

基于 B 样条小波的偏微分方程图像去噪方法

程东旭¹, 郑玉晖¹, 杨 艳²

(1 中原工学院 理学院, 河南 郑州 450007; 2 中原工学院 电子信息学院, 河南 郑州 450007)

摘 要: 提出一种基于 B 样条小波的偏微分方程图像去噪方法. 先对图像进行 B 样条小波变换, 将得到的高频系数采用偏微分方程方法去噪, 迭代次数采用去相关最优停止准则进行控制; 将得到的低频系数进行阈值处理, 阈值选取采用基于信息熵的阈值选择策略, 然后对处理后的小波系数进行 B 样条小波逆变换, 得到去噪后的图像. 数值实验表明, 改进算法能克服 B 样条小波变换与偏微分方程去噪的不足, 增强去噪能力, 同时有效保护图像边缘和细节信息.

关键词: B 样条小波; 偏微分方程; 图像去噪; 非线性扩散

中图分类号: TP391

文献标识码: A

文章编号: 1000-7180(2012)02-0184-04

Image De-noising Method of PDE Based on B-Spline Wavelet

CHENG Dong-xu¹, ZHENG Yu-hui¹, YANG Yan²

(1 College of Science, Zhongyuan University of Technology, Zhengzhou 450007, China;

2 School of Electrical and Information Engineering, Zhongyuan University of Technology, Zhengzhou 450007, China)

Abstract: The de-noising method of partial differential equations based on B-spline wavelet is proposed. The noisy image is processed by B-spline wavelet transform at first, then the high-frequency coefficients are processed by Partial Differential Equations method, and the iteration times are controlled by optimal stopping criterion of decorrelation. The low-frequency coefficients are processed by threshold method, and the threshold are selected by the strategy based on the information entropy. The de-noised image can be obtained after the inversion of B-spline wavelet transform. Numerical experiments show that the improved algorithm can overcome the lack of the B-spline wavelet transform and partial differential equations, enhance de-noising capacity, and protect the image edges and details effectively.

Key words: B-spline wavelet; partial differential equation(PDE); image de-noising; nonlinear diffusion

1 引言

随着科学技术的不断发展,越来越多的数据以图像的方式展示给大家,但是在图像的获取与传输过程中,由于技术设备等的限制,不可避免地会产生噪声,因此图像去噪成为数字图像处理的一个热点问题.

图像去噪作为图像的预处理过程,得到了广泛的研究,好的去噪方法在平滑噪声的同时又保护图像,不使图像的边缘轮廓模糊.早期的去噪方法主要

有空间域的低通滤波、中值滤波等方法,虽然在去除噪声方面有一定的效果,但是对于图像边缘的保护不够.近年来随着小波的发展,小波去噪与偏微分方程图像去噪算法^[1-3]得到了广泛的发展,小波去噪的成功主要得益于小波变换的良好性质,而基于变分偏微分方程的图像去噪方法,在去除噪声的同时能够很好的保护图像的边缘信息,已经成为近年来的研究热点.随着图像去噪技术的发展,将小波变换与偏微分方程相结合的图像去噪方法逐渐被提了出来.本文结合 B 样条小波变换与偏微分方程的特

收稿日期: 2011-05-18; 修回日期: 2011-07-25

基金项目: 河南省重点科技攻关项目(082100210041); 河南省自然科学基金基础研究计划项目(2007140020)

点,提出了一种基于B样条小波的偏微分方程图像去噪算法,实验表明,改进算法具有良好的去噪效果,同时能够很好的保护图像的边缘信息。

2 B样条小波变换原理

小波变换具有低熵性、多分辨率特性、去相关性和选基灵活性,从而使小波去噪成为一种实现简单且效果良好的去噪方法。最早的小波去噪方法是由Donoho^[4]于1995年提出的VisuShrink阈值去噪算法,其基本思想就是在小波分解后的各层系数中,对于模大于和小于某阈值 T 的系数分别处理,然后对处理后的小波系数进行小波逆变换得到去噪后的重构图像。

2.1 连续小波变换

一维连续小波变换为

$$(W_{\psi}f)(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt,$$

式中, $\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ 称为小波, a 为尺度因子,

b 为平移因子。设 $\psi(t)$ 是平方可积的实函数,满足

$$C_{\psi} = \int_0^{\infty} \frac{|F_{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < +\infty,$$

则对任意平方可积的实函数 $f(t)$ 均有

$$f(t) = \frac{1}{C_{\psi}} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (W_{\psi}f)(a,b) |a|^{-\frac{1}{2}}$$

$$\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{da db}{a^2}$$

称为连续小波逆变换。

2.2 B样条小波

B样条函数是一类分段光滑且在各段连接处具有一定光滑性的函数,可以表示成变量 t 的多项式,具有最小的支撑长度,有利于计算机实时处理。

把分段常数空间记为 S_1 ,分段多项式空间记为 S_m , m 是多项式的阶数, m 阶B样条是Haar尺度函数与其自身做 m 次卷积运算后所得到的函数,记为 $N_m(t)$,则

$$N_1(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$N_m(t) = N_{m-1}(t) * N_1(t)$$

$$= N_{m-2}(t) * N_1(t) * N_1(t) \cdots$$

$$= N_1(t) * N_1(t) * \cdots * N_1(t)$$

因此,B样条有如下递推公式:

$$N_m(t) = \frac{t}{m-1} N_{m-1}(t) + \frac{m-t}{m-1} N_{m-1}(t-1).$$

$N_m(t)$ 称为基数B样条函数,其双尺度方程如下:

$$\phi_m(t) = \sum_{k=0}^m 2^{-(m-1)} C_m^k N_m(2t-k)$$

从而,B样条小波 $\psi_m(t)$ 的表达式为

$$\psi_m(t) = 2^{-(m-1)} \sum_{k=0}^{2m-2} (-1)^k N_{2m}(k+1) N_{2m}^{(m)}(2t-k)$$

式中, $N_{2m}^{(m)}(2t-k)$ 表示 $N_{2m}(k+1)$ 的 m 阶导数。

3 B样条小波去噪主要步骤

B样条小波去噪法分为以下步骤:

(1)采用B样条小波将二维图像信号先逐行做一维B样条小波变换,分解为 L, H 两个分量,再逐列做一维B样条小波变换,分解为 LL, LH, HL, HH 四个分量, L 和 H 分别表示低通和高通滤波输出。依此进行下去,将含噪图像分解至第 j 层,得到相应的小波分解系数;如图1所示。

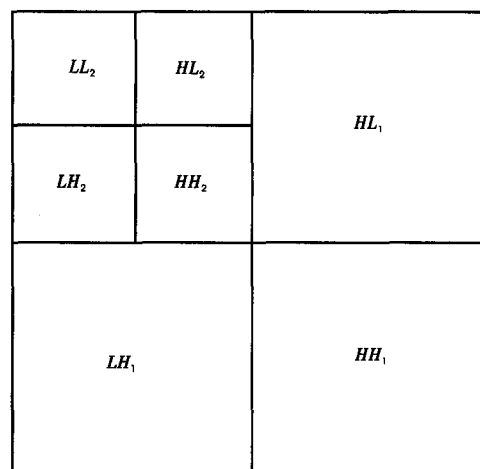


图1 图像的小波分解示意图

(2)对分解得到的B样条小波系数进行阈值处理,得到纯净信号B样条小波系数的估值;

阈值函数采用如下方式定义:

硬阈值函数:

$$\sigma_{\lambda}(\omega) = \begin{cases} \omega, & |\omega| > \lambda \\ 0, & |\omega| \leq \lambda \end{cases}$$

软阈值函数:

$$\sigma_{\lambda}(\omega) = \begin{cases} \text{sgn}(\omega)(|\omega| - \lambda), & |\omega| > \lambda \\ 0, & |\omega| \leq \lambda \end{cases}$$

式中, ω 为B样条小波系数, λ 为阈值。

(3)将经过阈值处理的B样条小波系数估值进行重构,得到恢复的图像。

B 样条小波阈值法去噪的优点是噪声几乎完全得到抑制, 计算速度快, 但是在图像不连续的地方去噪后会出现吉布斯现象。

4 偏微分方程图像去噪

对算术平均值滤波进行简单的推广后, 发现算术平均值滤波器经局部化和迭代作用的极限状态是热传导方程初值问题的解, 同时所有的线性滤波器都具有相同的特性, 从而利用偏微分方程可以将所有的线性滤波器归为一类, 这促进了基于偏微分方程的图像去噪方法与理论的研究。

4.1 热传导方程

考虑如下热传导偏微分方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x, y) = \Delta u(t, x, y), t \geq 0, (x, y) \in R^2 \\ u(0, x, y) = u_0(x, y) \end{cases}$$

式中, $u_0(x, y)$ 是含噪声的灰度图像, $u(t, x, y)$ 是随时间演化的图像。

热方程的解为

$$u(t, x, y) = G_{\sqrt{2t}}(x, y) * u_0(x, y)$$

式中, $G_{\sigma}(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right)$, 即热方程在 t 时刻的解相当于用 Gauss 函数 $G_{\sigma=\sqrt{2t}}$ 对初始图像 $u_0(x, y)$ 做 Gauss 低通滤波, σ 表示尺度参数。它利用 Gauss 函数对邻域内的点进行加权平均实现去噪, 因此热扩散方程保留原始图像的低频成分, 滤除高频成分。但热方程是一个各向同性扩散方程, 具有磨光作用, 虽然能去除噪声, 但不能保护边缘, 随着 t 和尺度 σ 的增大磨光程度越大。

4.2 Perona-Malik 模型

由于线性热扩散方程在去噪的同时磨光了边缘, 人们继而去研究非线性扩散, 1990 年 Perona 和 Malik 提出了如下的 P-M 模型^[5]:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(c(|\nabla u|^2) \nabla u) \\ u(0, x, y) = u_0(x, y) \end{cases}$$

式中, $c(|\nabla u|^2)$ 称为扩散率函数, 当 $c(|\nabla u|^2) \equiv 1$ 时, 退化为热方程。

扩散率函数 $c(|\nabla u|^2)$ 需要满足:

(1) $c(|\nabla u|^2)$ 是以 $|\nabla u|^2$ 为自变量的非增函数, 并且有 $c(|\nabla u|^2) > 0$;

(2) $|\nabla u|^2 \rightarrow 0, c(|\nabla u|^2) \rightarrow 1$;

(3) $|\nabla u|^2 \rightarrow +\infty, c(|\nabla u|^2) \rightarrow 0$;

通常取扩散率函数 $c(|\nabla u|^2)$ 如下:

$$c(|\nabla u|^2) = \frac{1}{1 + |\nabla u|^2/k} \text{ 或 } c(|\nabla u|^2) = e^{-|\nabla u|^2/k}.$$

P-M 模型在图像梯度较大的地方, 扩散较小; 在图像梯度较小的地方, 扩散较大。这样就可以在滤除噪声的同时在一定程度上保护边界。但是 P-M 模型的平滑效果较差, 容易出现图像集块或阶梯现象 (也叫“块效应”), 边缘保持的效果也不理想, 而且无法滤除边界上的噪声 (在边界处的扩散几乎为零), 故图像的失真度较大。

4.3 改进的各向异性扩散模型

基于 P-M 模型的以上缺点, Catte 等^[6]在 1992 年提出了如下的改进模型:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(c(|\nabla G_{\sigma} * u|) \nabla u) \\ u(0, x, y) = u_0(x, y) \end{cases},$$

式中, G_{σ} 为方差为 σ 的高斯函数, 改进算法每一步迭代都要进行一次高斯平滑, 增大了计算开销, 使得算法的效率大大降低。同时扩散率函数中的高斯卷积处理实际为对原始图像的各向同性扩散。因此该算法仍有其不足之处。

5 基于 B 样条小波的偏微分方程图像去噪

基于以上分析, 无论是 B 样条小波去噪还是偏微分方程方法去噪都有其不足之处, 结合以上图像去噪算法, 提出一种改进的去噪算法——基于 B 样条小波的偏微分方程去噪算法。

算法基本步骤如下:

(1) 选择 B 样条小波基和小波分解的层数 j , 对含噪图像进行 B 样条小波分解至第 j 层, 得到相应的 B 样条小波分解系数;

(2) 分别对第 j 层的低频图像和第一层到第 j 层的高频图像采用改进的非线性各向异性扩散模型进行处理, 迭代停止准则采用去相关最优停止准则^[7]。

相关系数计算方法如下:

$$\operatorname{corr}(u_0 - u_t, u_t) = \frac{|\operatorname{cov}(u_0 - u_t, u_t)|}{\sqrt{\operatorname{var}(u_0 - u_t) \cdot \operatorname{var}(u_t)}}.$$

其中

$$\operatorname{cov}(u_0 - u_t, u_t) = E\{[(u_0 - u_t) - \overline{(u_0 - u_t)}] \cdot [u_t - \overline{u_t}]\},$$

$$\operatorname{var}(u_0 - u_t) = E\{[(u_0 - u_t) - \overline{(u_0 - u_t)}]^2\},$$

$$\operatorname{var}(u_t) = E[(u_t - \overline{u_t})^2].$$

选择迭代的最优停止时间 T 使得相关系数

$\text{corr}(u_0 - u_t, u_t)$ 达到最小;

(3) 分别对第 j 层的高频图像和第一层到第 j 层的低频图像进行阈值处理. 根据各层获得的 B 样条小波系数选用局部阈值进行去噪, 采用基于信息熵的阈值选择策略^[8]来获取阈值;

(4) 对上述处理后的 B 样条小波系数进行小波逆变换, 得到去噪后的图像.



(a) 原始图像 (b) 含噪图像 (c) B 样条小波去噪 (d) 改进 P-M 模型去噪 (e) 本文算法

图 2 各种算法去噪效果

表 1 所示为各种图像的峰值信噪比数据, 峰值信噪比计算公式如下:

$\text{PSNR} = 10\lg$

$$\frac{255^2}{\frac{1}{MN} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N [f(m,n) - g(m,n)]^2}$$

式中, $f(m,n)$ 为原始图像, 大小为 $M \times N$, 灰度取值范围为 $0 \sim 255$, $g(m,n)$ 为处理后的复原图像.

表 1 采用不同算法去噪时的数据比较

实验数据	加噪图像	B 样条小波去噪	P-M 模型	本文算法
PSNR	20.462	23.345	24.581	26.558

由实验结果可以看出, B 样条小波去噪法在边缘等不连续处, 效果不好, 出现跳跃现象; 改进的 P-M 方程去噪效果较好, 但容易产生阶梯效应, 而本文提出的改进算法综合了以上两种算法的优点, 在保护边缘的同时, 达到了较好的去噪效果, 同时有效的避免了阶梯效应.

7 结束语

本文结合小波变换和偏微分方程去噪算法, 提出了一种改进的基于 B 样条小波和偏微分方程的综合去噪算法, 不仅有效提高了去噪效果, 同时能够很好的保护图像信息. 对基于小波变换与偏微分方程之间的关系的理论分析仍有待进一步的研究.

6 数值实验及分析

采用 Lena 图像来考察改进算法的去噪效果, 对原图像加入 Gauss 噪声, 分别采用 B 样条小波变换、偏微分方程方法和本文的改进算法进行去噪, 结果如图 2 所示.

参考文献:

[1] 冯象初, 王卫卫. 图像处理的变分和偏微分方程方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2009.

[2] 吴昌东, 江桦. 基于提升小波的自适应阈值图像去噪方法 [J]. 微电子学与计算机, 2010, 27(12): 18-21.

[3] 郭茂银, 田有先. 基于四阶偏微分方程的并行图像去噪算法 [J]. 微电子学与计算机, 2011, 28(2): 162-165.

[4] Donoho D L, Johnstone I. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage [J]. Amer J. Statist Assoc, 1995, 90(432): 1200-1224.

[5] Perona P, Malik J. Scale space and edge detection using anisotropic diffusion [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1990, 12(7): 629-639.

[6] Catté F, Lions P L, Morel J M, et al. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion [J]. SIAMJ. Numerical Analysis, 1992, 29(1): 182-193.

[7] 李世飞, 董福安. 偏微分方程图像平滑模型的一种最优停止准则 [J]. 计算机仿真, 2005, 22(11): 181-183.

[8] 吴成茂. 基于加权香农熵的图像阈值法 [J]. 计算机工程与应用, 2008, 44(18): 177-180.

作者简介:

程东旭 男, (1980—), 讲师. 研究方向为图形图像处理.

郑玉晖 女, (1981—), 讲师. 研究方向为大型线性方程组的数值解法.

杨 艳 女, (1982—), 助教. 研究方向为信号与信息处理.