

求解 0-1 背包问题的量子狼群算法

严雅榕, 项华春, 聂 飞, 李京峰

(空军工程大学 装备管理与安全工程学院, 陕西 西安 710051)

摘 要: 针对 0-1 背包问题, 在基本狼群算法的基础上, 提出了量子狼群算法. 借鉴量子编码方式, 定义了种群中粒子的概率位置和准确位置, 通过量子旋转门控制人工狼概率位置向全局最好位置逼近, 然后以量子塌缩实现了概率位置向准确位置的映射, 兼顾了算法的导向性与随机性. 选取了 8 个经典 0-1 背包问题与 3 个高维背包问题进行了测试, 并与其他算法进行比较, 实验结果表明, 量子狼群算法能够有效搜索全局最优解, 特别是在高维背包问题中具有较好性能.

关键词: 狼群算法; 量子编码; 0-1 背包问题; 导向随机

中图分类号: TP18

文献标识码: A

文章编号: 1000-7180(2018)07-0001-05

A Quantum Wolf Pack Algorithm for Solving 0-1 Knapsack Problem

YAN Ya-rong, XIANG Hua-chun, NIE Fei, LI Jing-feng

(Equipment Management and Safety Engineering College, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China)

Abstract: A quantum wolf pack algorithm is proposed to solve 0-1 knapsack problems. Defining probability positions and accurate positions of particles in population refer to quantum encoding. Quantum rotation is used to orient probability positions of wolves to the global optimal position, and then completing the mapping from probability position to accurate position by quantum collapse, these operators reconcile the orientation and randomness. There are 8 classical and 3 high-dimensional knapsack problems employed to test the proposed algorithm, and then compared the performance of this algorithm with other algorithm. The statistical results demonstrate the effectiveness and global search capability on knapsack problems especially for high level cases.

Key words: wolf pack algorithm; quantum encoding; 0-1 knapsack problem; directed random

1 引言

背包问题是一种典型的组合优化问题, 可以描述为在背包容积的约束下最大化物品价值的装载方案^[1]. 在金融、工业、军事、计算机等领域中, 任务调度、资源分配、投资决策等实际问题都可以抽象为 0-1 背包问题^[2]. 由于使用精确解法在可承受的时间范围内很难进行求解, 因此利用启发式算法求解背包问题受到了学者们的广泛关注^[3].

近年来, 多数经典启发式算法, 如遗传、粒子群、蚁群等算法及其改进算法被应用于 0-1 背包问题, 并取得了较好的结果^[4-6]. 一些新兴算法如蜂群算

法^[7]、布谷鸟算法^[8]等也在背包问题中得到广泛应用. 吴虎胜等于 2013 年提出了狼群算法^[9], 通过模仿狼群捕食及猎物分配行为, 抽象出了游走、奔袭(围攻)、淘汰三阶段的进化机制搜索最优解. 该算法具有较好的全局收敛性和鲁棒性, 二进制编码形式的狼群算法解决 0-1 背包问题时展现出了较好的性能^[10]. 然而, 基本狼群算法的提出是基于连续型空间, 直接使用二进制编码将连续空间位置映射到离散位置可能会导致算法混乱^[11], 因此多种离散化算法机制相继提出.

本文借鉴量子空间编码方式, 以概率位置和准确位置作为粒子位置的映射, 实现了量子狼群算法

求解 0-1 背包问题. 主要通过两个步骤实现: 其一, 通过量子旋转门、线性变换调整粒子的概率位置向目标位置靠近; 其二, 将概率位置塌缩到准确位置完成更新. 该过程增加了种群中粒子的多样性, 同时兼顾了算法的引导性和随机性. 在实验部分, 选择了多种测试数据集, 将量子离散化的狼群算法与经典二进制编码的狼群算法、粒子群算法等进行比较, 证明了量子离散化机制狼群算法的优越性.

2 相关理论

2.1 基本狼群算法

在基本狼群算法中, 人工狼分为三种角色: 头狼、探狼和猛狼^[9]. 头狼代表全局最优位置, 引导狼群向其位置靠拢; 探狼的作用在于增加算法的随机性, 在非劣解周围随机更新, 保证了算法的勘探能力; 猛狼则代表了大多数向最优位置逼近的粒子, 使得算法能够收敛到全局最优. 在探狼游走和猛狼奔袭过程中, 只要发现比头狼位置更优的解则发生角色转换, 即发生全局最优位置的更替.

2.2 背包问题

给定背包容量限制为 C , 第 i ($i = 1, 2, \dots, m$) 个物品的价值和体积分别为 p_i 和 w_i , 那么应该选择哪些物品才能在容量的限制内使背包中物品的价值最大. 设 $x = [x_1, x_2, \dots, x_m]$ 为问题的可行解, 当 $x_i = 1$ 时表示装入该物品, 当 $x_i = 0$ 是表示不装入, 那么 0-1 背包问题的数学模型可以描述如下:

$$\begin{cases} \text{Max} f(x) = \sum_{i=1}^m p_i x_i \\ \text{s. t. } \sum_{i=1}^m w_i x_i \leq C, x_i = 0, 1 \end{cases} \quad (1)$$

3 量子狼群算法(QWPA)

3.1 一些定义

在量子理论中, 粒子的位置是不确定的, 通常由概率表示. 以背包问题为例, 粒子在某一维度的值并非是非 0 或 1, 而是 0 或 1 的概率叠加, 即以 50% 的概率为 0, 以 50% 的概率为 1.

定义 1 概率位置. 在有限集空间内, 粒子在空间中的位置为空间范围内的多种状态的概率叠加, 称为概率位置. 定义式如(2)所示:

$$x = \sum_i \lambda_i |i\rangle, |i\rangle \in U, i = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

式中, U 代表有限空间集, $N = |U|$; $|\lambda_i|^2$ 表示粒

子为 $|i\rangle$ 的概率, $|\lambda_i| \in [0, 1]$.

定义 2 位置概率. 粒子在有限空间集内各位置的概率, 式(2)中 $|\lambda_i|^2$ 即位置概率.

定义 3 准确位置. 粒子在欧式空间中的位置, 即通常位置.

定义 4 塌缩. 由概率位置向准确位置的映射称为塌缩, 通常一个概率位置对应多个准确位置.

定义 5 量子旋转门. 量子旋转门是量子演化操作的执行算子. 在实现性空间中一般选用正交变换作为改变量子位置的操作, 一般选择:

$$H = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中, θ 为量子旋转角. 量子位置更新过程如下:

$$\begin{bmatrix} c_i^{\text{new}} \\ d_i^{\text{new}} \end{bmatrix} = H_i \begin{bmatrix} c_i \\ d_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_i \\ d_i \end{bmatrix} \quad (4)$$

3.2 量子狼群算法规则描述

量子狼群算法中使用到概率位置和准确位置. 初始化中给定各人工狼概率位置, 通过塌缩为准确位置后, 选取准确位置最优的人工狼作为头狼. 文献[12]中指出, 人工探狼和人工猛狼的数量都尽量大时计算效果较好, 在具体计算中探狼和猛狼数量均可设置为 $N-1$. 因此, 量子狼群算法根据以下机制进行更新:

3.2.1 游走行为

设人工狼 j 概率位置:

$$\mathbf{X}_j = \begin{bmatrix} c_{j1} & c_{j2} & \dots & c_{jm} \\ d_{j1} & d_{j2} & \dots & d_{jm} \end{bmatrix} \quad (5)$$

首先对其概率位置进行塌缩, 计算准确位置的目标函数值. 若该准确优于头狼位置, 则发生头狼替换, 即人工狼 j 成为头狼; 否则, 人工狼以 θ_a 量子角按照式(4)式改变其概率位置. 随后试探性地进行 p 次塌缩, $p \in H$, $H = \{1, 2, \dots, h\}$. 同时记录每次塌缩后准确位置的适应度函数值, 比较并判断是否更新人工狼准确位置及头狼位置. 重复以上过程直至 $Y_i > Y_{\text{leader}}$ 或游走次数超过限值.

3.2.2 奔袭(围攻)行为

将头狼位置扩展为概率位置, 根据式(3), 若头狼位置第 i 维为 0 或 1 时, 分别记第 i 维概率位置为:

$$\begin{cases} x_{\text{leader}i}^Q = \begin{bmatrix} c_{\text{leader}i} \\ d_{\text{leader}i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, x_{\text{leader}i} = 0 \\ x_{\text{leader}i}^Q = \begin{bmatrix} c_{\text{leader}i} \\ d_{\text{leader}i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, x_{\text{leader}i} = 1 \end{cases} \quad (6)$$

计算人工狼 j 概率位置与头狼概率位置的

Manhattan 距离:

$$d(X_{\text{leader}}^Q, d(X_j^Q)) = \sum_{i=1}^m |x_{\text{leader}i}^Q - x_{ji}^Q| \quad (7)$$

若该距离大于判定距离 d_{near} 则进行奔袭行为. 人工狼 j 受到头狼召唤, 其概率位置以较大步长向头狼靠近:

$$c_{ji} = c_{ji} + \text{step}_a (c_{\text{leader}i} - c_{ji}) / |c_{\text{leader}i} - c_{ji}|$$
$$d_{ji} = \sqrt{1 - c_{ji}^2} \quad (8)$$

若 Manhattan 距离小于判定距离 d_{near} 则进行围攻行为:

$$c_{ji} = c_{ji} + \lambda \text{step}_b |c_{\text{leader}i} - c_{ji}|$$
$$d_{ji} = \sqrt{1 - c_{ji}^2} \quad (9)$$

式中, step_a 和 step_b 分别为奔袭和围攻步长; λ 为 $[0, 1]$ 之间的随机数. 将更新后的概率位置进行塌缩, 比较塌缩后的准确位置适应度函数值与全局最优值, 判断是否更新头狼位置.

3.2.3 淘汰机制

若处于某一概率位置的人工狼多次塌缩的最好值在种群中仍然较差, 则对该概率位置进行淘汰, 在空间中随机生成一个概率位置保持种群数量.

3.2.4 背包约束

量子空间中每个粒子代表了确定位置的多种解, 若对于某次塌缩后准确位置不满足背包容积约束, 则对该概率位置进行重新塌缩, 直至满足约束条件为止.

3.3 量子狼群算法流程

根据上述更新机制, 量子狼群算法基本流程如下:

- Step1. 参数及种群初始化.
- Step2. 概率位置塌缩, 确定头狼位置.
- Step3. 游走行为, 选定游走参数 θ_a 随机游走, 随后塌缩到准确位置并计算适应度函数值, 比较并判断是否更新人工狼准确位置及头狼位置.
- Step4. 计算人工狼准确位置和头狼位置的 Manhattan 距离, 判断进入奔袭或围攻行为, 按照公式(10)、(11)更新人工狼概率位置, 随后塌缩到准确位置并计算适应度函数值, 判断是否更新头狼位置.
- Step5. 淘汰多次塌缩后最好准确位置仍处于较差位置的 R 个概率位置, 随机生成 R 个概率位置保持种群数量.
- Step6. 重复 Step3~Step5 直至满足终止条件并输出结果.

4 实验与分析

为测试量子狼群算法对 0—1 背包问题的有效性, 选择了两组测试数据集进行实验. 第一组实验选择 8 个经典背包问题的求解, 并与包括二进制狼群算法在内的各种算法进行比较. 第二组实验采用文献[13]中的高维背包问题进行测试. 第 i ($i = 1$) 件物品的体积 w_i , 价值 p_i 及背包容量 C 由以下公式产生:

$$w_i = \text{randint}[1, 10]$$
$$p_i = w_i + 5; C = (1/2) \sum_{i=1}^m w_i \quad (10)$$

式中, m 为物品数量. 分别产生 250 维, 500 维背包算例进行测试, 考察本文算法对高维背包问题的有效性和可行性.

实验 1 8 个经典背包问题算例研究

以 8 个 0—1 背包问题为研究对象, 将量子狼群算法与二进制狼群算法(BWPA)、遗传算法、和声搜索算法、贪婪算法等进行比较^[10], 其中 8 个背包问题维数从 10 维到 100 维, 能够较好测试算法性能. QWPA 算法和 BWPA 算法利用 Matlab2012 编程实现, 在 Intel(R) Core(TM) i7—479 CPU @ 3.60GHz, 3.60GHz 处理器, Microsoft Windows7 操作系统上独立运行 20 次. 设定 QWPA 算法和 QWPA 算法种群数量为 40, 最大迭代次数为 50 次, QWPA 算法中 $\theta_a = 0.001\pi$, $\text{step}_a \in [0.2, 0.4]$, 和 $\text{step}_b \in [0.01, 0.015]$, $d_{\text{near}} = 1$, $R = 8$. 其它算法结果参考文献[10]. 表 2 从最优值、最差值、平均值等方面对算法进行评估. 背包相关参数见表 1, 测试结果见表 2.

表 1 相关参数设定

编号	维数	容量限制	理论最优值
KP ₁	10	269	295
KP ₂	15	354.96	481.69
KP ₃	50	1 000	3 103
KP ₄	50	1 000	3 119
KP ₅	50	11 231	16 102
KP ₆	60	2 393	8 362
KP ₇	80	1 170	5 183
KP ₈	100	2 818	15 170

表 2 0—1 背包问题的 10 个算例结果

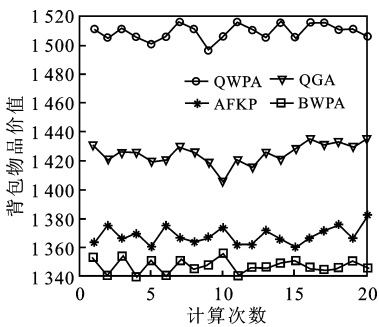
编号	算法	最优解	最差解	平均值	标准差	命中次数	其他文献提供的最优解
KP ₁	BWPA	295	295	295	0	20	295_遗传算法, 209_贪婪算法, 295_模糊粒子群算法
	QWPA	295	295	295	0	20	
KP ₂	BWPA	481.69	481.69	481.69	0	20	481.69_自适应和声搜索算法
	QWPA	481.69	481.69	481.69	0	20	
KP ₃	BWPA	3 096	3 066	3 080.5	8.17	0	3075_基本人工鱼群算法, 3082_模拟退火算法, 3090_基于模拟退火的遗传算法
	QWPA	3 103	3 095	3 101	3.23	16	
KP ₄	BWPA	3 104	3 080	3 092.8	7.27	0	3105_基于混合编码差异演化算法, 3112_贪心遗传算法, 3114_学习型和声算法
	QWPA	3 119	3 110	3 116.3	3.03	7	
KP ₅	BWPA	16 102	10 102	16 102	0	20	14865_遗传算法, 15565_二进制粒子群算法, 15955_模拟退火算法
	QWPA	16 102	16 102	16 102	0	20	
KP ₆	BWPA	8 362	8 356	8 361.4	1.85	17	7775_基于谈心策略改进的遗传算法, 8362_引入侦查子群的蚁群算法
	QWPA	8 362	8 362	8 362	0	20	
KP ₇	BWPA	5 183	5 183	5 183	0	20	5107_混合粒子群算法, 5101_基于罚函数策略的离散粒子群算法
	QWPA	5 183	5 183	5 183	0	20	
KP ₈	BWPA	15 170	15 170	15 170	0	20	15 080_混合离散粒子群算法, 15089_基于罚函数策略的离散粒子群算法
	QWPA	15 170	15 144	15 164.2	8.78	15	

由表 2 可以看出,相对于文献中的算法,QWPA 算法解决上述 8 个 0—1 背包问题具有较好性能. 对于解决 KP₁~KP₂ 低维背包问题,BWPA 算法和 QWPA 算法都能够 100%求出最优解. 需要指出的是,在 KP₃ 和 KP₄ 问题求解中,BWPA 算法与其他经典算法在多次测试后无法求出全局最优解,而 QPWA 算法在给定种群数量和迭代次数的情况下能够求出最优解,然而也容易陷入局部最优. 特别是 KP₄,在 20 次实验中也仅 7 次找到最优解. 但是相比而言,不论在算法稳定性和均值方面,QWPA 算法明显优于其他算法. 在 KP₅~KP₇ 求解中,BWPA 算法和 QWPA 算法性能相差不大,都明显优于其他经典算法. 在 KP₈ 中,QWPA 算法在多次求解中也能得到最优解,但是算法稳定性相对 BWPA 显得有些不足,可能会陷入局部最优,但整体性能相对其他算法仍然具备一定优势.

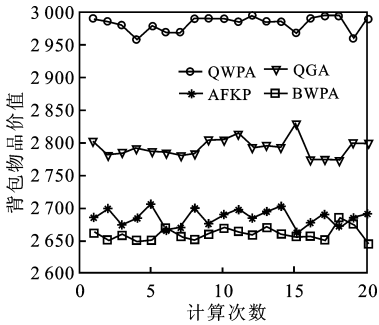
实验 2 3 个高维背包问题算例研究

为考察大规模背包问题中 QWPA 算法的性能,本实验通过式(14)产生 3 个维度分别为 250, 500,1 000 的高维背包问题,每个背包产生后分别对量子遗传算法(QGA)、人工鱼群算法(AFKP)、二进制狼群算法(BWPA)和量子狼群算法(QWPA)进行测试,设定四种算法种群数量为 40,迭代次数为 100 次. 测试次数为 20 次,图 1(a)~(c)分别显示了背包规模下四种算法计算结果的分离曲线.

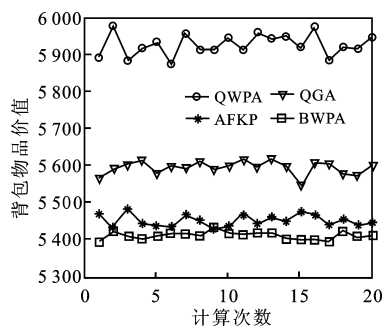
由图 1 可见,QWPA 算法在高维背包问题上明显优于其他算法. 随着背包维数的增加,各算法求解结果差距越来越大,特别是在 1000 维时,背包内物品总价值最优结果(QWPA)与最差结果(BWPA)相差近 600,明显显示了 QWPA 算法在求解高维问题的优越性. 同时,另一发现为,经量子化机制优化的算法在高维问题



(a) 250 维背包分离曲线



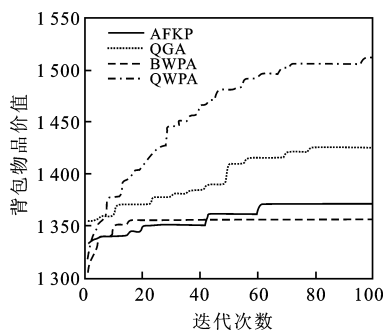
(b) 500 维背包分离曲线



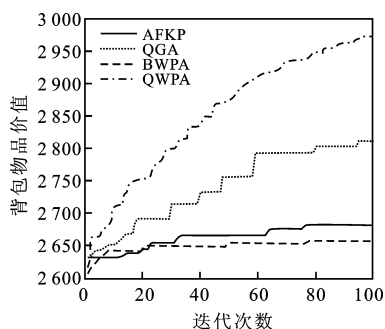
(c) 1 000 维背包分离曲线

图 1 高维背包问题分离图

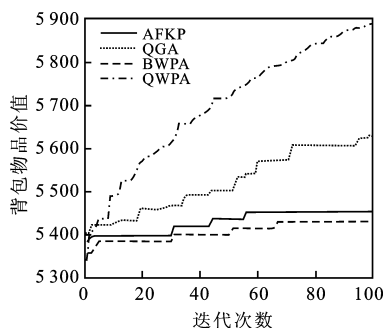
求解中性能较好,即图中 QGA 和 QWPA 算法求解效果好于非量子机制改进的 AFKP 和 BWPA 算法。为进一步研究算法性能,图 2 列除了 4 种算法在高维背包问题求解的收敛曲线,数据结果为 10 次计算所得平均值,迭代次数为 100 次。



(a) 250 维背包收敛图



(b) 500 维背包收敛图



(c) 1 000 维背包收敛图

图 2 高维背包问题收敛图

随着维数的增加,QWPA 算法和 QGA 算法的进化曲线越来越快,甚至在 100 次迭代后仍有较大的进化空间,而 BWPA 和 AFKP 算法在若干次迭代后均陷入局部最优,说明了量子机制下的算法能够有效保证种群多样性,在搜索中能够有效跳出局部最优解。

通过以上实验和分析,可以得出结论,QWPA 算法在高维背包问题中能够有效避免局部最优。

5 结束语

本文提出了一种基于量子离散编码机制的狼群算法,并将其应用到 0—1 背包问题中。主要通过调控概率位置向全局最优解逼近、概率位置向准确位置塌缩两个过程完成寻优,兼顾了导向性和随机性。随后通过 8 个经典背包问题和 3 个高维背包问题测试了算法性能,结果显示量子离散机制下的狼群算法能够保持种群多样性,特别是在高维背包问题求解中性能较好,是一种有效的算法。

下一步主要工作是分析参数对算法的影响,需要针对不同维度的问题动态调整算法参数,提出进一步的改进措施。另外,分析整理量子离散机制的有效性,通过概率论与数理统计分析该机制的理论,进而推广到其他算法中。

参考文献:

- [1] Kellerer H, Pferschy U, Pisinger D. Knapsack problems[M]. Berlin: SpringerVerlag, 2004.
- [2] 王熙照,贺毅朝. 求解背包问题的演化算法[J]. 软件学报, 2017, 27(1): 1-16.
- [3] Zou D X, Gao L Q, Wu J H, et al. Solving 0-1 knapsack problem by a novel global harmony search algorithm[J]. Applied Soft Computing, 2011, 11(2): 155-1564.
- [4] Chen G L, Wang X F, Zhuang Z Q, et al. Genetic algorithm and its applications[M]. Beijing: The posts and Telecommunications Press, 2003. 1-192.
- [5] Poli R, Kennedy J, Blackwell T. Particle swarm optimization[J]. Swarm Intelligence, 2007, 1(1): 33-57. [doi:10.1109/ICCN.1995.488968].
- [6] Dorigo M, Stutzle T. Ant colony optimization[M]. Cambridge: MIT Press, 2004; 1-103.
- [7] Karaboga D, Basturk B. A powerful and efficient algorithm for numerical function optimization: Artificial bee colony(ABC) algorithm[J]. Journal of Global Optimization, 2007, 39(3): 459-471. [doi: 10.1007/s10898-007-9149-x].

- 型研究[J]. 中国电化教育, 2006, 26(10): 31-35.
- [3] Wang J, Lv H Y, Cao B, et al. Application of educational data mining on analysis of students' online learning behavior [C]// International Conference on Image, Vision and Computing. China, Chengdu, IEEE, 2017.
- [4] 郑幸源, 洪亲, 蔡坚勇, 等. 基于 AJAX 异步传输技术与 Echarts3 技术的动态数据绘图实现[J]. 软件导刊, 2017, 16(3): 143-145.
- [5] Echarts [EB/OL]. [2017-10-09]. <http://echarts.baidu.com/feature.html>.
- [6] 韩玉焱. Java Web 的 JFinal 开发框架研究[J]. 电子世界, 2017, 38(12): 153-153.
- [7] Safaripour R, Khendek F, Glitho R, et al. A REST-full architecture for enabling rapid development and deployment of companion robot applications [C]// International Conference on Computing, Networking and Communications. Hawaii, USA, 2014: 971-976.
- [8] 耿秀丽, 马万元. 考虑未知属性权重的区间直觉模糊 VIKOR 方法 [J]. 计算机工程与应用, 2016, 52(12): 1-5.
- [9] 董雪琦, 耿秀丽, 徐士东. 灰色关联分析与云模型集成的方案评价方法 [EB/OL]. [2017-07-21]. <http://www.aocmag.com/article/02-2018-08-001.html>.
- [10] Kinnebrew J, Segedy J, Biswas G. Integrating model-driven and data-driven techniques for analyzing learning behaviors in open-ended learning environments [J]. IEEE Transactions on Learning Technologies, 2017, 10(2): 140-153.

作者简介:

洪丹丹 女, (1981-), 硕士, 工程师. 研究方向为移动互联网技术、数据分析与共享技术、校园信息化关键技术.

E-mail: dddhong@xjtu.edu.cn.

李飞 男, (1981-), 工程师. 研究方向为大数据分析、系统架构设计等.

姚磊 男, (1982-), 硕士, 工程师. 研究方向为教育大数据分析 & 校园信息化关键技术.

徐墨 女, (1978-), 硕士. 研究方向为校园信息化.

锁志海 男, (1971-), 博士研究生. 研究方向为数据库应用技术、高校教育信息化.

(上接第 5 页)

- [8] Yang X S, Deb S. Cuckoo search via levy flights [C]// Proceedings of World Congress nature & Biologically Inspired Computing. India, IEEE Publications, 2009: 210-214.
- [9] 吴虎胜, 张凤鸣, 吴庐山. 一种新的群体智能算法—狼群算法 [J]. 系统工程与电子技术, 2013, 34(11): 2430-2438.
- [10] 吴虎胜, 张凤鸣, 战仁军, 等. 求解 0-1 背包问题的二进制狼群算法 [J]. 系统工程与电子技术, 2014, 35(8): 1660-1667.
- [11] 陈汉武, 李科, 赵生妹. 基于相位匹配的量子行走搜索算法及电路实现 [J]. 物理学报, 2015, 82(24): 29-39.
- [12] 李国亮. 狼群算法的研究与应用 [D]. 江西: 东华理工大学, 2016.
- [13] 李娟, 方平, 周明. 一种求解背包问题的混合遗传算法 [J]. 南昌航空工业学院学报, 1998, 11(3): 35-39.

作者简介:

严雅榕 女, (1994-), 硕士研究生. 研究方向为管理信息与决策支持. E-mail: ljf653483717@163.com.

项华春 男, (1980-), 博士, 副教授. 研究方向为装备可靠性与系统工程.

聂飞 男, (1970-), 博士, 副教授. 研究方向为管理信息与决策支持.

李京峰 男, (1993-), 硕士研究生. 研究方向为装备发展战略与管理决策.