

一种新的改进辅助变量粒子滤波算法

赵丹丹,任平安,刘静娜

(陕西师范大学 计算机科学学院,陕西 西安 710062)

摘 要: 针对辅助变量粒子滤波(AVPF)对状态估计无法获得较好的滤波精度的问题,本文提出了一种改进的辅助变量粒子滤波算法。将正则化的思想引入到辅助变量粒子滤波的重采样中,在重采样中将离散的概率分布函数近似为连续的分布函数,该方法不仅保留了 AVPF 在重采样之前依据似然值的大小对原粒子集中的各个权值进行修正,从经过平滑后的后验密度中重采样的特点,在重采样中引入正则化思想后还能够保持粒子的多样性,增加有效样本数目,能够有效抑制样本退化。针对一个被广泛采用的双峰,高度非线性的系统模型,在选取不同的过程噪声下,进行 Monte Carlo 仿真实验,仿真实验表明,改进的辅助变量粒子滤波具有更好滤波精度。

关键词: 辅助变量粒子滤波;正则化;概率分布函数

中图分类号: TP391

文献标识码: A

文章编号: 1000—7180(2017)02—0039—04

A Novel Auxiliary Variable Particle Filter

ZHAO Dan-dan ,REN Ping-an,LIU Jing-na

(School of Computer Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062,China)

Abstract: Auxiliary variable particle filter (AVPF) at smaller process noise, state estimation can not get better filtering accuracy, this paper presents a novel auxiliary variable particle filter. Regularization will be introduced into resampling of auxiliary variable particle filter, In the resampling, the discrete probability distribution function approximated by a continuous distribution function, which not only retains the feature that AVPF based on the size of likelihood values revises the original particles are concentrated weights before resampling , from smooth posterior density resampling, after the introduction of regularization also able to maintain the diversity of particle in the resampling, increasing the number of the effective particles, can effectively inhibit the degradation of the sample. For doublet, a highly nonlinear system model has been widely used ,in the process of selecting a different noise, carry out Monte Carlo simulations. Simulation results show that the novel variable particle filter has better filtering accuracy.

Key words: auxiliary variable particle filter; regularization; probability distribution function

1 引言

自从 1993 年, Gordon 等提出自举粒子滤波^[1] (BPF)算法,随后基于蒙特卡洛仿真的近似贝叶斯的粒子滤波(PF)算法得到了迅速的发展,经过二十多年的不断发展,粒子滤波已进入了新的发展阶段—随机集粒子滤波^[2]。尽管粒子滤波不断地发展衍生了许多基于粒子滤波的新算法,但不可避免的,粒子滤波无论在理论、方法以及应用实现上仍然存在着许多的不足和局限性。比如,在过程噪声较小时,样本枯竭现象就会

更加严重,所以在不同粒子滤波算法中如何更加有效的进行重采样,能够有效克服在滤波中的权值退化及样本枯竭问题,以及在不要求模型噪声是某种特定的情况下,依然能够有较好的滤波性能,是我们亟需亟待解决的问题。高斯粒子滤波^[3] (GPF)用高斯分布近似后验分布,在高斯分布是合理的情况下,粒子退化问题就不会出现,也无需对粒子进行重采样。裂变自举粒子滤波^[4] (FBPF)在自举粒子滤波的基础上对重采样算法进行改进,在重采样前引入了权值退化检测和“权值排序(sorting)—裂变繁殖(fission)—权值归一化(normali-

zing)”)的预处理过程,预处理过程是对有粒子衰竭征兆的高权值粒子集进行预平滑处理,此时,重采样后的粒子可以避免粒子衰竭问题.文献[5]指出正则化粒子滤波[6](RPF)通过引入核密度函数以连续形式计算状态后验概率密度,可有效缓解粒子退化问题,在过程噪声较小时,可获得较高的滤波精度.辅助变量粒子滤波[7](AVPF)算法引入一个辅助变量对重要性函数进行改进,采用两次加权操作,使得对状态估计的精确度提高,但其滤波性能也总是很难保证,过多的重采样也会造成粒子衰竭,针对上述问题,本文提出将正则化的思想引入到辅助变量粒子滤波的重采样中,提出了一种改进的辅助变量粒子滤波算法.

2 辅助变量粒子滤波(AVPF)

辅助变量粒子滤波是依靠最新量测值逼近最优提议分布一种的新的粒子滤波算法,通过引入一个辅助变量来近似后验密度

状态 x_k 时刻的后验密度可表示为:

$$p(x_k, y_{1:k}) \propto p(y_k | x_k) p(x_k, y_{1:k-1}) \\ = \sum_{i=1}^{N_s} [w_{k-1}^i p(y_k | x_k)] p(x_k | x_{k-1}^i) \quad (1)$$

引入辅助变量 ξ 来表示上式中的成分索引 i , 则有

$$p(x_k, \xi_{k-1} | y_{1:k}) \propto p(y_k | x_k) p(x_k, \xi_{k-1} | y_{1:k-1}) \\ = \sum_{i=1}^{N_s} [w_{k-1}^i p(y_k | x_k)] p(x_k | x_{k-1}^i) \quad (2)$$

生成样本 $\{x_k^i, \xi_{k-1}^i\}$ 的重要性概率密度函数由下式表示:

$$q(x_k, \xi_{k-1}^i | y_{1:k}) \propto w_{k-1}^i p(y_k | u_k^i) p(x_k | x_{k-1}^i) \quad (3)$$

其中,样本 $\{x_k^i, \xi_{k-1}^i\}$ 中 ξ_{k-1}^i 表示 $k-1$ 时刻的粒子序列; u_k^i 为由 $\{x_{k-1}^i\}_{i=1}^{N_s}$ 预测出的与 x_k 相关的特征,可以是采样值 $u_k \sim p(x_k | x_{k-1}^i)$ 或预测均值 $u_k^i = E\{x_k | x_{k-1}^i\}$

定义 $q(x_k, \xi_{k-1}^i | y_{1:k}) = p(x_k | x_{k-1}^i)$

由于

$$q(x_k, \xi_{k-1}^i | y_{1:k}) = q(x_k | \xi_{k-1}^i, y_{1:k}) q(\xi_{k-1}^i | y_{1:k}) \quad (5)$$

$$\text{则有 } q(\xi_{k-1}^i | y_{1:k}) = w_{k-1}^i p(y_k | u_k^i) \quad (6)$$

此时,粒子权值为

$$w_k^i \propto \frac{w_{k-1}^i p(y_k | x_k^i) p(x_k^i | x_{k-1}^i)}{q(x_k, \xi_{k-1}^i | y_k)} = \frac{p(y_k | x_k^i)}{p(y_k | u_k^i)} \quad (7)$$

归一化权值为

$$\tilde{w}_k^i = \frac{w_k^i}{\sum_{i=1}^{N_s} w_k^i} \quad (8)$$

AVPF 的具体算法与步骤[8] 如下描述

$k = 1, 2, \dots$ 循环迭代;

(1) 权值修正: $i = 1, \dots, N_s$, 计算

$$u_k^i, \tilde{w}_{k-1}^i \propto w_{k-1}^i p(y_k | u_k^i)$$

(2) 权值归一化: $i = 1, \dots, N_s$,

$$\hat{w}_{k-1}^i = \frac{\tilde{w}_{k-1}^i}{\sum_{i=1}^{N_s} \tilde{w}_{k-1}^i}$$

(3) 重采样,但只需返回所得粒子父代的序号 ξ_{k-1}^i

(4) 重要性采样: $i = 1, \dots, N_s$, 采样粒子 $x_k^i \sim q(x_k, \xi_{k-1}^i | y_{1:k}) = p(x_k^i | x_{k-1}^{\xi_{k-1}^i})$ 按照式(7)计算权值并归一化,得到新的粒子集 $\{x_k^i, \hat{w}_k^i\}_{i=1}^{N_s}$

(5) 估计结果输出

3 正则化粒子滤波(RPF)

正则粒子滤波是为了解决重采样造成的粒子衰竭问题而提出的一种改进粒子滤波算法.在重采样过程中,之所以会出现粒子衰竭问题是因为在重采样过程中,粒子是从离散分布中采样得到,而不是从连续分布中采样得到的.

正则粒子滤波(RPF)是从后验概率密度的连续近似分布中重采样,可表示为:

$$\{x_k^i, w_k^i\}_{i=1}^{N_s} \sim p(x_k | y_{1:k}) \approx \sum_{i=1}^{N_s} w_k^i K_h(x_k - x_k^i) \quad (9)$$

其中, $K_h(x) = \frac{1}{h^{n_x}} K\left(\frac{x}{h}\right)$ 为核密度函数, $h > 0$ 为核带宽,核密度函数满足以下条件.

$$\int x K(x) dx = 0, \int x^2 K(x) dx < \infty \quad (10)$$

当粒子权重都相等,且为 $1/N$ 时,最优核密度函数为

$$K_{\text{opt}} = \frac{n_x + 2}{2c_{n_x}} (1 - \|x\|^2), \|x\| < 1 \quad (11)$$

$$K_{\text{opt}} = 0, \|x\| > 0 \quad (12)$$

其中, c 为在 R_n 上单位超球体的体积.当未知状态的先验密度是具有单位协方差矩阵的高斯密度时,存在最佳带宽,即

$$h_{\text{opt}} = A(K) N^{1/n_x + 4} \quad (13)$$

其中,

$$A(K) = [8c_{n_x}^{-1}(n_x + 4)(2\sqrt{\pi})^{n_x}]^{1/(n_x+4)}$$

4 改进的辅助变量粒子滤波

为了更好的实现粒子滤波,重要性函数的选取至为关键,一个不合适的重要性函数可能会加速粒子衰竭.因而,许多的研究都集中在对重要性函数的优化,优化重要性函数的一个重要思路^[9]是参考最新的观测信息,辅助变量粒子滤波就是这种思路下的一种新的粒子滤波算法.但 AVPF 重采样过程中会出现粒子衰竭问题,为了解决这一问题,本文在 AVPF 粒子重采样过程中引入参数化近似操作,即在辅助变量粒子滤波的重采样过程中,引入正则化粒子滤波算法,使粒子从连续分布中采样得到,可有效的解决粒子衰竭问题,从而使得辅助粒子滤波的滤波精度得到提高.

改进的 AVPF 的具体算法和实现步骤如下:

$k = 1, 2$. 循环迭代;

(1) 权值修正: $i = 1, \dots, N_s$, 计算 $u_k^i, \bar{w}_{k-1}^i$
 $\propto \bar{w}_{k-1}^i p(y_k | u_k^i)$

(2) 权值归一化: $i = 1, \dots, N_s, \hat{w}_{k-1}^i = \frac{\bar{w}_{k-1}^i}{\sum_{i=1}^{N_s} \bar{w}_{k-1}^i}$

(3) 设定 N_{th} 为有效粒子数的门限值,并计算有效粒子数 $N_{eff} = \left[\sum_{i=1}^{N_s} (\hat{w}_{k-1}^i)^2 \right]^{-1}$, 如果 $N_{eff} < N_{th}$ 计算 $\{x_{k-1}^i, \hat{w}_{k-1}^i\}$ 的经验方差矩阵 S_{k-1} , 计算 D_{k-1} 使之满足 $D_{k-1} D_{k-1}^T = S_{k-1}$

(4) 进行重采样(正则化更新), 返回所得粒子的父代, 从最佳核密度函数中采 $\epsilon^i \sim K_{opt}$ 得到粒子集 $\{x_k^i\}_{i=1}^{N_s}$ 并计算相应的状态值 $\hat{x}_k^i = x_k^i + h_{opt} D_k \epsilon^i$ 根据 k 时刻最新的观测值, 对后验密度进行修正.

(5) 重要性采样(预测新粒子集):

$x_k^i \sim q(x_k, \xi_{k-1}^i | y_{1:k}) = p(x_k^i | x_{k-1}^i)$ 按照式(7) 计算权值并归一化, 得到所需粒子集 $\{x_k^i, \hat{w}_k^i\}_{i=1}^{N_s}$

(6) 根据新的粒子集 $\{x_k^i, \hat{w}_k^i\}_{i=1}^{N_s}$, 可估算出状态的统计信息.

5 实验仿真结果与分析

这里选取一个双峰, 高度非线性的系统模型, 其状态方程和观测方程分别为

$$x_k = f_k(x_{k-1}, k) + w_k \quad (14)$$

$$y_k = x_k^2/20 + v_k \quad (15)$$

其中, $f_k(x_{k-1}, k) = 0.5x_{k-1} + 2.5x_{k-1}/(1+x_{k-1}^2) + 8\cos[1.2(k-1)]v_k \sim N(0, R_k)$ 和 $w_k \sim N(0, Q_k)$

分别是服从高斯分布的观测噪声和状态噪声.

分别对 AVPF 和改进的 AVPF 两种算法进行仿真, 仿真实验中参数设定为: $R_k = 1, Q_k = 1$, 模拟长度 $tf = 100$, 粒子数 $N = 100$, 初始状态方差 $P = 1$, 分别进行 50 次 Monte Carlo 仿真, 仿真中采用均方根误差值(RMSE) 对仿真结果进行评估

$$\text{定义: RMSE} = \left[1/N_{MC} \sum_{i=1}^{N_{MC}} (x_k - \tilde{x}_k)^2 \right]^{1/2}$$

这里 N_{MC} 为 Monte Carlo 仿真次数.

图 1 为一次独立随机仿真实验, AVPF 和改进的 AVPF 两种算法对目标状态的估计, 从图 1 中可以看出, 由于本文算法中引入了正则化的思想, 从连续的后验分布中采样, 使得有效粒子数增加, 具有比 AVPF 更好的跟踪效果.

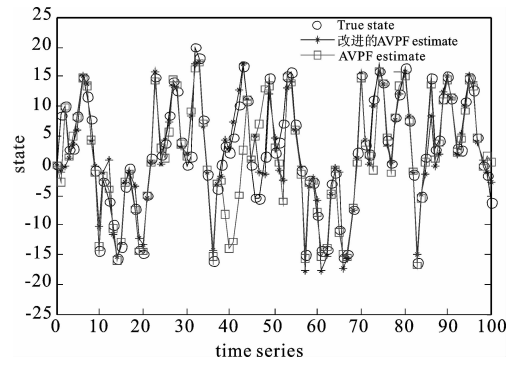
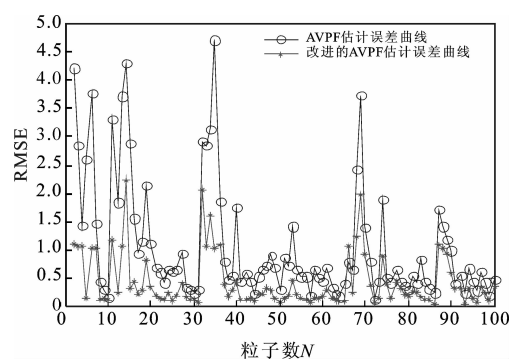


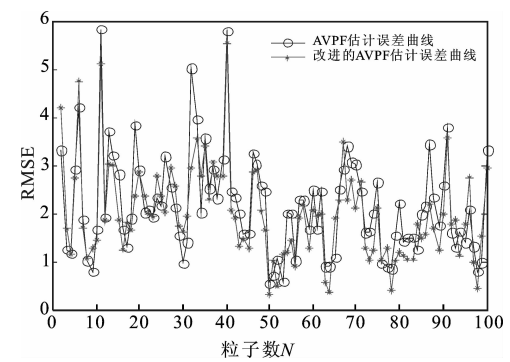
图 1 两种算法的目标状态估计

为了验证本文算法对状态估计的性能, 图 2 给出了 Q 取不同的值, 两种算法分别执行 50 次 Monte Carlo 的均方根误差图.

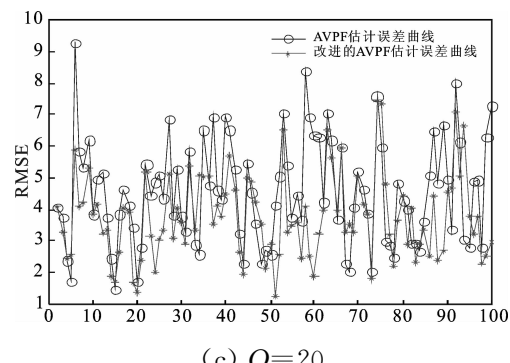
从图 2 中可以看出, 在过程噪声 $Q=0.01$ 时改进的 AVPF 算法比 AVPF 算法具有更高的滤波精度, 这是因为改进的 AVPF 算法在重采样中引入了正则化的思想, 使得算法在过程噪声较小的情况下, 仍能够保持粒子的多样性. 在 $Q=1$ 的情况下, 改进的 AVPF 和 AVPF 具有相当的跟踪效果, 虽然改进的 AVPF 算法中引入了正则化的思想, 但由于 AVPF 算法中的重要函数不是高斯函数, 只能是一种次优滤波器, 所以两种算法对状态的估计相当. 在 $Q=20$ 时, 对于 AVPF 算法, 由于从估计 $u_k^i | x_{k-1}^i$ 获取 $p(x_k | x_{k-1}^i)$ 的信息不足, 所以不能够时刻保证该算法有较好的滤波性能. 由于改进 AVPF 中在重采样时进行了正则化, 从连续分布中采样生成粒子, 根据最新观测信息对后验密度进行修正, 且使得有效样本数目增加, 所以改进的 AVPF 算法依然能够有一个相对较高的滤波精度.



(a) $Q=0.01$



(b) $Q=1$



(c) $Q=20$

图 2 不同 Q 值两种算法均方根误差曲线

表 1 给出了仿真过程中过程噪声 Q 取不同的值的均方根误差及两种算法的平均运行时间。

表 1 算法 RMSE 及平均运行时间比较

算法	Q 值	RMSE	平均运行时间
AVPF	0.01	1.068 6	0.016 4
	1	2.171 0	
	20	4.485 5	
改进 AVPF	0.01	0.455 9	0.114 2
	1	1.977 3	
	20	3.802 7	

从表 1 可以看出,在 Q 取相同的值时,改进的 AVPF 算法的 RMSE 要比 AVPF 算法的 RMSE 小,说明本文算法比 AVPF 估计精度高.因而,在相同的情况下,改进的 AVPF 比 AVPF 具有更高的滤

波精度.但由于改进的 AVPF 算法加入了正则化这一算法,所以对状态的估计时间有所增加.

6 结束语

辅助变量粒子滤波算法依据最新量测并且进行两次加权操作,相比于普通粒子滤波算法,滤波后更接近于真是的状态.本文将正则化的思想引入到重采样中,,根据最新观测值对后验密度进行修正,使之能够更好的表征后验密度,且能够增加粒子的多样性,增加有效粒子数,进而使算法具有更高的滤波精度.

参考文献:

[1] Gordon N J, Salmond D J, Smith A F M. Novel approach to nonlinear/non-gaussian bayesian state estimation[J]. IEE Proceedings F Radar and Signal Processing, 1993,140(2):107-113.

[2] 李天成,范红旗,孙树栋.粒子滤波理论、方法及其在多目标跟踪中的应用[J].自动化学报,2015,41(12):1981-2002.

[3] Kotecha J H, Djuric P M. Gaussian particle filtering [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2003, 51(10):2592-2601.

[4] 程水英,张剑云.裂变自举粒子滤波[J].电子学报,2008,36(3):500-505.

[5] 朱志宇.粒子滤波算法及其应用[M].北京:科学出版社,2010.

[6] Musso C,Oudjane N,Le Gland F. Improved regularized particle filter. sequential monte carlo methods in practice [M]. New York, USA: Springer Verlag, 2001: 247-271.

[7] Pitt M K, Shephard N. Filtering via simulation; auxiliary particle filtering[J]. American Statistical Association,1999,446(94):590-599 .

[8] 程水英,张剑云.基于辅助变量粒子滤波的空对海 Bo-TMA 的研究[J].电子与信息学报,2007,29(11):2734-2739.

[9] Cappe O, Godsill S J, Moulines E. An overview of existing methods and recent advances in sequential Monte Carlo. [J] Proceedings of the IEEE, 2007, 95(5): 899-924.

作者简介:

赵丹丹 女,(1990-),硕士研究生.研究方向为信号处理、目标跟踪. E-mail:danzhaoyy@163.com.

任平安 男,(1963-),副教授,硕士生导师.研究方向为算法设计与分析.

刘静娜 女,(1992-),硕士研究生,研究方向为计算机视觉.