

格雷码的反码、补码与带符号格雷码的补码

李正生^{1,2}, 马文彦², 闫 杰¹

(1 西北工业大学 航天学院, 陕西 西安 710072; 2 第二炮兵工程大学 一系, 陕西 西安 710025)

摘 要: 针对格雷码算法较少的问题, 研究了格雷码的求反、取补和带符号格雷码的补码表示. 得到了首位取反即为格雷码的反码, 再加 1 即为格雷码的补码的结论. 补码表示的带符号格雷码的符号位的权为 -1 , n 位二进制补码符号位的权为 -2^{n-1} . 这些研究结果将会给格雷码的计算机运算带来方便.

关键词: 格雷码; 反码; 补码; 带符号数; 权

中图分类号: TP301.6

文献标识码: A

文章编号: 1000-7180(2013)05-0129-03

1's Complement and 2's Complement of Gray Code and 2's Complement of Signed Gray Code

LI Zheng-sheng^{1,2}, MA Wen-yan², YAN Jie¹

(1 College of Astronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China;

2 First Department, Second Artillery Engineering University, Xi'an 710025, China)

Abstract: For enriching Gray code algorithm, the negation and complement of Gray code and the 2's complement representation of signed Gray code are studied. The conclusion of negating the first bit of Gray code is its 1's complement and then adding 1 is its 2's complement is gotten. The weight of symbol bit of signed Gray code is -1 , and weight of symbol bit of signed binary is -2^{n-1} .

Key words: Gray code; 1's complement; 2's complement; signed number; weight

1 引言

格雷码(Gray code)因 1953 年公开的 Frank Gray 专利“Pulse Code Communication”^[1]而得名. 它具有反首反射、单位距离、整体循环和首位自补等四大特性, 在很多领域和场合得到了广泛的应用(见表 1).

经过 60 年的应用研究, 很多格雷码的实用技术已经比较成熟. 但相对而言, 对格雷码的理论研究偏少, 相关算法不多, 用计算机处理起来有些麻烦, 因而有必要对其数学特性进行更多的深入研究.

2 格雷码数学基础

2.1 格雷码的权

众所周知, 自然二进制数是一种有权码. 设二进

制数最低位为 $i=1$, 则权为 2^{i-1} , 其十进制值为

$$D = \sum_{i=1}^n B_i 2^{i-1} \quad (1)$$

格雷码是一种准权码. 设格雷码最低位为 $i=1$, 则格雷码的权的绝对值为 2^i-1 , (为 1 的位)符号从高到低正负交替^[1-8]. 若 K_i 表示 G_i 前 1 的个数, 则

表 1 格雷码应用示例

应用领域	具体事例
数字通信	4/16/64QAM 调制的统一星座标签 ^[2]
自动控制	格雷码计数器 ^[3] 、PDC(位置数字转换)、TDC(时间数字转换)、ADC、DAC
数理逻辑	真值表、卡诺图 ^[4] 、哈密顿图、d 立方
智力玩具	九连环 ^[5] 、汉诺塔 ^[6] 、十六进制难题、回形滑 行难题(又叫疯像跳舞)
数学问题	沃尔什函数的构造 ^[7] 、非线性极大极小问题 和多峰值问题遗传算法求解 ^[8]

$$D = \sum_{i=1}^n G_i (-1)^{K_i} (2^i - 1) \quad (2)$$

格雷码十进制数转换式还可以写成式 2' 形式.

$$D = \begin{cases} \sum_{i=1}^n G_i (-1)^{K_i} 2^i, & \text{格雷码有偶数个 1} \\ \sum_{i=1}^n G_i (-1)^{K_i} 2^i - 1, & \text{格雷码有奇数个 1} \end{cases} \quad (2')$$

例 1: $10000_G = 2^5 - 1 = 31$

例 2: $10010_G = (2^5 - 1) - (2^2 - 1) = 2^5 - 2^2 = 28$

2.2 格雷码的整数奇偶性

格雷码的整数奇偶性与其 1 数奇偶性相同^[9].

可以根据奇偶产生器的奇产生值进行判断.

例 3: 10000_G 含有 1 个 1, 是奇数

例 4: 10010_G 含有 2 个 1, 是偶数

2.3 格雷码加 1

若仅首位 1, 将其置为 0; 偶数变末位, 奇变末 1 前^[5]; 格雷码加 1 时, 若仅最高位为 1, 将最高位变为 0; 否则, 若原数中 1 的个数为偶数, 则末位发生变化; 若 1 的个数为奇数, 则最后的 1 前边那位发生变化.

对于八位格雷码, 则有

例 5: $10000000_G + 1 = 00000000_G$

例 6: $11001010_G + 1 = 11001011_G$

例 7: $11000011_G + 1 = 11000010_G$

例 8: $01101011_G + 1 = 01101001_G$

例 9: $01101110_G + 1 = 01101010_G$

2.4 格雷码减 1

如果全为 0, 首位置成 1; 奇数变末位, 偶变末 1 前^[5].

3 格雷码的反码

一个计数器的容量称为模数 M . 如一个 n 位的 L 进制计数器, 从 0 到最大计数

$$M_c = L^n - 1 \quad (3)$$

最多能计 L^n 个数, 所以其模数为

$$M = L^n = M_c + 1 \quad (4)$$

最大计数 M_c 与任意数 A 之差

$$\bar{A} = M_c - A \quad (5)$$

称为 A 的反码.

对于 n 位格雷码二进制计数器来说, $M = 2^n$, $M_c = 2^n - 1$, 与 n 位自然二进制计数器相同.

若令格雷码第 i 位 G_i 的反码为

$$\bar{G}_n = 1 - G_n \quad (6)$$

设有一个 n 位格雷码 D_G 的首位为 G_n , 其余位为 D'_G , 即

$$D_G = G_n(2^n - 1) + D'_G$$

若将其首位取反令为

$$\bar{D}_G = \bar{G}_n(2^n - 1) - D'_G$$

则 $D_G + \bar{D}_G = (G_n + \bar{G}_n)(2^n - 1)$

据式(6) 有 $D_G + \bar{D}_G = 2^n - 1 = M_c$

$$\text{即 } \bar{D}_G = M_c - D_G \quad (7)$$

根据式(5)、式(7) 表明 $\bar{D}_G$ 是原码 D_G 的反码, 即:

将最高位取反可得到格雷码的反码.

例 10: $1xxxxxxx_G$ 与 $0xxxxxxx_G$ 互为反码.

4 格雷码的补码

模数 M 与任意数 A 之差

$$A^* = M - A \quad (8)$$

称为 A 的补码.

根据式(4) 和式(5), 可得

$$A^* = (M_c + 1) - A = (M_c - A) + 1$$

$$\text{即 } A^* = \bar{A} + 1 \quad (9)$$

式(9) 表明补码等于反码加一. 即:

将最高位取反后加 1 可得到格雷码的补码.

$$\begin{aligned} \text{例 11: } 10001011_G^* &= 00001011_G + 1 \\ &= 00001001_G \end{aligned}$$

$$\text{验证: } 242_D + 14_D = 256_D$$

$$\begin{aligned} \text{例 12: } 01001001_G^* &= 11001001_G + 1 \\ &= 11001000_G \end{aligned}$$

$$\text{验证: } 113_D + 143_D = 256_D$$

5 带符号格雷码

在某些场合, 譬如负角度显示、负尺度显示等, 有时需要使用有正负符号的格雷码. 带符号数有原码、反码和补码 3 种表示方法^[7], 由于补码表示回避了 0 有两种表示形式的问题特别是循环进位的需要, 格雷码的负数表示一般使用补码形式, 见表 2.

6 带符号二进制数和格雷码符号位的权值

补码表示的带符号数的首位不仅用来表示这是一个负数, 它也是有固定权值的: n 位带符号二进制数的符号位的权为 -2^{n-1} ; 带符号格雷码的符号位的权为 -1 . 推导过程如下.

6.1 带符号二进制数符号位的权值

某个 n 位数 D 与其补码 D^* 之和在无符号数中

为其模 M ; 在带符号数中, 数 D_S 与其补码 D_S^* 之和为 0, 即

$$D_S + D_S^* = 0 \quad (10)$$

根据式(9), 有

$$D_S^* = \overline{D_S} + 1$$

$$\text{故可得 } D_S + \overline{D_S} + 1 = 0 \quad (11)$$

表 2 补码表示的带符号二进制数和格雷码

十进制数	带符号二进制码	带符号格雷码
-8	1000	1100
-7	1001	1101
-6	1010	1111
-5	1011	1110
-4	1100	1010
-3	1101	1011
-2	1110	1001
-1	1111	1000
0	0000	0000
1	0001	0001
2	0010	0011
3	0011	0010
4	0100	0110
5	0101	0111
6	0110	0101
7	0111	0100

我们知道, 二进制数的反码是逐位取反, 数本身和反码二者必有一个首位为 1. 将两个 n 位二进制数的尾数 D'_{B1S} 和 D'_{B2S} 相加再加 1 则所得和为 $n-1$ 位二进制数的模 2^{n-1} , 它与首位之和为 0. 故补码二进制数首位即符号位的权为

$$W_{BS} = -2^{n-1} \quad (12)$$

式(11) 还可以写成

$$D_S + \overline{D_S} = -1 \quad (13)$$

对于四位带符号二进制数(可对照表 2), 则有

$$\text{例 13: } 1010_B = -2^3 + 2^1 = -6$$

6.2 带符号格雷码符号位的权值

格雷码的反码只需首位取反, 故 D_{GS} 和 $\overline{D_{GS}}$ 仅首位不同, 尾数 D'_{GS} 相同, 因此, 尾数仍按原来的方法计算, 1 的个数从符号位算起, 则两个尾数的十进制值为相反数, 正好抵消, 只剩下了首位的 1, 故首位即符号位的权为 -1 . 即:

若格雷码符号位的权为 W_{GS} , 则

$$D_{GS} = G_n W_{GS} + D'_{GS}$$

$$\overline{D_{GS}} = \overline{G_n} W_{GS} - D'_{GS}$$

$$\text{故 } D_{GS} + \overline{D_{GS}} = (G_n + \overline{G_n}) W_{GS}$$

$$\text{据式(6) 有 } D_{GS} + \overline{D_{GS}} = W_{GS}$$

$$\text{由式(13) 得 } W_{GS} = -1 \quad (14)$$

此结果也可以根据式(12)、式(1) 和式(2) 推出:

$$\begin{aligned} D_S &= -B_n 2^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} B_i 2^{i-1} \\ &= -B_n 2^n + B_n 2^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} B_i 2^{i-1} \\ &= -B_n 2^n + \sum_{i=1}^n B_i 2^{i-1} \\ &= -G_n 2^n + \sum_{i=1}^n G_i (-1)^{K_i} (2^i - 1) \\ &= -G_n 2^n + G_n (2^n - 1) + \sum_{i=1}^{n-1} G_i (-1)^{K_i} (2^i - 1) \\ &= -G_n + \sum_{i=1}^{n-1} G_i (-1)^{K_i} (2^i - 1) \end{aligned}$$

同样表明, 带符号格雷码符号位的权为 -1 .

对于四位带符号格雷码(可对照表 2), 则有

$$\text{例 14: } 1010_G = -1 - (2^2 - 1) = -4$$

$$\text{例 15: } 1101_G = -1 - (2^3 - 1) + (2^1 - 1) = -7$$

7 结束语

在格雷码的权、奇偶性和加 1 规律的基础上, 研究了格雷码的求反和取补, 列出了补码表示的带符号格雷码, 给出了带符号二进制数和格雷码符号位的权值. 研究结果对格雷码的深入研究和推广应用具有一定的参考价值, 有望简化其计算机处理算法.

参考文献:

- [1] Frank Gray. Pulse Code Communication, US2632058 [P]. 1953.
- [2] 李正明, 姚如贵, 王伶, 等. 基于 G. 9960 协议的高阶 QAM 调制与解调[J]. 微电子学与计算机, 2011, (03): 89-93.
- [3] 于海, 樊晓枢. 基于 FPGA 异步 FIFO 的研究与实现[J]. 微电子学与计算机, 2007, (03): 210-213+216.
- [4] 刘金岭. 基于 Chord 覆盖网络索引结构的多属性查询[J]. 微电子学与计算机, 2011, (03): 103-107.
- [5] 李正生, 马文彦. 一个人工智能问题: 用格雷码 ± 1 的规律套解九连环[C]//Anon 3rd World Congress on Intelligent Control and Automation. Proceedings of the 3rd World Congress on Intelligent Control and Automation. Hefei: IEEE, 2000: 304-307.

(下转第 136 页)

参考文献:

- [1] 胡春强, 邓绍江, 秦明甫, 等. 基于 Logistic 与标准映射的数字图像加密算法[J]. 计算机科学, 2010, 37(12): 57-59.
- [2] Pareek n k, Vinod Patidar, Sud k k. Image encryption using chaotic logistic map [J]. Image and Vision Computing, 2006, 24(9): 926-934.
- [3] 侯文滨, 吴成茂. 基于 Arnold 变换的图像分存加密方法[J]. 计算机应用, 2011, 31(10): 2682-2686.
- [4] 袁岁维, 范九伦, 朱敏涛. 基于三维帐篷映射的彩色图像加密[J]. 计算机应用研究, 2009, 26(12): 4780-4783.
- [5] 邓绍江, 黄桂超, 陈志建, 等. 基于混沌映射的自适应图像加密算法[J]. 计算机应用, 2011, 31(6): 1502-1511.
- [6] Chen gang, zhao xiaoyu, li junli. A self-adaptive algorithm on image encryption[J]. Journal of Software, 2005, 19(11): 1975-1974.
- [7] 李莉. 空域图像的自适应和并行加密算法的研究与分析[D]. 重庆: 重庆大学, 2011.
- [8] Taneja nidhi, Raman B, Gupta indra. Chaos based cryptosystem for still visual data [EB/OL]. [2012-04-20][2012-3-1]. <http://springer.lib.tsinghua.edu.cn>.
- [9] Qi guoyuan, Chen guanrong. Analysis and circuit implementation of a new 4D chaotic system[J]. Physics Letters A, 2006, 352(4-5): 386-397.

作者简介:

王 阳 男, (1986—), 硕士研究生. 研究方向为图像加密.

吴成茂 男, (1968—), 高级工程师. 研究方向为图像处理.

梁 睿 男, (1986—), 硕士研究生. 研究方向为图像处理.

(上接第 131 页)

- [6] 王中德. 沃尔什函数的构造、编序和生成[J]. 电子学报, 1988, 16(1): 122-123.
- [7] 李喜艳, 周清雷, 张文宁. 多峰值全局优化的混合编码遗传算法[J]. 微电子学与计算机, 2010, (03): 119-121.
- [8] Li Zhengsheng, Ma Wenyan. Weights and parity of Gray Code[C]//Conference Proceeding. Third International Conference on Electronic Measurement & Instruments, Beijing: CIA and Electronic Measurement and Instrument Society of CIE, 1997: 536-538.

作者简介:

李正生 男, (1957—), 博士生, 教授. 研究方向为自动化测试与控制、信号与信息处理, 电子系统故障诊断.

马文彦 女, (1956—), 硕士, 高级实验师. 研究方向为核技术与核安全.

闫 杰 男, (1960—), 博士, 教授, 博士生导师. 研究方向为飞行器控制、制导与仿真.