

一维非均匀采样信号可变稀疏度傅里叶重建算法研究

周亚同, 张 伟, 杨瑞霞

(河北工业大学 信息工程学院, 天津 300401)

摘 要: 非均匀采样信号重建在很多领域得到了广泛应用. 传统的最小范数傅里叶重建(FRMN)算法具有原理直观、假设前提少等优点,但不能进行稀疏重建. 本文提出一种新的可变稀疏度傅里叶重建(FRVS)算法,并利用贝叶斯推理赋予其概率解释. FRVS通过引入稀疏约束矩阵,不仅在 FRMN 的基础上融入了稀疏重建思想,而且求解形式与 FRMN 相同. 一维复杂理论信号重建实验表明,FRVS 比 FRMN 具有更高的重建精度. 最后将 FRVS 重建算法用于实际医学心电图信号重建,结果表明 FRVS 能解决实际重建问题,在重建过程中需选择合适的稀疏度参数.

关键词: 非均匀采样;信号重建;可变稀疏度

中图分类号: TP18

文献标识码: A

文章编号: 1000-7180(2012)07-0188-04

One Dimensional Non-uniformly Sampled Signal's Fourier Reconstruction with Variable Sparseness

ZHOU Ya-tong, ZHANG Wei, YANG Rui-xia

(School of Information Engineering, Hebei University of Technology, Tianjin 300401, China)

Abstract: The reconstruction of non-uniformly sampled signal is needed very frequently in many applications in several diverse areas. The strengths of traditional Fourier reconstruction with minimum norm (FRMN) algorithm are that it is theoretically straightforward, and requires few assumptions. However, it is can not be used for sparse reconstruction. This paper proposes a novel Fourier reconstruction with variable sparseness (FRVS) algorithm. And the algorithm's probability interpretation is given based on the Bayesian inference. By introducing sparse constrained matrix, the idea of sparse reconstruction is integrated into the FRVS. Moreover, the FRVS owns the same solving form as FRMN. Experiments on the reconstruction of 1D complex theoretic signal show that FRVS has higher reconstruction accuracy than FRMN. Finally, FRVS is applied to the reconstruction of practical electrocardiogram (ECG) signal. The results illustrate FRVS can solve practical reconstruction problem, and it is necessary to select suitable sparseness parameter in the reconstruction.

Key words: non-uniformly sampling; signal reconstruction; variable sparseness

1 引言

目前的数字信号处理方法几乎都以均匀采样为前提.但在许多实际工程应用中由于受各种因素影响,采样间隔往往是非均匀的^[1].在这种情形下,传统的数字信号处理方法不再适用^[2-3].以非均匀采样信号的重建为例,传统的香农重建公式已无法完成重建任务,此时可采用如下两种策略进行重建:其一

是在平移不变空间中,利用标架或 Riesz 基作为重建工具^[4];其二是设计新的样条基函数作,以便更好地适应非均匀采样结构^[5].

与以上两种策略不同,Duijndam 另辟蹊径提出一种非均匀采样信号的最小范数傅里叶重建(FRMN)算法^[6].FRMN 利用时空域已知非均匀采样信息来估计傅氏域未知的均匀采样频谱,然后借助逆傅氏变换将之变换回时空域完成重建,具有原

收稿日期: 2012-01-10; 修回日期: 2012-02-08

基金项目: 国家自然科学基金(60972106);中国博士后科学基金(20090450750);天津市自然科学基金(11JCYBJC00900)

理直观、假设前提少等优点.但 FRMN 并不是一种稀疏重建算法.稀疏重建近年受到高度关注,它能以尽可能少的变换域系数表示原信号并完成重建,具有计算速度快、所需存储量小等优点,和压缩感知(compressive sensing)等概念具有紧密联系^[7].鉴于以上事实,本文提出一种新的可变稀疏度傅里叶重建(FRVS)算法,该算法通过引入稀疏约束矩阵,在 FRMN 的基础上融入稀疏重建思想,使之同时具备二者的优点.

2 非均匀采样信号最小范数傅里叶重建算法简要回顾

考虑一维非均匀采样情形:已知某空间域非均匀采样序列 $(x_0, x_1, \dots, x_n, \dots, x_{N-1})$,对应的非均匀离散逆傅氏变换可写成

$$f(x_n) = \frac{\Delta k_x}{2\pi} \sum_{m=-M}^M \tilde{P}(m\Delta k_x) e^{-jm\Delta k_x x_n} \quad (1)$$

式中, $f(x_n)$ 是采样点 x_n 处的已知采样数值, $\tilde{P}(m\Delta k_x)$ 是待估计的傅氏谱, N 为空间域总采样点数, M 为傅氏域采样点数.若同时考虑非均匀采样序列中的所有样本,则式(1)可写成如下

$$y = A\tilde{p} \quad (2)$$

式中,矩阵 y 、 $\tilde{p}$ 以及 A 各自的元素分别为 $y_n = f(x_n)$, $\tilde{p}_m = \tilde{P}(m\Delta k_x)$, $A_{nm} = (\Delta k_x/2\pi) e^{-jm\Delta k_x x_n}$.FRMN 采用如下数学规划来估计傅氏谱 $\tilde{p}$

$$\min J = \frac{1}{k^2} \|W^{1/2}(y - A\tilde{p})\|_2^2 + \|\tilde{p}\|_2^2 \quad (3)$$

式中, $\|\cdot\|_2$ 代表 L_2 范数约束,对角阵 W 携带非均匀采样信息,其元素定义为 $W_m = \Delta x_n = (x_{n+1} - x_{n-1})/2$.系数 k^2 的最佳取值为 $k^2 = (F\Delta k_x M_p)/(2\pi N)$,其中 F 为一常数,另一常数 $M_p = 2M+1$.

FRMN 通过求解数学规划式(3)可得傅氏谱 $\tilde{p}$ 的估计为

$$\hat{\tilde{p}} = (A^H W A + k^2 I)^{-1} (A^H W y) \quad (4)$$

根据式(4)估计傅氏谱的过程中由于涉及求逆计算,运算量很大.令矩阵 $H = A^H W A + k^2 I$, $b = A^H W y$,先将式(4)转化为求解方程组 $H\tilde{p} = b$,然后借助共轭梯度法求出 $\tilde{p}$.当傅氏谱 $\tilde{p}$ 求出后,则可通过逆傅氏变换将之变换到时空域,从而完成非均匀采样信号的重建.对应的重建公式为

$$\hat{p}_r = A_r \hat{\tilde{p}} = A_r (A^H W A + k^2 I)^{-1} A^H W y \quad (5)$$

式中, A_r 为执行逆傅氏变换的矩阵.

3 非均匀采样信号可变稀疏度傅里叶重建算法

由于 FRMN 不能进行稀疏重建,本文提出一种可变稀疏度傅里叶重建(FRVS)算法.为此首先引入一个稀疏约束矩阵 Q

$$\min J = \frac{1}{k^2} \|W^{1/2}(y - A\tilde{p})\|_2^2 + \|Q^{1/2}\tilde{p}\|_2^2 \quad (6)$$

其中矩阵 Q 是一个对角阵,其第 m 个元素定义为

$$[Q]_{mm} = \left(1 + \frac{\tilde{p}_m \tilde{p}_m^*}{2\sigma_p^2}\right)^\alpha$$

式中,参数 α 是稀疏度大小的一种度量.求解式(6)可得傅氏谱 $\tilde{p}$ 的估计为

$$\hat{\tilde{p}} = (A^H W A + k^2 Q)^{-1} (A^H W y) \quad (7)$$

上面即 FRVS 算法的基本原理.通过对比式(7)与式(4)可以发现,二者的差别在于用矩阵 Q 取代了单位矩阵 I ,这样就能将稀疏约束思想融入算法.由于式(7)中的矩阵 Q 含有傅氏谱 $\tilde{p}$ 的成分,因此 FRVS 的求解比 FRMN 要复杂一些,采用迭代方式求解即可.

也可将式(7)化成如式(4)那样的标准形式.为此令 $\tilde{r} = Q^{1/2}\tilde{p}$ 后带入式(6)后得

$$\min J = \frac{1}{k^2} \|W^{1/2}(y - B\tilde{r})\|_2^2 + \|\tilde{r}\|_2^2 \quad (8)$$

式中 $B = A Q^{-1/2}$.对比式(8)和(3)后发现二者形式相同,因此式(8)的解为

$$\hat{\tilde{r}} = (B^H W B + k^2 I)^{-1} (B^H W y) \quad (9)$$

对比式(4)和(9)式可发现,FRVS 与 FRMN 的求谱公式可以统一成相同的形式.

基于贝叶斯推理,还可以赋予 FRVS 算法概率解释.为此令待估计傅氏谱 $\tilde{p}$ 的先验为

$$P(\tilde{p}|\sigma_p) = \prod_m P(\tilde{p}_m|\sigma_p) = \prod_k \left(1 + \frac{\tilde{p}_m \tilde{p}_m^*}{2\sigma_p^2}\right)^{-\alpha}$$

类似地假设各采样点数值值的似然为

$$P(y|\tilde{p}, \sigma_n) = \left(\frac{1}{2k^2}\right)^{\frac{N-1}{2}} \exp\left(-\frac{\|y - A\tilde{p}\|_2^2}{2k^2}\right)$$

根据贝叶斯公式,在已知先验和似然的前提下可得后验.再对后验取对数得

$$L(\tilde{p}) = \sum_{m=0}^{M-1} \ln\left(1 + \frac{\tilde{p}_m \tilde{p}_m^*}{2\sigma_p^2}\right)^{-\alpha} + \frac{1}{2k^2} (y - A\tilde{p})^H (y - A\tilde{p})$$

最后根据 MAP 估计即通过求上式的极值,同

样能求取 $\tilde{p}$, 且解的表达式与式(7)相同.

4 实验结果及分析

为了验证算法的有效性, 特设计如下两个实验. 其中实验一用于比较 FRVS 与 FRMN 间的重建效果, 实验二用于展示 FRVS 采用不同稀疏度参数时的重建结果.

实验一: 一维理论信号的非均匀采样及重建

首先构建某一维复杂的理论原始信号, 其表达式为

$$f(x) = 0.2\sqrt{x} \cdot \sin(2\pi k_0 x) + 0.2\cos(6\pi k_0 x) \cdot x^3 - 0.4\arctan(1.9\pi k_0 x) \cdot e^{0.3x} \cdot \sin(7\pi k_0 x) + \sin(4\pi k_0 x) \cdot e^{-0.6x}$$

式中, 令 $k_0 = 4$. 该信号在图 1 中用虚线表示, 然后对之非均匀采样, 得到 100 个采样点 (即 $N=100$), 图 1 中的小圆点展示了所采用的非均匀采样方案.

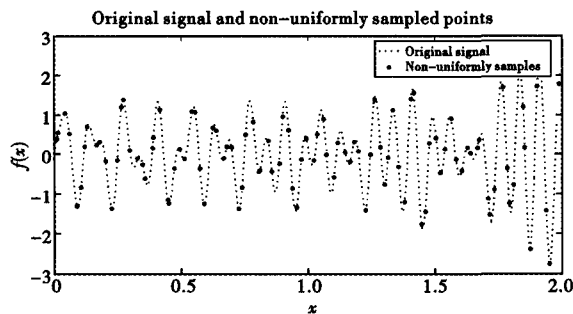


图 1 一维原始理论信号及非均匀采样点

现根据图 1 中的非均匀采样点, 分别用 FRMN 和 FRVS 算法重建信号, 重建结果如图 2 所示. 在重建中各参数设置为 $M=35$, 常数 $F=0.3$, 最大迭代次数设为 6, 稀疏度参数 $\alpha=0.5$. 从图 2 可看出, FRVS 的重建结果比 FRMN 更接近原始信号, 即 FRVS 的重建精度更高. 将图 2 中的框内区域局部放大后显示于图 3 中, 可更清楚看出二者的重建效果.

实验二: 实际医学心电图信号的非均匀采样及重建

首先采集一个实际医学心电图信号并将之绘于图 4 中. 然后对之非均匀采样, 得到 50 个采样点 (即 $N=50$), 小圆点展示了所采用的非均匀采样方案. 从图中看出实际心电图信号含有近似周期性尖脉冲, 且采样点数很少, 因此重建难度比实验一大得多.

基于图 4 中的非均匀采样点, 用 FRVS 算法重建信号并将结果绘于图 5 中. 在重建中各参数设置

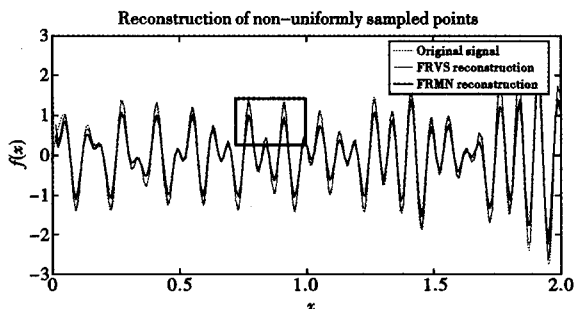


图 2 两种重建算法的重建结果比较

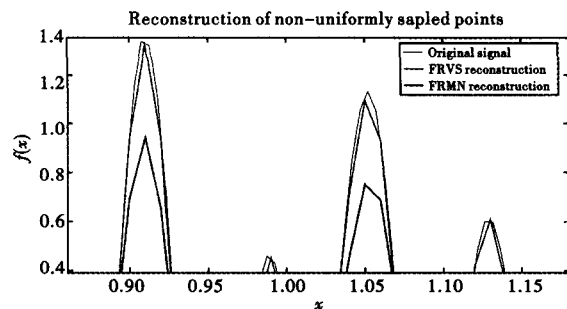


图 3 两种重建算法的重建结果比较

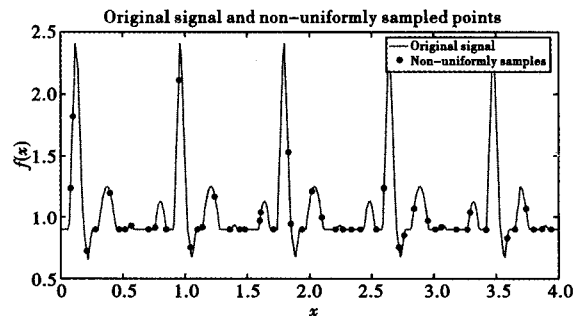


图 4 一维实际医学心电图信号及非均匀采样点

为 $M=25$, 常数 $F=0.1$, 最大迭代次数设为 6. 从图 5 可看出, FRVS 的重建性能受稀疏度参数 α 影响较大. 当 α 过小 (如 $\alpha=0.5$) 或 α 过大 (如 $\alpha=2$) 时, 均不能很好重建. 只有选择合适的 α (如 $\alpha=1$), 才能获得满意的重建结果. 图 6 是图 5 框内区域的局部

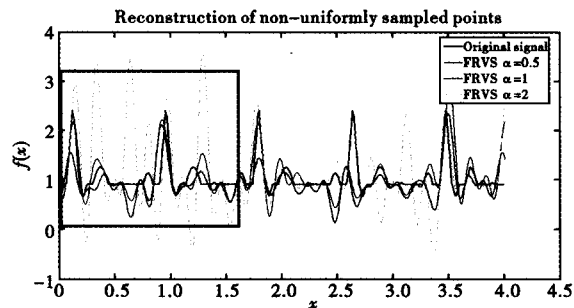


图 5 两种重建算法的重建结果比较

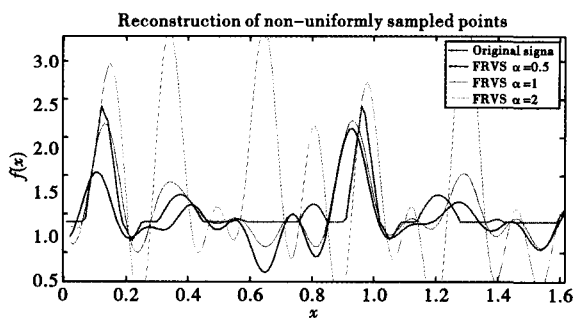


图6 两种重建算法的重建结果比较

放大,从图6中能更清晰看到这一点.值得指出的是,图6中 $\alpha=2$ 时因稀疏度过大,重建结果严重偏离原始信号,此时FRVS算法重建失败.

5 结束语

针对最小范数傅里叶重建(FRMN)算法不能进行稀疏重建这一事实,本文在FRMN的基础上融入稀疏重建思想,通过引入稀疏约束矩阵,提出一种新的可变稀疏度傅里叶重建(FRVS)算法,并利用贝叶斯推理赋予其概率解释.实验表明FRVS能解决实际重建问题,并且比FRMN具有更高的重建精度,但在重建过程中需选择合适的稀疏度参数.下一步工作是将本文提出的一维重建算法推广至多维.

参考文献:

- [1] Farokh Marvasti. Nonuniform sampling: theory and practice[M]. Kluwer Academic/Plenum Publisher, New York, 2001.
- [2] Unser M. Sampling—50 years after shannon[J]. Proceedings of the IEEE, 2000, 88(4), 569-587.
- [3] 初仁辛,孙圣和. 非均匀采样信号理论及其发展. 电子商务,1997(7): 2-4.
- [4] Aldroubi A, Grochenig K. Non-uniform sampling and reconstruction in shift invariant spaces [J]. SIAM Rev, 2001(43): 585-620.
- [5] Oleksii Vyacheslav Morozov, Michael Unser. Reconstruction of large, irregularly sampled multidimensional images a tensor-based approach[J]. IEEE Trans Medical Imaging, 2011, 30(2), 366-374.
- [6] Duijndam A J W, Schonewille M A, Hindriks C O H. Reconstruction of band-limited signals, irregularly sampled along one spatial direction[J]. Geophysics. 1999, 64(2): 524-538.
- [7] Richard G Baraniuk. Compressive sensing[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2007:118-120.

作者简介:

周亚同 男,(1973—),副教授.研究方向为智能信息处理、非均匀采样信号处理.

张伟 女,(1978—),硕士研究生.研究方向为智能信息处理、非均匀采样信号处理.

杨瑞霞 男,(1957—),教授.研究方向为电子材料与器件.