jun, DONG Li

(Qinhuangdao Institute of Technology, Qinhuangdao 066100, China)

Abstract: The aim of this paper is to extend the grey relational analysis (GRA) method to deal with multiple attribute decision making problems in fuzzy environments. This paper presents a novel GRA method for multiple attribute decision making (MADM) based on intuitionistic fuzzy sets theory. The rating of each alternative is expressed in intuitionistic fuzzy value. Then, the distance between two intuitionistic fuzzy sets is introduced. According to the traditional ideas of grey relational analysis, the optimal alternative is determined by calculating the relative relational degree of every alternative and positive ideal solution which based on the concept that the optimal alternative should have the largest degree of grey relation from positive ideal solution and the smallest degree of grey relation from the negative ideal solution simultaneously. Finally, an example is shown to high light the procedure of the proposed method at the end of this paper.

Key words: multiple attribute decision making; grey relational analysis (GRA); intuitionistic fuzzy sets; intuitionistic fuzzy distances

1 引言

Zadeh^[1]提出了模糊集的定义. Atanassov^[2]提出了直觉模糊集(Intuitionistic Fuzzy Sets)的定义. 由于直觉模糊集对模糊现象的刻画同时考虑隶属和非隶属的信息, 这样直觉模糊集在对模糊现象的刻画更加精确和全面. 因此直觉模糊集在工程技术界得到了广泛地应用. Tan 和 Zhang^[3]把直觉模糊集

与 TOPSIS 方法结合起来用于研究模糊多属性决策问题. 邓聚龙^[4]提出灰色关联分析法, 并在多属性决策中得到了广泛的应用. 文中将利用直觉模糊集的理论, 把直觉模糊集与灰色关联分析方法结合起来用于研究模糊多属性决策问题.

2 直觉模糊集基本理论

直觉模糊集增加了一个新的属性参数: 非隶属

度函数,它能够事物属性的描述上更加精确和全面,在处理不模糊信息时具有更强的表现能力。

定义 1 设 X 是一个非空经典集合, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, X 上形如 $A = \{(x, \mu_A(x), v_A(x)) \mid x \in X\}$ 的三重组称为 X 上的一个直觉模糊集. 其中 $\mu_A: X \rightarrow [0, 1]$ 和 $v_A: X \rightarrow [0, 1]$ 均为 X 的隶属函数, 且 $0 \leq \mu_A(x) + v_A(x) \leq 1$, 这里 $\mu_A(x), v_A(x)$ 分别是 X 上元素 x 属于 A 的隶属度和非隶属度. 令 $IFS[X]$ 表示 X 上所有直觉模糊集构成的集合。

定义 2 设 X 是非空经典集合, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $A, B \in IFS[X]$, 且 $A = \{(x, \mu_A(x), v_A(x)) \mid x \in X\}$, $B = \{(x, \mu_B(x), v_B(x)) \mid x \in X\}$

规定:

(1) $A = B$, 当且仅当 $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ 和 $v_A(x) = v_B(x)$, $x \in X$;

(2) $A \leq B$, 当且仅当 $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ 和 $v_A(x) \geq v_B(x)$, $x \in X$;

(3) $A \cap B = \{(x, \mu_A(x) \wedge \mu_B(x), v_A(x) \vee v_B(x)) \mid x \in X\}$;

(4) $A \cup B = \{(x, \mu_A(x) \vee \mu_B(x), v_A(x) \wedge v_B(x)) \mid x \in X\}$ 。

定义 3 设 X 是非空经典集合, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $A, B \in IFS[X]$ 且 $A = \{(x, \mu_A(x), v_A(x)) \mid x \in X\}$, $B = \{(x, \mu_B(x), v_B(x)) \mid x \in X\}$, $\pi_A = 1 - \mu_A - v_A$, $\pi_B = 1 - \mu_B - v_B$, 则直觉模糊集 A, B 之间的距离定义为:

$$d_{IFS}(A, B) = \sqrt{\frac{1}{3}((\mu_A - \mu_B)^2 + (v_A - v_B)^2 + (\pi_A - \pi_B)^2)} \quad (1)$$

容易证明, 上述直觉模糊集 A, B 之间的距离 $d_{IFS}(A, B)$ 具有以下性质:

(1) $d_{IFS}(A, B) \geq 0$;

(2) $d_{IFS}(A, B) = d_{IFS}(B, A)$;

(3) $d_{IFS}(A, A) = 0$, $d_{IFS}(A, B) = 0$ 当且仅当 $A = B$;

(4) $d_{IFS}(A, C) \leq d_{IFS}(A, B) + d_{IFS}(B, C)$, 其中 $A, B, C \in IFC[X]$;

(5) 设 X 是非空经典集合, $A, B, C \in IFC[X]$, 当且仅当 B 比 C 更靠近 A 。

3 多属性决策的灰色关联分析法

依据灰色关联分析法的思想, 给出解决基于直觉模糊多属性决策灰色关联分析方法的计算步骤。

步骤 1: 对于直觉模糊集多属性决策问题, 方案 $A_i \in A$ ($i = 1, 2, \dots, m$) 关于属性 $G_j \in G$ ($j = 1, 2, \dots, n$) 进行测度, 得到 A_i 关于属性 G_j 的直觉模糊值 $\tilde{r}_{ij}$. 直觉模糊集多属性决策问题可表示为如下的直觉模糊集决策矩阵

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} \tilde{r}_{11} & \tilde{r}_{12} & \dots & \tilde{r}_{1n} \\ \tilde{r}_{21} & \tilde{r}_{22} & \dots & \tilde{r}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{r}_{m1} & \tilde{r}_{m2} & \dots & \tilde{r}_{mn} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$w = [w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_n]$$

其中, $\tilde{r}_{ij} = (\mu_{ij}, v_{ij})$, $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ 且 $0 \leq \mu_{ij} \leq 1, 0 \leq v_{ij} \leq 1, 0 \leq \mu_{ij} + v_{ij} \leq 1$. 并设 $\pi_{ij} = 1 - \mu_{ij} - v_{ij}$. w_j 表示评价属性 G_j ($j = 1, 2, \dots, n$) 的权重, $\sum_{j=1}^n w_j = 1$ 。

步骤 2: 定义模糊正理想解和负理想解。

正理想解为: $A^+ = (\tilde{r}_1^+, \tilde{r}_2^+, \dots, \tilde{r}_n^+)$ (3)

负理想解为: $A^- = (\tilde{r}_1^-, \tilde{r}_2^-, \dots, \tilde{r}_n^-)$ (4)

其中

$$\tilde{r}_j^+ = (\mu_j^+, v_j^+) = (\max_i \mu_{ij}, \min_i v_{ij}) \quad (5)$$

$$\tilde{r}_j^- = (\mu_j^-, v_j^-) = (\min_i \mu_{ij}, \max_i v_{ij}) \quad (6)$$

由上述确定正理想解和负理想解的过程, 容易证明 $\tilde{r}_j^+ = (\mu_j^+, v_j^+)$, $\tilde{r}_j^- = (\mu_j^-, v_j^-)$ 都是直觉模糊值, 其中 $0 \leq \mu_j^+ + v_j^+ \leq 1, 0 \leq \mu_j^- + v_j^- \leq 1$ 。

步骤 3: 计算每个方案对正、负理想解的灰色关联系数。

$$\xi_{ij}^+ = \frac{\min_i \min_j |\tilde{r}_{ij} - \tilde{r}_j^+| + \rho \max_i \max_j |\tilde{r}_{ij} - \tilde{r}_j^+|}{|\tilde{r}_{ij} - \tilde{r}_j^+| + \rho \max_i \max_j |\tilde{r}_{ij} - \tilde{r}_j^+|} \quad (7)$$

$$\xi_{ij}^- = \frac{\min_i \min_j |\tilde{r}_{ij} - \tilde{r}_j^-| + \rho \max_i \max_j |\tilde{r}_{ij} - \tilde{r}_j^-|}{|\tilde{r}_{ij} - \tilde{r}_j^-| + \rho \max_i \max_j |\tilde{r}_{ij} - \tilde{r}_j^-|} \quad (8)$$

其中:

$$\begin{aligned} & |\tilde{r}_{ij} - \tilde{r}_j^+| \\ &= \sqrt{\frac{1}{3}((\mu_{ij} - \mu_j^+)^2 + (v_{ij} - v_j^+)^2 + (\pi_{ij} - \pi_j^+)^2)} \\ & |\tilde{r}_{ij} - \tilde{r}_j^-| \\ &= \sqrt{\frac{1}{3}((\mu_{ij} - \mu_j^-)^2 + (v_{ij} - v_j^-)^2 + (\pi_{ij} - \pi_j^-)^2)} \end{aligned}$$

式中, ξ_{ij}^+ 和 ξ_{ij}^- 分别表示备选方案对正、负理想解的灰色关联系数. ρ 为分辨系数, $\rho \in [0, 1]$, 一般取 $\rho = 0.5$.

步骤 4: 计算每个备选方案对正、负理想解的关联度.

$$\xi_i^+ = \sum_{j=1}^n \xi_{ij}^+ w_j, \quad i = 1, 2, \dots, m \tag{9}$$

$$\xi_i^- = \sum_{j=1}^n \xi_{ij}^- w_j, \quad i = 1, 2, \dots, m \tag{10}$$

步骤 5: 计算备选方案对正理想解的相对关联度.

$$\xi_i = \frac{\xi_i^+}{\xi_i^+ + \xi_i^-}, \quad i = 1, 2, \dots, m \tag{11}$$

步骤 6: 方案排序.
依据相对关联度 ξ_i 对所有方案进行排序, 即 ξ_i 越大, 对应的方案越优.

4 实例分析

假定有 3 个备选方案 A_1, A_2, A_3 , 3 个评价属性 G_1, G_2, G_3 . 每个备选方案对属性的满足程度用直觉模糊数表示, 见表 1.

表 1 决策矩阵			
	$G_1(0.5)$	$G_2(0.3)$	$G_3(0.2)$
A_1	(0.5, 0.3, 0.2)	(0.2, 0.6, 0.2)	(0.3, 0.5, 0.2)
A_2	(0.4, 0.4, 0.2)	(0.3, 0.3, 0.4)	(0.9, 0.0, 0.1)
A_3	(0.4, 0.2, 0.4)	(0.5, 0.2, 0.3)	(0.8, 0.2, 0.0)

为了确定最优方案, 可采用前面给出的直觉模糊集多属性决策灰色关联分析法进行分析.

步骤 1: 由表 1 的数据建立直觉模糊决策矩阵.
$$\tilde{R} =$$

$$\begin{bmatrix} (0.5, 0.3, 0.2) & (0.2, 0.6, 0.2) & (0.3, 0.5, 0.2) \\ (0.4, 0.4, 0.2) & (0.3, 0.3, 0.4) & (0.9, 0.0, 0.1) \\ (0.4, 0.2, 0.4) & (0.5, 0.2, 0.3) & (0.8, 0.2, 0.0) \end{bmatrix}$$

步骤 2: 根据式(3) ~ (6) 确定直觉模糊正、理想方案.

$$A^+ = ((0.5, 0.2, 0.3), (0.5, 0.2, 0.3), (0.9, 0.0, 0.1))$$
$$A^- = ((0.4, 0.4, 0.2), (0.2, 0.6, 0.2), (0.3, 0.5, 0.2))$$

步骤 3: 根据式(7) ~ (8) 计算每个备选方案对正、负理想解的关联系数.

$$(\xi_{ij}^+)_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0.7357 & 0.4357 & 0.3333 \\ 0.6165 & 0.6165 & 1.0000 \\ 0.7357 & 1.0000 & 0.6165 \end{bmatrix}$$

$$(\xi_{ij}^-)_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0.7357 & 1.0000 & 1.0000 \\ 1.0000 & 0.5127 & 0.3333 \\ 0.5819 & 0.4357 & 0.3897 \end{bmatrix}$$

步骤 4: 根据式(9) ~ (10) 计算关联度.

$$\xi_1^+ = 0.565, \quad \xi_2^+ = 0.693, \quad \xi_3^+ = 0.791$$
$$\xi_1^- = 0.868, \quad \xi_2^- = 0.720, \quad \xi_3^- = 0.500$$

步骤 5: 根据式(11) 计算相对关联度.

$$\xi_1 = 0.394, \quad \xi_2 = 0.490, \quad \xi_3 = 0.613$$

步骤 6: 利用 $\xi_i (i = 1, 2, 3)$ 对决策方案进行排序.

所有方案的排序结果可以表示为: $A_3 > A_2 > A_1$. 可见方案 A_3 为最优方案.

5 结束语

为了解决直觉模糊环境下多属性决策问题, 文中将传统的灰色关联分析法推广到直觉模糊环境, 进而解决直觉模糊多属性决策问题. 最后通过实例分析说明了该方法的有效性.

参考文献:

[1] Zadeh L. A. Fuzzy sets [J]. Information and Control, 1965(8): 338—356.
[2] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986(20): 87—96.
[3] Tian Chun qiao, Zhang Qiang. Intuitionistic fuzzy sets method for fuzzy multiple attribute decision making [J]. Fuzzy systems and Mathematics, 2006, 20(5): 71—76.
[4] Deng J L. Grey System Theory[D]. Wuhan: press of Huazhong University of Science & Technology, 2002.

作者简介:

杨红军 男, (1979—), 助教, 工程硕士, 研究方向为计算机应用技术.
董 礼 男, (1983—), 助教, 学士, 研究方向为计算机应用技术.