

引用格式:许仕杰,方佳艳,李向阳. 加权拉普拉斯方法及其理论应用[J]. 微电子学与计算机, 2020, 37(7): 12-15. [XU S J, FANG J Y, LI X Y. Weighted laplacian method and its theoretical applications [J]. Microeletronics & Computer, 2020, 37(7): 12-15.]

加权拉普拉斯方法及其理论应用

许仕杰, 方佳艳, 李向阳

(中国科学技术大学 计算机科学与技术学院, 安徽 合肥 244022)

摘 要: 受到图拉普拉斯理论的部分启发, 本文提出了一种加权拉普拉斯方法来更加方便地研究现阶段比较流行的图问题, 例如, 多层图分割, 以及平衡最小割问题. 由于加权拉普拉斯策略继承了谱方法的众多优点, 因此相比于其他现有的启发式算法, 用加权拉普拉斯设计图算法在算法性能上具有更强的理论保证. 为了说明其在理论与实际中的强有力的应用价值, 我们将分别给出加权拉普拉斯方法在多层图分割和平衡最小割问题上的应用. 借助变分法和偏微分方程(PDE)理论, 我们在加权分割问题(weighted cut problem), 平衡最小割问题(balanced minimum cut problem), 以及初始聚类问题(initial clustering problem)之间建立了等价性. 其中, 初始聚类问题会在基于多层结构的图分割算法的中间阶段出现. 这些等价性的建立为基于加权拉普拉斯方法的图算法提供了很强的理论支撑. 另外, 从加权拉普拉斯方法在平衡最小割问题的应用的角度看, 加权拉普拉斯方法使得偏微分方程数值解这一成熟的理论得以应用到图问题的算法设计当中, 这也进一步证实了我们提出的加权拉普拉斯方法的有效性.

关键词: 谱聚类; 图分割; 图拉普拉斯; 偏微分方程; 最小割问题

中图分类号: TP181

文献标识码: A

文章编号: 1000-7180(2020)07-0012-04

Weighted laplacian method and its theoretical applications

XU Shi-jie, FANG Jia-yan, LI Xiang-yang

(School of Computer Science and Technology, University of Science and Technology of China, Hefei 244022, China)

Abstract: In this paper, we develop a novel weighted Laplacian method, which is partially inspired by the theory of graph Laplacian, to study recent popular graph problems, such as multilevel graph partitioning and balanced minimum cut problem, in a more convenient manner. Since the weighted Laplacian strategy inherits the virtues of spectral methods, graph algorithms designed using weighted Laplacian will necessarily possess more robust theoretical guarantees for algorithmic performances, comparing with those existing algorithms that are heuristically proposed. In order to illustrate its powerful utility both in theory and in practice, we also present two effective applications of our weighted Laplacian method to multilevel graph partitioning and balanced minimum cut problem, respectively. By means of variational methods and theory of partial differential equations (PDEs), we have established the equivalence relations among the weighted cut problem, balanced minimum cut problem and the initial clustering problem that arises in the middle stage of graph partitioning algorithms under a multilevel structure. These equivalence relations can indeed provide solid theoretical support for algorithms based on our proposed weighted Laplacian strategy. Moreover, from the perspective of the application to the balanced minimum cut problem, weighted Laplacian can make it possible for research of numerical solutions of PDEs to be a powerful tool for the algorithmic study of graph problems.

Key words: spectral clustering; graph partitioning; graph Laplacian; PDEs; minimum-cut problem

收稿日期: 2019-10-20; 修回日期: 2019-11-22

基金项目: 科技部网络空间安全项目(2018YFB080340); 基金委杰出青年项目(61625205); 中国科学院前沿科学重点研究项目(QYZDY-SSW-JSC002)

1 引言

偏微分方程(PDE)在图分析领域已被广泛研究,并且已经逐渐发展成为一套强有力的框架来帮助我们更好地理解发生在图上的一些现象.作为很多二阶偏微分方程(拉普拉斯方程,泊松方程,演化方程)的核心算子,拉普拉斯算子在图分析领域已经产生了很多强大的理论工具.像这一类能够处理图问题的拉普拉斯算子统一被称为图拉普拉斯(graph Laplacian).

作为图拉普拉斯的一个成功的应用,谱图理论在聚类问题中已经演化成了一类非常有用的技术工具,并在过去几十年内得到了系统地发展^[1].一般认为,谱图理论最初是从图上的最小割问题中建立出来的,另外一个创建该理论的动机可能来自于图能量问题,其中图划分的“割”被看成是划分的能量.由于在图分析领域中的大部分应用是基于离散化方法的,因此我们就可以充分利用基于图拉普拉斯的谱方法来最小化一些特定的图分割的目标函数,比如比率割(ratio cut)^[2],归一化割(normalized cut)^[3].

考虑到绝大多数现有的图拉普拉斯都是基于顶点加权图或者边加权图上的,由这些图拉普拉斯发展而来的技术在遇到一些更复杂情况时,应用比较受到局限.由于双重加权图在处理最近一些尚未解决的重要问题时具有很大的潜能,受到现有的图拉普拉斯理论的启发,本文提出了一种新的加权拉普拉斯方法,使得拉普拉斯算子能够适用于双重加权图,从而进一步扩展了图拉普拉斯的实际应用范围.为了进一步说明提出的加权图拉普拉斯方法的优势以及它广泛的潜在应用,本文将给出两个该方法的理论应用,分别是多层图分割问题的聚类算法设计以及平衡最小割问题.

2 相关工作

2.1 图拉普拉斯与平衡最小割问题

谱图理论和谱方法在过去的几十年内得到了系统发展.图拉普拉斯是大多数谱方法的核心.在一些相关文献中,有很多不同的基于边加权图的拉普拉斯,例如,非归一化的拉普拉斯 $L = D - W$,正则化的拉普拉斯 $L_N = I - D^{-1/2}WD^{-1/2}$,以及随机游走拉普拉斯 $L_{rw} = I - D^{-1}W$,其中, $W = \{W_{ij}\}$, $D = \text{diag}\{d_i\}$ 分别是图的权值矩阵以及度矩阵.

在最近几年的工作中,平衡最小割问题^[4]在很多实际应用场合中也扮演着很重要的角色.目前有

很多方法可以用来定义一系列的平衡条件,这些平衡条件在平衡最小割问题中是作为优化问题中一类约束条件的.

2.2 多层图分割

在多层图分割的背景之下,有很多不同性质的启发法由于它们重要的实用价值被陆续研究进而得到发展,用来针对图划分问题设计高效的近似算法.然而,直到通用的多层方法被提出,图划分领域才在效率和划分质量两个方面得到了真正的突破^[5].一个具体的多层图分割算法由三个阶段组成:粗化(coarsening)—一个问题实例被逐步映射成更小的实例从而降低原始复杂度;初始聚类(initial clustering)—用某些具体的聚类算法对粗化的图进行划分;细化(refining)—原始图的划分会从粗化图的划分中逆向细化出来.

3 加权拉普拉斯

加权拉普拉斯的概念,它是图拉普拉斯的推广,在双重加权图上具有和传统的图拉普拉斯类似的性质.我们首先给出几个重要的定义和定理,然后提出我们的加权拉普拉斯方法.

3.1 定义和引理

定义 1(双重加权图) 令 $G = (V, \mathbf{M}, \mathbf{W})$ 表示联通的具有双重加权的无向图,这里 $V = \{1, 2, \dots, n\}$ 表示图 G 的顶点集合,顶点的权重矩阵是一个对角矩阵 $\mathbf{M} = \text{diag}\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$,满足 $m_i > 0$,边的权重矩阵为对称矩阵 $\mathbf{W} = \{W_{ij}\}$.令 $\mathbf{D} = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ 表示该图的度矩阵,此处 d_i 表示顶点 i 的度,即 $d_i = \sum_j W_{ij}$.

定义 2(加权割) 设 A, B 是顶点集 V 的两个不交子集,定义 A, B 的割为 $\text{Cut}(A, B) := \sum_{i \in A, j \in B} W_{ij}$.记图 G 的一个 k -划分为 $\pi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$,此处满足对任何 $i \neq j$ 成立 $C_i \cap C_j = \emptyset$,以及 $V = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k$.在此基础上,定义划分 π 的加权割为 $W_{\text{cut}}(\pi) := \sum_{i=1}^k \frac{\text{Cut}(C_i, C_j)}{\text{mvol}(C_i)}$,这里函数 $\text{mvol}(C_i) := \sum_{x \in C_i} m_x$ 表示集合 C_i 的加权容量.

加权割问题是旨在双重加权图上最小化加权割的优化问题.我们首先给出有关定义和引理,然后引入加权拉普拉斯方法.

定义 3(加权拉普拉斯) 定义函数 f 的积分为 $\int f := \sum_{x \in V} f(x)m_x$,内积为 $\langle f, g \rangle := \int fg$.定义梯

度算子为 $\nabla f: = ((f(y) - f(x)) \sqrt{W_{xy}/m_x})_{y \in V}$. 加权拉普拉斯是函数空间 G 上的一个算子 $\Delta f: = \sum_{y \in V} (f(x) - f(y)) W_{xy}/m_x$.

以下的引理给出了加权拉普拉斯的重要性质.

引理 1 Δ 等价于如下定义的加权拉普拉斯矩阵:

$$\mathbf{L}_M = M^{-1/2} (D - W) M^{-1/2} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

证明: 考虑 G 上的一组归一化正交基 $\{\delta_i / \sqrt{m_i}\}$, 此处函数 $\delta_i(x) = 1$ 如果 $x = i$, 否则值为 0. 则有

$$\begin{aligned} \Delta(i, j) &= \langle \frac{\delta_i}{\sqrt{m_i}}, \Delta(\frac{\delta_j}{\sqrt{m_j}}) \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{m_i m_j}} (\delta_j(i) \sum_y W_{iy} - \sum_y \delta_j(y) W_{iy}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{m_i m_j}} (\delta_j(i) d_i - W_{ij}) \\ &= L_M(i, j) \end{aligned}$$

因此算子 Δ 等价于矩阵 $\mathbf{L}_M$.

引理 2 设 $1_{C_i} \in G$ 是集合 C_i 的指示函数, 即 $1_{C_i}(x) = 1$ 如果 $x \in C_i$, 反之为 0. 有

$$\text{Cut}(C_i, \overline{C_i}) = \int |\nabla 1_{C_i}|^2, \text{mvol}(C_i) = \int 1_{C_i}^2,$$

以及如下公式

$$\sum_{i=1}^k \frac{\text{Cut}(C_i, C_j)}{\text{mvol}(C_i)} = \sum_{i=1}^k \frac{\int |\nabla 1_{C_i}|^2}{\int |1_{C_i}|^2} = \sum_{i=1}^k \frac{\langle 1_{C_i}, \Delta 1_{C_i} \rangle}{\langle 1_{C_i}, 1_{C_i} \rangle}.$$

证明: 根据定义容易验证引理中的公式, 这里略去.

3.2 加权拉普拉斯方法

加权割可以表示成关于函数 $f_1, f_2, \dots, f_k$ 的泛函 $\mathfrak{Q}$, 写成如下形式:

$$\mathfrak{Q}(f_1, f_2, \dots, f_k) = \sum_{i=1}^k \frac{\langle 1_{C_i}, \Delta 1_{C_i} \rangle}{\langle 1_{C_i}, 1_{C_i} \rangle},$$

将离散条件松弛之后, 得到了松弛版本的问题. 为了最小化泛函 $\mathfrak{Q}$, 利用多函数的 Euler-Lagrange 方程, 得到如下极值条件:

$$\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial f_i} = 0 \text{ 对所有的 } i = 1, 2, \dots, k,$$

记 $\mathfrak{R}(f) = \langle f, \Delta f \rangle / \langle f, f \rangle$, 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{R}(f)}{\partial f} &= \frac{2\Delta f \cdot \langle f, f \rangle - 2\langle f, \Delta f \rangle \cdot f}{\langle f, f \rangle^2} \\ &= (\Delta - \frac{\langle f, \Delta f \rangle}{\langle f, f \rangle} I_d) \frac{2f}{\langle f, f \rangle} = 0 \end{aligned}$$

这里算子 I_d 是单位算子, 因此函数 $\frac{2f}{\langle f, f \rangle}$ 是加

权拉普拉斯算子 Δ 的特征函数, 其对应特征值为 $\frac{\langle f, \Delta f \rangle}{\langle f, f \rangle}$. 因此, f 是 Δ 的特征函数.

由于加权拉普拉斯 Δ 等价于加权拉普拉斯矩阵 $\mathbf{L}_M$ (见引理 1), 仅需计算该矩阵的特征值. 更进一步, 由于 Δ 是厄密特算子, 其特征函数恰好两两正交, 故其前 k 个最小的特征函数正好满足指示函数的正交性条件, 是松弛版本加权割问题的解. 最后, 在实践中, 我们需要将连续的实数值的解还原为原始的图划分.

4 两个理论应用

我们首先阐述平衡最小割问题和加权割问题的等价性, 以及加权最小割问题和初始聚类问题之间的等价性, 最后, 提出基于加权拉普拉斯方法的初始聚类算法.

4.1 平衡最小割问题和加权割问题的等价性

首先给出平衡条件的定义, 它是关于指示函数的约束条件, 即 $\int 1_{C_i}^2 = \int 1/k$ 对所有的 $i = 1, 2, \dots, k$. 上述条件意味着 $1_{C_i}^2$ 的积分平均即为 $1/k$, 考虑到 $1_{C_i}^2 = 1_{C_i}$, 这说明划分 $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ 在某种意义上是平衡的. 通过松弛离散条件, 我们考虑平衡最小割问题

$$\min_{f_i \in G} \sum_{i=1}^k \langle f_i, \Delta f_i \rangle \text{ 使得 } \langle k f_i - 1, 1 \rangle = 0.$$

引理 3 平衡最小割问题等价于加权割问题.

定义泛函 $\mathfrak{R}(f_1, \dots, f_k) = \sum_{i=1}^k \langle f_i, \Delta f_i \rangle$, 利用带限制条件的 Euler-Lagrange 方程, 存在常数 λ_i 满足如下方程 $\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial f_i} + \frac{\partial}{\partial f_i} \sum_{i=1}^k \lambda_i \langle k f_i^2 - 1, 1 \rangle = 0$. 由于 $\partial \mathfrak{R} / \partial f_i = 2\Delta f_i$, $\partial \langle k f_i^2 - 1, 1 \rangle / \partial f_i = 2k f_i$, 根据方程 (1.1), 我们知道 $\Delta f_i = \lambda_i' f_i$ 对所有 $i = 1, \dots, k$ 成立, 其中 λ_i' 是某一常数. 更进一步, 算子 Δ 最小的 k 个特征函数是该问题的解, 该组特征函数恰好互相正交的, 从而满足指示函数的正交性条件. 在第 3 节中, 我们已经加权拉普拉斯方法, 该方法同样是基于求解加权拉普拉斯的特征值, 从而我们证明上述两个问题的等价性.

4.2 初始聚类问题和加权割问题的等价性

多层图分割框架中的一个关键问题是在粗化的图上构造出一个初始划分. 如前所述, 现有的算法都是完全启发式的, 也就是说, 无法给出分割结果的精度的任何保证. 利用加权拉普拉斯设计新的算法, 提

285-288.

[3] VENKATESH MURTHY B T, SRINIVASA RAO I. Design of Low Noise Amplifier Using Common Gate Current Reused Topology for Wind Profiling Radar [C]//2014 Annual Conference IEEE India Conference. Pune, India,2014: 1-4.

[4] 陈浪. 一款 2.4GHz CMOS 射频前端芯片设计 [D]. 北京:中国科学院大学, 2017.

[5] JINGSHI YAO, XIAOPENG SUN, BARRY LIN. 1.5~2.7 GHz Ultra Low Noise Bypass LNA [C]//2014 IEEE MTT-S International Microwave Symposium. Tampa, USA, 2014.

[6] SOO-HEE KHOO, CHEE-CHENG LOH, TIONG-HEO TAN. A series of 4.8V High Linearity Low Noise Amplifier for Cellular Base Station Applications [C]//Proceedings of Asia-Pacific Microwave Conference. Sendai, Japan,2014: 1178-1180.

[7] DONGYI LIAO, FA FOSTER DAL. An Interference Tolerant RF Frontend With Capacitive Feedback for Channel Filtering [J]. IEEE MICROWAVE AND

WIRELESS COMPONENTS LETTERS, 2016, 26 (9): 735-737.

[8] DOMINE LEENAERTS, JOS BERGERVOET, JAN-WILLEM LOBEEK. 900 MHz/1 800 MHz GSM Base Station LNA with Sub-1dB Noise Figure and +36dBm OIP3 [C]//2010 IEEE Radio Frequency Intergrated Circuits Symposium. Anaheim, USA, 2010: 513-516.

[9] JOS BERGERVOET, DOMINE M W LEENAERTS. A 1.95 GHz Sub-1 dB NF, +40 dBm OIP3 WCDMA LNA Module [J]. Ieee Journal of Solid-State Circuit, 2012, 47(7): 1672-1680.

作者简介:

董震震 男,(1993-),硕士研究生.研究方向为射频集成电路设计. E-mail: dongzhenzhen@casic.ac.cn.

甘业兵 男,(1981-),博士,研究员.研究方向为模拟射频集成电路设计.

罗彦彬 男,(1988-),博士,副研究员.研究方向为模拟射频集成电路设计.

(上接第 15 页)

[2] HAGEN L, KAHNG A B. New spectral methods for ratio cut partitioning and clustering[J]. IEEE transactions on computer-aided design of integrated circuits and systems, 1992, 11(9):1074-1085.

[3] SHI J, MALIK J. Normalized cuts and image segmentation[J]. Departmental Papers (CIS), 2000:107.

[4] ANDREEV K, RACKE H. Balanced graph partitioning[J]. Theory of Computing Systems, 2006, 39 (6):929-939.

[5] SAFRO I, SANDERS P, SCHULZ C. Advanced coarsening schemes for graph partitioning[J]. Journal of Experimental Algorithmics (JEA), 2015(19):2-2.

作者简介:

许仕杰 男,(1995-),硕士研究生.研究方向为机器学习.

方佳艳 女,(1997-),硕士研究生.研究方向为机器学习.

李向阳(通信作者) 男,(1971-),博士,教授.研究方向为物联网安全、物联网安全、大数据共享与交易、机制设计、算法分析. E-mail: xiangyangli@ustc.edu.cn.

高多层图分割框架的实验精度.

首先,我们引入初始聚类问题的定义. 设 $\tilde{G}$ 是图 G 的粗化,也就是说,图 $\tilde{G}$ 的顶点是一个超节点,构成了集合 $V_{\tilde{G}} = \{C_i\}_{i=1,\dots,m}$, 这里 $C_i = \{v_t^i\}_{t=1,\dots,j_i}$ 是一个超节点. 由此可以得到原始的图 G 的一个划分 $\pi = \{C_i\}_{i=1,\dots,m}$. 对于图 $\tilde{G}$ 的任何初始聚类 $\tilde{\pi}$, 他都可以自然地射影到原始图 G 的一个划分 π' . 由于初始聚类保证了超节点中每一个小的节点都被划分到同一个聚类中, π' 是一个比 π 更粗的划分, 记为 $\pi' \leq \pi$. 因此初始聚类问题定义如下 $\min_{\pi' \leq \pi} \text{Ncut}(\pi')$. 同时我们回顾第三章中定义的加权割问题, 有如下定理.

引理 4 加权割问题等价于初始聚类问题.

等价性 对于粗图 $\tilde{G}$ 上的任意划分 $\tilde{\pi} = \{B_1, B_2, \dots, B_k\}$ (这里 $B_i = \{C_i^j\}$), 我们将它投射到原始的图上去, 得到原图的划分 B'_i , 此处 $B'_i = \bigcup_{j=1}^{j_i} C_i^j$, 则我们计算

$$\begin{aligned} \text{Ncut}(\pi') &= \sum_{p \neq q} \frac{\text{Cut}(B'_p, B'_q)}{\text{vol}(B'_p)} \\ &= \sum_{p \neq q} \frac{\sum_{x \in B'_p, y \in B'_q} W_{xy}}{\sum_{x \in B'_p} d_x} \\ &= \sum_{p \neq q} \frac{\sum_{t=1}^{j_p} \sum_{s=1}^{j_q} \sum_{x \in C_p^t, y \in C_q^s} W_{xy}}{\sum_{t=1}^{j_p} \sum_{x \in C_p^t} d_x} \\ &= \sum_{p \neq q} \frac{\sum_{t=1}^{j_p} \sum_{s=1}^{j_q} \text{Cut}(C_p^t, C_q^s)}{\sum_{t=1}^{j_p} \text{vol}(C_p^t)} \\ &= \sum_{p \neq q} \frac{\text{Cut}(B_p, B_q)}{\text{mvol}(B_p)} = \text{Wcut}(\tilde{\pi}) \end{aligned}$$

证明了初始聚类问题和加权割问题是等价的, 而后者可以用加权拉普拉斯方法来解决.

4.3 加权谱算法

加权谱算法基于加权拉普拉斯方法和证明的等价性. 算法 1 的输入包括原始的图 G , 聚类数量 k , 输出包括初始聚类的结果. 算法 1 的伪代码如下所示, 第 1 ~ 8 行中, 我们操作矩阵的行和列, 在并行架构的机器上, 这样的运算可以非常高效地实现. 算法的第一部分(即 9 ~ 14 行) 计算出包含 m 个节点的粗图上的聚类结果, 该部分的算法是基

于加权拉普拉斯方法设计的. 和传统的谱聚类算法一样, 我们也计算加权拉普拉斯矩阵的前 k 个最小特征值, 并将这些特征值作为矩阵 $U \in \mathbb{R}^{m \times k}$ 的列向量, 然后对 U 的行向量运行 k -means 算法, 最终得到 k -聚类结果.

算法 1 加权谱算法

Algorithm 1 Weighted Spectral Algorithm for Initial Clustering Based on Weighted Laplacian Method

Require: G, π, k

Ensure: an initial clustering result $\{C_i\}_{i=1,\dots,k}$

```

1:  $(V, M, W) \leftarrow G$ 
2: Compute the degree matrix  $D$  of  $W$ 
3: for  $c_i$  is a cluster in the partition  $\pi$  do
4:    $\{v_i^1 < v_i^2 < \dots < v_i^{j_i}\} \leftarrow c_i$ 
5:    $\tilde{W}(:, i) \leftarrow \sum_{t=1}^{j_i} W(:, v_i^t)$ 
6:    $\tilde{W}(i, :) \leftarrow \sum_{t=1}^{j_i} W(v_i^t, :)$ 
7:    $\tilde{M}(i, i) \leftarrow \sum_{t=1}^{j_i} D(v_i^t, v_i^t)$ 
8: end for
9: Compute the degree matrix  $\tilde{D}$  of  $\tilde{W}$ 
10:  $L_M \leftarrow \tilde{M}^{-1/2}(\tilde{D} - \tilde{W})\tilde{M}^{-1/2}$ 
11:  $m \leftarrow \dim(\tilde{W})$ 
12: Make the eigendecomposition  $L_M x = \lambda x$ , the eigenvectors corresponding to the  $k$  smallest eigenvalues are  $\{x_i\}_{i=1,\dots,k}$ , let  $U := (x_i) \in \mathbb{R}^{m \times k}$ .
13: Execute the  $k$ -means algorithm on the rows of  $U = (u_j)$  to obtain a clustering  $\{A_i\}$ . Clusters  $\{C_i\}$  with  $C_i = \{v \in V | \exists j, v \in c_j, u_j \in A_i\}$ 
14: return  $\{C_i\}_{i=1,\dots,k}$ 

```

5 结束语

加权拉普拉斯方法从图拉普拉斯理论发展而来, 继承了谱方法当中很多内在的优势, 为基于加权拉普拉斯的图算法提供更多的理论支撑. 加权拉普拉斯方法两个应用, 分别是平衡最小割和多层图分割问题. 通过借助于变分法和图上的偏微分方程理论, 在加权割问题和平衡最小割问题的松弛版本之间建立了等价性, 这不仅能够加深对某个具体的图问题的理解, 而且也揭示了两个看似无关联的领域之间的重要联系, 因此也就提供了一种可行的强有力的思路从偏微分方程的角度来研究目前较为流行的图问题. 此外加权拉普拉斯方法可用于研究多层图分割问题, 并设计出了基于加权拉普拉斯方法的图划分算法来克服传统谱方法以及现有的多层结构下的启发式图划分算法的缺陷.

参考文献:

- [1] CHUNG F R, GRAHAM F C. Spectral graph theory [J]. American Mathematical Soc. 1997:92.