

泰勒多项式逼近实现 DOG 小波变换

陈 坚¹, 李 昕², 何怡刚³

(1 湖南工学院 电气与信息工程学院, 湖南 衡阳 421002; 2 湖南工学院 计算机与信息科学学院, 湖南 衡阳 421002;
3 合肥工业大学 电气与自动化工程学院, 安徽 合肥 230009)

摘 要: 总结了模拟集成电路和 VLSI 电路硬件实现连续小波变换(CWT)的常用方法: 时域法和频域法. 针对频域法中带通滤波器组设计的难以实现问题, 提出利用泰勒多项式(Taylor-series)对 DOG 小波函数进行展开, 以获取该小波函数的逼近函数, 而后构建 DOG 小波变换逼近函数的系统模型, 仿真结果验证了这种方法对于 DOG 小波的可行性.

关键词: 连续小波变换(CWT); 频域法; 泰勒多项式; DOG 小波

中图分类号: TP17

文献标识码: A

文章编号: 1000-7180(2014)10-0072-04

Taylor-series Approximation Method Implementing DOG Wavelet Transform

CHEN Jian¹, LI Xin², HE Yi-gang³

(1 Dept. of Electric & Information Engineering, Hunan Institute of Technology, Hengyang 421002, China;

2 Dept. of Computer & Information Science, Hunan Institute of Technology, Hengyang 421002, China;

3 Dept. of Electric Engineering & Automation, Hefei University of Technology, Anhui 230009, China)

Abstract: This paper summarized that the main methods of implementing continuous wavelet transform were Time-domain method and Frequency-domain method in analog integrated circuit and VLSI integrated circuit. Considering that the design of band-pass filters in Frequency-domain method is difficult to implement, this paper proposed the means of using Taylor-series to spread the wavelet function. It could obtain the function approximation of the wavelet function. Then this paper raised the method of using Taylor approximation to build the system function model of continuous wavelet transform. The feasibility of this method is validated taking DOG wavelet as an example.

Key words: continuous wavelet transform; frequency-domain method; taylor-series; DOG wavelet

1 引言

连续小波变换(CWT)对信号的奇异性有着特殊的分析、处理能力, 与离散小波变换相比, CWT 有着更好的实时性, 更高的运算处理能力, CWT 通过模拟集成电路可实现更宽的信号频带, 在高频电路的情况下, 仍能做到低电压、低功耗; 由于省去模

数/数模转化的环节, 超大规模集成电路(VLSI)更适合用模拟电路集成实现, 因此国内外的研究人员对于用模拟集成电路实现 CWT 投入了大量的精力, 并提出了各种结构及算法^[1-5]. 其中时域法实现 CWT 处理起来快速, 有利于集成电路的制造生产, 尤其能满足实时高效获得小波系数的需求, 但是电路相对复杂很多^[6]. 以带通滤波器组为代表的频域

收稿日期: 2014-01-13; **修回日期:** 2014-03-03

基金项目: 国家杰出青年科学基金(50925727); 国防科技计划项目(C1120110004, 9140A27020211DZ5102); 教育部科学技术研究重大项目(313018); 湖南省教育厅科研项目(12C0644); 湖南省教育厅科研项目(13C210); 衡阳市科技计划项目(2011KJ27)

法,其实现 CWT 的原理框图如图 1 所示.其中关键所在是带通滤波器组的设计,除了要使得各滤波器和小波函数的频率特性等参数相吻合之外,还要考虑后期设计出来的电路实现片上系统、低功耗、宽频带等要求,使得电路的结构十分繁琐^[7].考虑到频域法中带通滤波器组设计以上所列举的种种不足,给小波变换的实现增加了困难,如果能够预先对小波变换函数采取泰勒多项式级数展开的方法加以逼近则是一种减少其复杂度的有效途径,下面将结合 DOG 小波变换及其泰勒多项式逼近函数展开讨论.

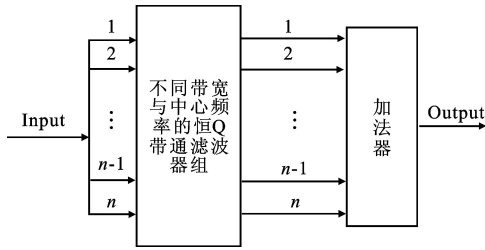


图 1 带通滤波器组实现 CWT 原理框图

2 DOG 小波及其展开逼近

2.1 DOG 小波

DOG 小波是两高斯分布函数求差所得,尺度为两倍的关系,其在图象处理、模式识别中获得较多的应用^[8-9].式(1)和图 2 分别给出了 DOG 小波的时域函数和对应的波形,式(2)和图 3 则经傅里叶变换得出相应的频域函数及其幅频特性图(实数域).

$$\psi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{t^2}{8}} \quad (1)$$

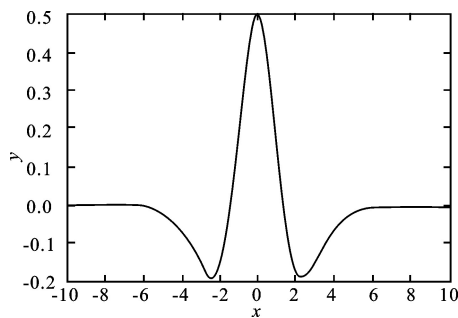


图 2 时域波形

$$\Psi(\omega) = \sqrt{2\pi}(e^{-\frac{\omega^2}{2}} - e^{-\frac{\omega^2}{8}}) \quad (2)$$

显然,对 $\Psi(\omega)$ 求一阶导数和二阶导数及 n 阶导数分别可以得到 $\Psi'(\omega=0)=0, \Psi''(\omega=0)=0$ 且 $\Psi'''(\omega=0)=0$. 当 $\Psi(\omega)=0$ 时且 $\omega \neq 0$, 我们可以计算得到 $\Psi(\omega)$ 的中心频率为 $\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \lg 4$

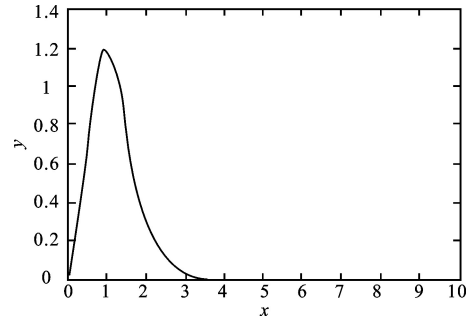


图 3 DOG 小波幅频特性图

$\approx 0.9613 \text{ rad/s}$. $\Psi(\omega)$ 具有无穷整数阶导数的特性决定了 DOG 小波其在图象处理、模式识别等方面的应用,也为文中后续的级数展开推导提供了必要的条件.

2.2 DOG 小波泰勒多项式的展开逼近

根据泰勒(Taylor)公式的定义:当 $a < \omega < b$, 函数 $\Psi(\omega)$ 满足 $n+1$ 阶可导条件,则 $\Psi(\omega)$ 可以展开为

$$\Psi(\omega) = \Psi(\omega_0) + \Psi'(\omega_0)(\omega - \omega_0) + \frac{\Psi''(\omega_0)}{2!} \cdot$$

$$(\omega - \omega_0)^2 + \dots + \frac{\Psi^{(n)}(\omega_0)}{n!} \cdot (\omega - \omega_0)^n + R_n \quad (3)$$

式中, $R_n = \frac{\Psi^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (\omega - \omega_0)^{n+1}$, 为级数展开的拉格朗日(Lagrange)余项,且 $\omega < \xi < \omega_0$. 如 2.1 节中说明的 $\Psi''(\omega=0)=0$, 则 $\Psi(\omega)$ 可以展开为泰勒公式的特殊形式——麦克劳林(Maclaurin)展开式:

$$\Psi(\omega) = \Psi(0) + \Psi'(0) \cdot \omega + \frac{\Psi''(0)}{2!} \cdot \omega^2 + \dots + \frac{\Psi^{(n)}(0)}{n!} \cdot \omega^n + R_n \quad (4)$$

式中, $R_n = \frac{\Psi^{(n+1)}(\theta\omega)}{(n+1)!} \cdot \omega^{n+1}$, 这里 $0 < \theta < 1$. 这样运用麦克劳林公式对 DOG 小波的频域函数的前后两个高斯分布函数 $e^{-\frac{\omega^2}{2}}$ 和 $e^{-\frac{\omega^2}{8}}$ 分别展开如下:

$$e^{-\frac{\omega^2}{2}} = \frac{1}{e^{\frac{\omega^2}{2}}} \approx \frac{1}{1 + \frac{\omega^2}{2} + \frac{\omega^4}{8} + \frac{\omega^6}{48}} \quad (5)$$

$$e^{-\frac{\omega^2}{8}} = \frac{1}{e^{\frac{\omega^2}{8}}} \approx \frac{1}{1 + 2\omega^2 + 2\omega^4 + \frac{4\omega^6}{3}} \quad (6)$$

结合上述(5)、(6)两个式子易得 DOG 小波的频域函数泰勒多项式展开逼近式为

$$\Psi(\omega) \approx \sqrt{2\pi} \left[\frac{1}{1 + \frac{\omega^2}{2} + \frac{\omega^4}{8} + \frac{\omega^6}{48}} - \frac{1}{1 + 2\omega^2 + 2\omega^4 + \frac{4\omega^6}{3}} \right] =$$

$h(\omega)$ (7)

用 MATLAB 软件作图给出 DOG 小波频域函数 $\Psi(\omega)$ 和逼近函数式 $h(\omega)$ 的曲线对比如图 4 所示。

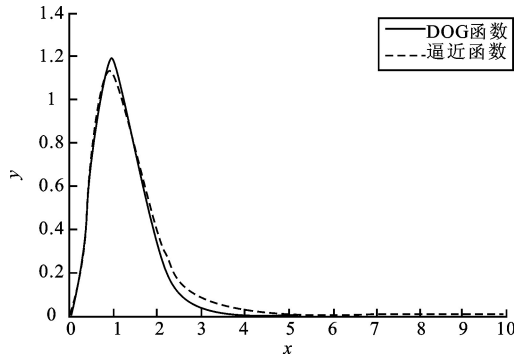


图 4 $\Psi(\omega)$ 与 $h(\omega)$ 曲线对比图

经测量可以获得在 ± 3 dB 通频带内的最大误差: $\max(\Psi(\omega) - h(\omega)) = 0.060 2$, 该点对应的频率为 $\omega_0 = 1.193 7$ rad/s, 相应的函数值 $\Psi(\omega_0) = 1.081 6$; 由此推算出的最大相对误差为

$$d_{\max} = \frac{\max(\Psi(\omega) - h(\omega))}{\Psi(\omega_0)} = \frac{0.060 2}{1.081 6} \approx 0.055 6 = 5.56\%$$

该值说明此种方式下的函数逼近误差很小。

$$h(s) = \frac{I_o(s)}{I_i(s)} = \sqrt{2\pi} \frac{-\frac{3}{2}s^2 + \frac{15}{8}s^4 - \frac{21}{16}s^6}{1 - \frac{5}{2}s^2 + \frac{25}{8}s^4 - \frac{125}{48}s^6 + \frac{23}{24}s^8 - \frac{5}{24}s^{10} + \frac{1}{36}s^{12}} \quad (11)$$

于是,

$$\begin{aligned} I_o(s) &= s^2 \left[\frac{5}{2} I_o(s) - \frac{25}{8} s^2 I_o(s) + \frac{125}{48} s^4 I_o(s) - \frac{23}{24} s^6 I_o(s) + \frac{5}{24} s^8 I_o(s) - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{36} s^{10} I_o(s) - \frac{3}{2} \sqrt{2\pi} I_i(s) + \frac{15}{8} \sqrt{2\pi} s^2 I_i(s) - \frac{21}{16} \sqrt{2\pi} s^4 I_i(s) \right] \\ &= s^2 \left[\frac{5}{2} I_o(s) - \frac{3}{2} \sqrt{2\pi} I_i(s) + I_1(s) \right] \end{aligned} \quad (12)$$

其中,

$$\begin{aligned} I_1(s) &= \left[\frac{15}{8} \sqrt{2\pi} s^2 I_i(s) - \frac{21}{16} \sqrt{2\pi} s^4 I_i(s) - \frac{25}{8} s^2 I_o(s) + \frac{125}{48} s^4 I_o(s) - \right. \\ &\quad \left. \frac{23}{24} s^6 I_o(s) + \frac{5}{24} s^8 I_o(s) - \frac{1}{36} s^{10} I_o(s) \right] \\ &= s^2 \left[\frac{15}{8} \sqrt{2\pi} I_i(s) - \frac{25}{8} I_o(s) + I_2(s) \right] \end{aligned} \quad (13)$$

其中,

$$\begin{aligned} I_2(s) &= s^2 \left[-\frac{21}{16} \sqrt{2\pi} I_i(s) + \frac{125}{48} I_o(s) - \frac{23}{24} s^2 I_o(s) + \frac{5}{24} s^4 I_o(s) - \frac{1}{36} s^6 I_o(s) \right] \\ &= s^2 \left[-\frac{21}{16} \sqrt{2\pi} I_i(s) + \frac{125}{48} I_o(s) + I_3(s) \right] \end{aligned} \quad (14)$$

其中,

3 模型建立与实现

对 $\Psi(\omega)$ 进行拉普拉斯变换, 将 $s = j\omega$ 代入 $\Psi(\omega)$ 获得函数的 s 域函数模型表达式:

$$\Psi(s) = \sqrt{2\pi} (e^{\frac{s^2}{2}} - e^{\frac{s^2}{2}}) = \sqrt{2\pi} \left(\frac{1}{e^{\frac{s^2}{2}}} - \frac{1}{e^{-\frac{s^2}{2}}} \right) \quad (8)$$

根据 2.2 节中的泰勒多项式级数展开的推导结论, $\Psi(s)$ 由 $h(s)$ 来进行逼近:

$$\begin{aligned} \Psi(s) &\approx h(s) = \\ &\sqrt{2\pi} \left(\frac{1}{1 - \frac{s^2}{2} + \frac{s^4}{8} - \frac{s^6}{48}} - \frac{1}{1 - 2s^2 + \frac{1}{2} \cdot 4s^4 - \frac{1}{6} \cdot 8s^6} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

于是:

$$\begin{aligned} h(s) &= \\ &\sqrt{2\pi} \frac{-\frac{3}{2}s^2 + \frac{15}{8}s^4 - \frac{21}{16}s^6}{1 - \frac{5}{2}s^2 + \frac{25}{8}s^4 - \frac{125}{48}s^6 + \frac{23}{24}s^8 - \frac{5}{24}s^{10} + \frac{1}{36}s^{12}} \end{aligned} \quad (10)$$

在小波变换的后期电路设计研究中, 主要是通过开关电流 (Switched-Current) 电路系统实现, 系统的传递函数的物理量以电流为研究对象, 故有:

$$I_3(s) = s^2 \left[-\frac{23}{24} I_o(s) + \frac{5}{24} s^2 I_o(s) - \frac{1}{36} s^4 I_o(s) \right] = s^2 \left[-\frac{23}{24} I_o(s) + I_4(s) \right] \quad (15)$$

其中,

$$I_4(s) = \frac{5}{24} s^2 I_o(s) - \frac{1}{36} s^4 I_o(s) = s^2 \left[\frac{5}{24} I_o(s) - \frac{1}{36} s^2 I_o(s) \right] \quad (16)$$

在开关电流电路的微分和积分单元电路实现中经常用到双线性 z 变换,实现 s 域到 z 域的函数转化,将对应关系式 $s = \frac{2}{T} \cdot \frac{(z-1)}{(z+1)}$ 代入式(12)~(16),于是有

$$\begin{aligned} I_4(z) &= \left[\frac{2}{T} \cdot \frac{(z-1)}{(z+1)} \right]^2 \\ &\left[\frac{5}{24} I_o(z) - \frac{1}{36} \left[\frac{2}{T} \cdot \frac{(z-1)}{(z+1)} \right]^2 I_o(z) \right] = \\ &\frac{4}{T^2} \left[\frac{(z-1)}{(z+1)} \right]^2 \left[\frac{5}{24} I_o(z) - \frac{1}{9T^2} \left[\frac{(z-1)}{(z+1)} \right]^2 I_o(z) \right] \end{aligned} \quad (17)$$

$$I_3(z) = \frac{4}{T^2} \left[\frac{(z-1)}{(z+1)} \right]^2 \left[-\frac{23}{24} I_o(z) + I_4(z) \right] \quad (18)$$

$$\begin{aligned} I_2(z) &= \frac{4}{T^2} \\ &\left[\frac{(z-1)}{(z+1)} \right]^2 \left[-\frac{21}{16} \sqrt{2\pi} I_i(z) + \frac{125}{48} I_o(z) + I_3(z) \right] \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} I_1(z) &= \frac{4}{T^2} \left[\frac{(z-1)}{(z+1)} \right]^2 \\ &\left[\frac{15}{8} \sqrt{2\pi} I_i(z) - \frac{25}{8} I_o(z) + I_2(z) \right] \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} I_o(z) &= \frac{4}{T^2} \left[\frac{(z-1)}{(z+1)} \right]^2 \\ &\left[\frac{5}{2} I_o(z) - \frac{3}{2} \sqrt{2\pi} I_i(z) + I_1(z) \right] \end{aligned} \quad (21)$$

运用开关电流电路中的典型单元电路——双线性 z 变换微分器模块^[11]构建函数系统框图如图 5 所示。

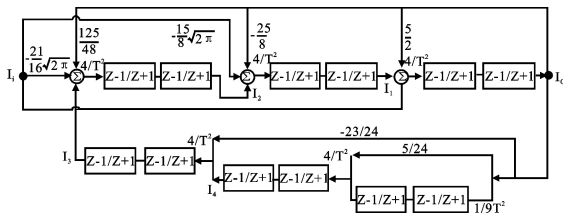


图 5 逼近函数的系统框图

框图中 T 为采样周期,而图 3 中 DOG 小波最大频率点约为 4 rad/s,根据尼奎斯特(Nyquist)采样定理,系统最小尼奎斯特采样频率约为 8 rad/s,

即 $\omega_{\min} \approx 8$ rad/s,对应的最大采样周期为 $T_{\max} = \frac{2\pi}{\omega_{\min}} \approx \frac{\pi}{4} \approx 0.785$ s,在采样定理允许范围内,令 $T = 0.5$ s,则能够重建恢复原来的连续时间信号。

借助 MATLAB 软件实现图 5 所示系统结构框图进行模拟仿真,可得系统幅频特性曲线,即波特图(Bode)如图 6 所示。找出图中的峰值点,其对应的中心频率点 $\omega_0 \approx 0.968$ rad/s 与前文中 2.1 节计算获知的 DOG 小波频域函数的中心频率点 0.961 3 rad/s 非常接近,验证了泰勒多项式级数展开逼近 DOG 小波函数的可行性。

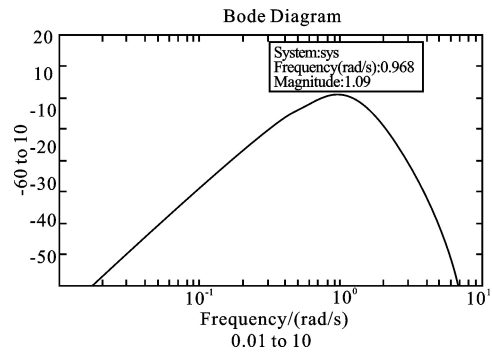


图 6 双线性 z 变换微分器系统仿真 Bode 图

4 结束语

用泰勒多项式对 DOG 小波函数进行级数展开,经数学分析、推导得出其逼近函数,再对系统框图进行 MATLAB 建模,仿真结果验证了方法的可行性,拓展了连续小波变换(CWT)的设计思路,为相关研究学者提供参考借鉴。下一步的工作是搭建双线性 z 变换微分器为基本单元的硬件电路平台实现连续小波变换(CWT)。

参考文献:

- [1] Dongwei Chen, Harris JG. An analog VLSI circuit implementing an orthogonal continuous wavelet transform[J]. IEEE Int. conf. Electronic Cir. & Sys., 1998(2): 139-142.
- [2] Hughes J B. Analogue techniques for large scale integrated circuits [D]. Southampton: University of Southampton, 1992.

(下转第 80 页)

5 结束语

本文研究了不同栅的形状对器件单粒子瞬态特性的影响. 研究表明, 相比条形栅晶体管, 环形栅晶体管具有较好的抗单粒子瞬态性能. 环形栅 NMOS 器件的源极吸收单粒子产生的电子, 从而减小脉宽; 环形栅 PMOS 可以有效抑制寄生双极放大效应从而减小脉宽.

本文的研究结果表明, 晶体管的漏极和源极的位置布局对器件单粒子瞬态特性有很大影响, 在抗单粒子瞬态加固设计中应注意增大源极包围漏极的面积, 可以更好地发挥源极抑制漏极吸收电荷的作用, 并抑制寄生双极放大效应的发生, 可以有效地减小漏极吸收到的单粒子轰击产生的电荷. 在今后的工作中, 将通过设计与上述仿真结构对应的测试电路, 对器件的单粒子瞬态特性的影响通过重离子试验进行验证.

参考文献:

- [1] Peck D S. Surface effects of radiation on transistors [J]. Bell Syst Tech J, 1963(42): 95-99.
- [2] Binder D, Smith E, Holman A. Satellite Anomalies from Galactic Cosmic Rays[J]. IEEE Trans on Nuclear Science, 1975, 22(6): 267-2680.

- [3] Massengill L W. Opportunities for single event modeling in emerging commercial technologies[C]// presented at the European Conference on Radiation and its Effects on Components and Systems. France: IEEE, 1999.
- [4] Baumann R C. Single event effects in advanced CMOS Technology[C]// Proc IEEE Nuclear and Space Radiation Effects Conf Short Course Text. [s. l.]: IEEE, 2005.
- [5] Dodd P F, Massengill L W. Basic mechanisms and modeling of single-event upset in digital microelectronics[J]. IEEE Trans On Nuclear Science, 2003, 50(3): 583-602.
- [6] Narasimham B, Bhuvana B L, Schrimpf R D, et al. Effects of guard bands and well contacts in mitigating long SETs in advanced CMOS processes[J]. IEEE Trans Nucl Sci, 2008, 55(3): 1708 - 1713.

作者简介:



赵馨远 女, (1989-), 研究生. 研究方向为数字电路的单粒子效应机理及抗单粒子加固技术.

(上接第 75 页)

- [3] Fiez T S, Allstot D J. CMOS switched-current ladder filters [J]. IEEE J. Solid-state circuit, 1990, SC-25(6): 1360-1367.
- [4] 何怡刚, 黄娇英, 彭玉楼. 一维小波变换及其逆变换结构[J]. 湖南大学学报: 自然科学版, 2003, 30(6): 60-62.
- [5] Meyer Yves. Wavelets-algorithms and applications [M]. 2nd ed. New York: Wiley, 1993: 142.
- [6] 张江洪. 高斯小波变换的开关电流电路实现[J]. 微电子学与计算机, 2010, 27(9): 151-154.
- [7] Moreira-Tamayo O, de Gyvez J P. Time-domain analog wavelet transform in real-time [J]. IEEE Int. Symp. Cir. & Sys., 1995(3): 1640-1643.

- [8] 鲁坚, 邹玉茹. DOG 小波的对称性图像分类[J]. 计算机工程与应用, 2009, 45(2): 2348-2350.
- [9] 包伯成, 胡文, 刘中, 等. DOG 小波映射伸缩和平移的动力学分析[J]. 物理学报, 2009, 58(4): 2121-2126.
- [10] 赵文山. 基于开关电流技术的模拟小波变换实现理论与方法研究[D]. 湖南: 湖南大学 2011: 66-67.
- [11] Toumazou C, Hughes J B, Battersby N C. 开关电流—数字工艺的模拟技术[M]. 姚玉洁, 刘素馨, 张培东, 等译. 北京: 高等教育出版社, 1997: 39-45.

作者简介:

陈坚 男, (1981-), 硕士, 讲师. 研究方向为模拟集成电路与故障诊断.