

一种基于多项式调和表示的拉普拉斯滤波核

杜振龙, 鲍明琦

(南京工业大学 计算机科学与技术学院, 江苏 南京 211816)

摘 要: 滤波(卷积)是信号、图像处理常用的前端、后端处理步骤, 对此提出了一种以多项式基线性调和表示子频谱段滤波的拉普拉斯滤波核的算法, 用主向量分析法提取影响突出的子频谱段滤波, 利用谱理论扩展频谱至连续无限尺度空间. 实验结果表明, 所提方法能够从拉普拉斯滤波中提取出多个代表性子频谱滤波, 析取出子频谱段作用的特征频谱图像; 与此同时, 使用了四个评估标准以验证多项式表示的拉普拉斯滤波核与普通的拉普拉斯滤波核的一致性; 最后的实验部分也验证了利用算法所表示的拉普拉斯滤波核可以用来反演滤波核.

关键词: 拉普拉斯滤波; 子频谱段滤波; 滤波核反演

中图分类号: TP391

文献标识码: A

文章编号: 1000—7180(2016)08—0063—05

Laplace Filter Kernel Based on Harmonic Representation of Ploynomials

DU Zhen-long, BAO Ming-qi

(College of Computer Science & Technology, Nanjing TECH University, Nanjing 211816, China)

Abstract: The filter (convolution) commonly used in signal processing and image editing. In the paper, the sub-spectrum filter is represented by polynomial linear harmonic, and the principal components analysis was used to extracting influential sub-spectrum filter. This method expand the spectrum to continuously infinite number of dimensions by applying the approach which is knowing as spectral theory. The experiments showed that the proposed algorithm can extract multiple representative sub-spectrum filter, discrete the eigenimage (a 2D image which is affected by the sub-spectrum). At the same time, this paper uses the four evaluation criteria in order to verify that Laplace filter kernel polynomial is same as ordinary Laplace filter kernel. The last part of the experiment also proofs that the algorithm can be used to recover filter kernel.

Key words: Laplace filter; sub-spectrum filter; inverting filter kernel

1 引言

滤波(卷积)作为图像编辑操作常用的前端、后端操作, 用以去除噪声、弱化细节、制造特效、调和色彩等, 在多尺度空间图像中的处理更是发挥着必不可少的作用^[1-4]. 其中拉普拉斯滤波器、双边滤波器^[5]以及文献[3]中分析图像像素间的扩散映射算法都有着很好的保边效果. 文献[1]根据拉普拉斯的尺度特性提出了一种局部拉普拉斯滤波器, 增强图像细节的同时使图像具有平滑特性, 能够得到高质量的细节图像. 基于这种局部拉普拉斯滤波器的研

究, 文献[2]将局部拉普拉斯滤波器与双边滤波器相结合提出了一种非标准化的双边滤波. 文献[4]将高斯滤波器在尺度空间内用一系列分段多项式进行标示, 受文献[4]的启发, 本文将拉普拉斯滤波核函数在尺度空间中用一系列多项式形式的特征函数簇调和表示出来, 令拉普拉斯滤波后的图像看成是原图像与一系列特征频谱图像卷积后的结果与特征函数簇的线性结合所产生, 本文算法能够在深入了解拉普拉斯滤波的同时反求出拉普拉斯的滤波核.

滤波核的评估是图像研究领域的热点问题, 本文算法的一个重要应用在于能够通过未知滤

波核大小的拉普拉斯滤波图像反演出拉普拉斯滤波核. 文献[6]所提出的模糊图像的模糊核盲反演算法, 不能反演出拉普拉斯滤波这种提取边缘特征的滤波图像的滤波核. 文献[7]利用反卷积算法能够很好地求出由于相机抖动和物理运动所产生的模糊核, 而在本文中拉普拉斯滤波图像用多项式表示之后, 通过展开后移项等操作, 可以使用最小二乘法求解出拉普拉斯滤波核的一个较为准确的结果. 并且这种数值求解方法具有高效、精确的效果.

2 拉普拉斯滤波的多项式表示

本文利用谱扩展理论^[8]将拉普拉斯滤波核从有限离散扩展至连续无限的尺度空间, 通过求解一个积分方程的特征值与特征向量得到多项式的表达式, 从而表示出拉普拉斯滤波核, 并且通过这种表示方式可以反求出拉普拉斯滤波核的大小.

2.1 拉普拉斯滤波的频谱分解

模糊范围在 s_1 和 s_2 之间的拉普拉斯高斯核表达式如下:

$$g_L = \nabla^2 g(x, y, s) = \frac{-2s^2 + x^2 + y^2}{2\pi s^6} \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2s^2}\right), \quad s_1 \leq s \leq s_2 \quad (1)$$

函数 g_L 可用尺度 s 依赖的特征函数簇 $\varphi(s)$ 扩展为 N 项, 即用 $\varphi(s)$ 调和表示^[9] g_L 的形式为

$$g_L(x, y, s) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\int_{s_1}^{s_2} g_L(x, y, t) \varphi_i(t) dt \right) \varphi_i(s) = \sum_{i=0}^N \left(\int_{s_1}^{s_2} g_L(x, y, t) \varphi_i(t) dt \right) \varphi_i(s) \quad (2)$$

对输入图像 $I(x, y)$ 的拉普拉斯高斯滤波, 可以看成是 $I(x, y)$ 在对应尺度 s 上的与拉普拉斯滤波核的卷积.

$$f(x', y', s) = \iint g_L(x, y, s) I(x - x', y - y') dx dy \quad (3)$$

将式(2)代入式(3)可得:

$$f(x', y', s) = \iint \sum_{i=0}^N \left(\int_{s_1}^{s_2} g(x, y, t) \varphi_i(t) dt \right) \varphi_i(s) I(x - x', y - y') dx dy = \sum_{i=0}^N \varphi_i(s) \left\{ \iint \left(\int_{s_1}^{s_2} g(x, y, t) \varphi_i(t) dt \right) I(x - x', y - y') dx dy \right\} \quad (4)$$

$$\text{令 } F_i(x, y) = \int_{s_1}^{s_2} g_L(x, y, t) \varphi_i(t) dt \quad (5)$$

将式(5)代入式(4)可得:

$$f(x', y', s) = \sum_{i=0}^N \varphi_i(s) \left\{ \iint F_i(x, y) I(x - x', y - y') dx dy \right\} \quad (6)$$

上述式中的 $F_i(x, y)$ 可以看成是由拉普拉斯高斯滤波器在谱分解后的一系列二维函数, 它的二维图像可以看成是拉普拉斯滤波器的子频段作用的特征频谱图像, 在本文中将其称为拉普拉斯高斯滤波过程中的本征滤波器. 拉普拉斯滤波图像可以由一系列本征滤波器与输入图像卷积后的结果与对应的特征函数簇 $\varphi_i(s)$ 的线性结合得到.

为了求解特征函数 $\varphi(s)$ 的表达式, 本文用主成分分析法(PCA)提取 g_L 的代表性子频谱滤波, 即求解由拉普拉斯滤波核构成协方差构成的 $N \times N$ (N 为 $[s_1, s_2]$ 尺度空间滤波核离散个数) 矩阵特征值获得

$$\begin{bmatrix} \langle g_{L_1}, g_{L_1} \rangle & \langle g_{L_1}, g_{L_2} \rangle & \cdots & \langle g_{L_1}, g_{L_N} \rangle \\ \langle g_{L_2}, g_{L_1} \rangle & \langle g_{L_2}, g_{L_2} \rangle & \cdots & \langle g_{L_2}, g_{L_N} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle g_{L_N}, g_{L_1} \rangle & \langle g_{L_N}, g_{L_2} \rangle & \cdots & \langle g_{L_N}, g_{L_N} \rangle \end{bmatrix} \varphi = \lambda \varphi \quad (7)$$

式(7)协方差矩阵中的尺度 $s \in [s_1, s_2]$ 虽为离散值, 然而滤波核 s 的尺度范围为 $[0, +\infty]$. 为了使式(7)的子频谱滤波具有代表性, 本文采用谱扩展理论把有限域的特征值问题扩展至无限域特征值问题, 即需要将该求解协方差矩阵特征值问题转化为求解如下积分方程问题.

$$\iiint g_L(x, y, t) g_L(x, y, s) dx dy \varphi(t) dt = \lambda \varphi(s) \quad (8)$$

式中,

$$\begin{aligned} & \iint g(x, y, t) g(x, y, s) dx dy \\ &= \iint \frac{-2s^2 + x^2 + y^2}{2\pi s^6} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2s^2}\right) \cdot \frac{-2t^2 + x^2 + y^2}{2\pi t^6} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2t^2}\right) dx dy \\ &= \frac{4}{\pi (s^2 + t^2)^3} \end{aligned} \quad (9)$$

将式(9)代入式(8)中, 可得:

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{4}{\pi (s^2 + t^2)^3} \varphi(t) dt = \lambda \varphi(s) \quad (10)$$

为了使积分方程具有确定解, 把特征函数 $\varphi(s)$ 用多项式表示.

$$\varphi_i(s) = a_{i,0} + s a_{i,1} + s^2 a_{i,2} + \cdots + s^N a_{i,N}$$

$$= (1, s, s, \dots, s^N) \cdot \mathbf{a}_i \quad (11)$$

将式(11)代入式(10)得:

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{4(1, t, t^2, \dots, t^N)}{\pi(s^2 + t^2)^3} \mathbf{a}_i dt = \lambda(1, s, s^2, \dots, s^N) \mathbf{a}_i$$

对该方程左右两边同时乘以多项式向量 $(1, s, s^2, \dots, s^N)$,并对参数 s 进行积分,以上积分方程可以转化为求解如下 $(N+1) \times (N+1)$ 矩阵的广义特征值问题:

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \lambda\mathbf{S}\mathbf{a} \quad (12)$$

式中,矩阵 $\mathbf{K}$ 和矩阵 $\mathbf{S}$ 的元素分别为

$$K_{i+1,j+1} = \frac{4}{\pi} \iint \frac{s^j t^i}{(s^2 + t^2)^3} ds dt,$$

$$S_{i+1,j+1} = \int s^{i+j} ds = \frac{s^{1+i+j}}{1+i+j}.$$

求解出以上方程的特征值 λ_i 和对应的特征向量 $\mathbf{a}_i$ 后,将 $\mathbf{a}_i$ 代入方程(8)中即可得到特征函数 $\varphi(s)$ 的表达式,即求解出的特征向量为特征函数的系数.

求出 $\varphi(s)$ 的表达式后代回式(5)即可得到本征滤波器 $F_i(x, y)$ 形式:

$$\begin{aligned} F_i(x, y) &= \int_{s_1}^{s_2} g_L(x, y, s) \varphi_i(s) ds \\ &= \int_{s_1}^{s_2} \frac{-2s^2 + x^2 + y^2}{2\pi s^6} \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2s^2}\right) \sum_{n=0}^N s^n a_{i,n} ds \\ &= -\sum_{n=0}^N a_{i,n} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\pi^{3/2}} \left(\frac{r}{2^{1/2}}\right)^n \times \\ &\quad \left[\Gamma\left(\frac{5-n}{2}, \frac{r^2}{2s_1^2}, \frac{r^2}{2s_2^2}\right) - \Gamma\left(\frac{3-n}{2}, \frac{r^2}{2s_1^2}, \frac{r^2}{2s_2^2}\right) \right] \end{aligned} \quad (13)$$

式中, $r^2 = x^2 + y^2$.

将式(11) $\varphi(s)$ 的表达式代入式(6)中,即可得到用多项式表示的拉普拉斯滤波图像:

$$\begin{aligned} f(x', y', s) &= \sum_{i=0}^N (1, s, s, \dots, s^N) \cdot \\ \mathbf{a}_i \left\{ \iint F_i(x, y) I(x - x', y - y') dx dy \right\} \\ \text{令式中 } \iint F_i(x, y) I(x - x', y - y') dx dy &= \\ q_i(x', y'), \text{即可得到:} \\ f(x', y', s) &= \sum_{i=0}^N (1, s, s, \dots, s^N) \mathbf{a}_i \cdot q_i(x', y') \end{aligned} \quad (14)$$

2.2 由模糊图像反演滤波核

假设有一输入图像 $I(x, y)$,它的拉普拉斯滤波图像 $l(x, y, s)$,滤波图像的尺度大小为 $s(s_1 \leq s \leq s_2)$,这里 s 的具体数值是未知的,利用拉普拉斯滤波核的分解方法可解析出滤波核 s 的值.

将式(14)中多项式系数的向量形式 $\mathbf{a}_i$ 写成标量形式,可得:

$$l(x, y, s) = \sum_{i,j=0}^N q_i(x, y) s^j a_{i,j} \quad (15)$$

令 $N = 3$,将式(15)展开,可得:

$$\begin{aligned} l(x, y, s) &= q_0(x, y) \sum_{j=0}^3 s^j a_{0,j} + q_1(x, y) \sum_{j=0}^3 s^j a_{1,j} + \\ &\quad q_2(x, y) \sum_{j=0}^3 s^j a_{2,j} + q_3(x, y) \sum_{j=0}^3 s^j a_{3,j} \end{aligned}$$

移项,并进一步展开:

$$\begin{aligned} [q_0(x, y) a_{0,3} + q_1(x, y) a_{1,3} + q_2(x, y) a_{2,3} + \\ q_3(x, y) a_{3,3}] s^3 + [q_0(x, y) a_{0,2} + q_1(x, y) a_{1,2} + \\ q_2(x, y) a_{2,2} + q_3(x, y) a_{3,2}] s^2 + [q_0(x, y) a_{0,1} + \\ q_1(x, y) a_{1,1} + q_2(x, y) a_{2,1} + q_3(x, y) a_{3,1}] s + [q_0(x, y) a_{0,0} + \\ q_1(x, y) a_{1,0} + q_2(x, y) a_{2,0} + q_3(x, y) a_{3,0} - l(x, y, s)] = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

假设:

$$\mathbf{A} = q_0(x, y) a_{0,3} + q_1(x, y) a_{1,3} + q_2(x, y) a_{2,3} + q_3(x, y) a_{3,3} \quad (17)$$

$$\mathbf{B} = q_0(x, y) a_{0,2} + q_1(x, y) a_{1,2} + q_2(x, y) a_{2,2} + q_3(x, y) a_{3,2} \quad (18)$$

$$\mathbf{C} = q_0(x, y) a_{0,1} + q_1(x, y) a_{1,1} + q_2(x, y) a_{2,1} + q_3(x, y) a_{3,1} \quad (19)$$

$$\mathbf{D} = q_0(x, y) a_{0,0} + q_1(x, y) a_{1,0} + q_2(x, y) a_{2,0} + q_3(x, y) a_{3,0} - l(x, y, s) \quad (20)$$

$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ 中的 $q_i(x, y) (i = 0, 1, 2, 3)$ 可由输入图像 $I(x, y)$ 与对应的本征图像 $F_i(x, y)$ 卷积求得,因此多项式系数 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ 是可求的.将 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ 分别代入到式(16)中,可得到一个多项式方程.因此,由滤波图像反演滤波核的问题可以转化为一个求解多项式方程的问题.

求解方程:

$$\mathbf{A}s^3 + \mathbf{B}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{D} = 0 \quad (21)$$

由于该方程是一个约束过量的问题, $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ 矩阵中对应的每个元素都可组成一个多项式方程,因此可以通过最小二乘法求得未知滤波核 s 的值.

3 实验

本文实验在 matlab 2012 与 mathematica 环境下共同完成,为方便起见,所有的输入图像均为 512×512 的 RGB 彩色图像.在处理时将输入彩色图像的 RGB 空间分通道进行处理,再合成为一个三通道的结果图像,实验中参数取 $N=3$. 本文将在实验部

分展示拉普拉斯滤波核的多项式表示过程,拉普拉斯滤波核的反演结果,以及对调和表示的拉普滤波图像的评估.

3.1 拉普拉斯滤波核分解结果

本文使用 mathematica 工具对方程(12)进行求解,求出的特征值与特征向量如表 1 所示,将特征向量代入式(11)中即可得到多项式表示的特征函数的表达式. 对拉普拉斯滤波核处理过程如图 1 所示,重新得到的拉普拉斯图像是输入图像与本征图像 $F_i(x,y)$ 卷积的结果再与特征函数线性结合所得,图 1 中滤波图像的拉普拉斯滤波核系数 $s=1.5$. 图 2 展示了拉普拉斯滤波核的四个具有代表性的子频段特征频谱图像即四个本征图像的三维形式.

表 1 特征值与特征向量

a_0	a_1	a_2	a_3
-5.359 7	-6.123 4	-3.326 2	1.408 4
4.853 31	7.628 57	4.813 17	-2.240 6
-1.417 9	-2.619 4	-2.003 5	1.064 4
0.133 63	0.271 75	0.238 40	-0.149 5
$\lambda_0=0.022\ 2$	$\lambda_1=0.001\ 14$	$\lambda_2=0.000\ 07$	$\lambda_3=0.000\ 003$

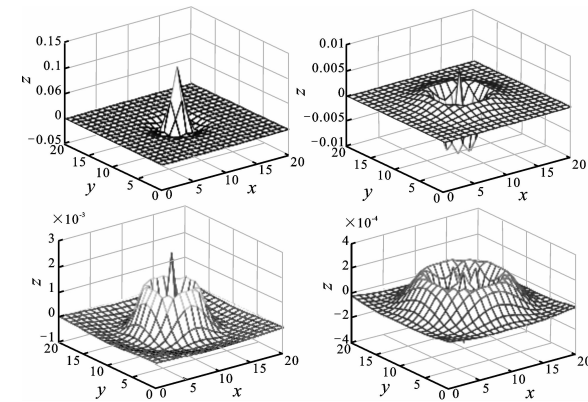


图 2 本征图像

评估结果图像的动态范围. 文本边缘数量的计算是通过统计两幅图像中像素之差大于某一阈值得到的,其中相同数据的阈值大小设置相同. 由表 2 可以看出,普通滤波图像与本文算法所得的滤波图像的 psnr、边缘数量以及动态范围差别都不大.

表 2 算法评估

数据 1			
	psnr	边缘数量	动态范围
普通滤波	9.64	30 332	[0.074,0.984]
本文算法	9.63	29 821	[0.074,0.984]
数据 2			
普通滤波	11.12	31 469	[0.098,0.96 08]
本文算法	11.14	30 787	[0.094,0.957]
数据 3			
普通滤波	8.97	23 614	[0.024,0.977]
本文算法	8.97	23 019	[0.024,0.977]

3.3 拉普拉斯滤波核的反演

本文中将拉普拉斯滤波图像用式(15)中的多项式形式表示,可以通过求解式(21)表示的方程来求出未知拉普拉斯滤波图像的滤波核系数 s 的值,将求解得到的 s 值代入拉普拉斯滤波核表达式中即可反演出滤波核,过程如图 3 所示. 由图中的差分图像可知所求得的拉普拉斯滤波核与未知拉普拉斯滤波图像的滤波核基本一致.

4 结束语

拉普拉斯滤波在提取图像边缘特征的同时抑制了噪声,因此是图像滤波中常见的滤波操作. 本文将拉普拉斯滤波核表达式用一系列多项式形式表示的特征函数簇调和表示,提取具有代表性的拉普拉斯子频段段的特征频谱图像,从而将最终的滤波图像表达成多项式的形式. 通过对本文算法与普通拉普

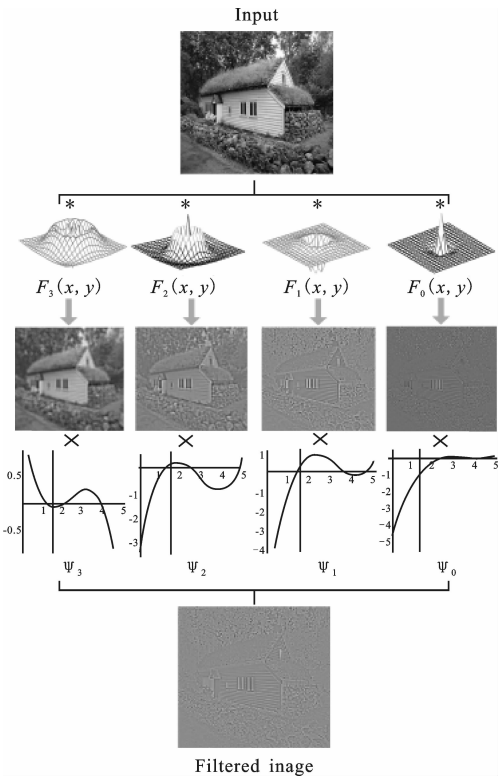


图 1 拉普拉斯滤波核处理过程

3.2 拉普拉斯滤波核分解结果分析

本文算法与普通算法的对比结果如表 2 所示,由于拉普拉斯滤波器具有保边性和降噪性,因此本文对比结果图像的 psnr 值和边缘数量,而图像的动态范围反映了图像的品质和图像细节,因此本文也

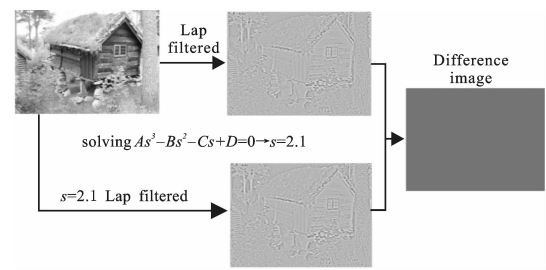


图 3 滤波核反求过程

拉斯滤波图像的差分图像、psnr、边缘数量以及动态范围的四种对比,可以看出本文算法的可行性。针对基于拉普拉斯滤波图像的多项式表示,本文也提出了一种反演拉普拉斯滤波核的算法。通过利用最小二乘法求解一个一元三次多项式方程即可反演出拉普拉斯滤波核,由于将反演滤波核问题转化成数值求解方程的问题,因此该算法具有高效性和准确性。

用最小二乘法求解一个一元三次多项式方程即可反演出拉普拉斯滤波核,由于将反演滤波核问题转化成数值求解方程的问题,因此该算法具有高效性和准确性。

参考文献:

[1] S Paris, S Hasinoff, J Kautz. Local laplacian filters: Edge-aware image processing with a laplacian pyramid [J]. ACM Trans on Graphics, 2011,30(4): 1-11.

[2] M Aubry, S Paris, S Hasinoff, et al. Fast local laplacian filters: theory and applications[J]. ACM Transactions on Graphics, 2014, 33(5):1935-1946.

[3] Z Farbman, R Fattal, D Lischinski. Diffusion maps for edgeaware image editing [J]. ACM Trans on Graphics, 2010, 29(6):81-95.

[4] G Koutaki, K Uchimura. Scale-space filtering using a piecewise polynomial representation[C]// Image Processing (ICIP), 2014, IEEE International Conference on. Paris:IEEE,2014: 2918-2922.

[5] Durand F, Julie D. Fast Bilateral Filtering for the Display of High-Dynamic-Range Images[J]. ACM Transactions on Graphics, 2002, 21(3):257-266.

[6] 杜振龙,金雨霏,高斯型模糊润饰图像的模糊核反演算法,计算机辅助设计与图形学学报[J]. 2014, 23(10): 1801-1809.

[7] L Xu,X Tao,J Jia,et al,Inverse Kernels for Fast Spatial Deconvolution[C]// proceedings of the 13th European Conference Springer International Publishing Iurids. Swilzerland:IEEE,2014:33-48.

[8] 吕涛,黄晋. 积分方程的高精度算法[M]. 北京:科学出版社,2013:22-27.

[9] Masakazu, Yamagishi. Periodic harmonic functions on lattices and Chebyshev polynomials[J]. Linear Algebra and its Applications,2015,476(9):1-15.

作者简介:

杜振龙 男,(1971-),博士,副教授.研究方向为可信媒体认证、计算机图形学、机器学习。

鲍明琦(通讯作者) 女,(1992-),硕士.研究方向为可信媒体认证、计算机图形学. E-mail:15195999180@163.com

(上接第 62 页)

[8] 钱辰,田小平. 基于压缩感知的网络编码算法[J],微电子学与计算机,2014,31(3):52-55.

[9] Tsaig Y,Donoho D L. Extensions of compressed sensing[J]. Signal Processing (S0165-1684),2006, 86(3): 549-571.

作者简介:

易成涛 男,(1974-),博士研究生,副教授.研究方向为军事航海理论与方法、图形图像技术。

E-mail:yctao1024@163.com