

# 基于3D-Hankel矩阵构造的混响不变量分离

高博, 庄天一, 庞杰, 高大治, 王宁  
(中国海洋大学 信息科学与工程学部, 山东 青岛 266100)

**摘要:**为解决浅海低频主动声呐探测系统中混响信号与目标回波分离的难题,本文基于微扰近似提出了浅海混响不变量的概念,并提出了一种基于3D-Hankel矩阵构造的混响不变量提取方法。该方法利用3D-Hankel矩阵的低秩近似特性,结合奇异值分解技术,可以稳健准确地提取浅海混响干涉结构,即浅海混响不变量。结果表明:该方法有效减少了噪声和海洋环境不确定性对分离过程的不利影响,成功分离浅海混响干涉条纹。本文方法与传统低秩分解算法相比,分离出更加清晰稳定的条纹结构,有助于增强混响抑制效果。

**关键词:**浅海混响; 低频混响; Hankel矩阵构造; 混响干涉条纹; 主动声呐; 奇异值分解; 时频域; 混响抑制

**DOI:** 10.11990/jheu.202506026

**网络出版地址:** <https://link.cnki.net/urlid/23.1390.u.20250624.1028.033>

**中图分类号:** O427.2 **文献标志码:** A **文章编号:** 1006-7043(2025)08-1530-08

## Reverberation invariant separation based on 3D-Hankel matrix construction

GAO Bo, ZHUANG Tianyi, PANG Jie, GAO Dazhi, WANG Ning

(Faculty of Information Science and Engineering, Ocean University of China, Qingdao 266100, China)

**Abstract:** To address the problem of separating reverberation signals from target echoes in shallow-water low-frequency active sonar detection systems, this paper introduces a methodology for extracting shallow-water reverberation invariants based on perturbation approximation, employing 3D-Hankel matrix construction. The method employs the low-rank approximation characteristics of 3D-Hankel matrices and singular value decomposition techniques to reliably and accurately extract the interference structure of shallow-water reverberation, specifically the shallow-water reverberation invariants. The findings suggest that this approach effectively reduces the adverse effects of noise and marine environmental uncertainties on the separation process, achieving successful separation of shallow-water reverberation interference striations. In comparison with the conventional low-rank decomposition algorithm, the method outlined in this paper has the capacity to discern a more distinct and consistent striation structure, which is advantageous for augmenting the echo suppression effect.

**Keywords:** shallow-water reverberation; low-frequency reverberation; Hankel matrix construction; reverberation interference striations; active sonar; singular value decomposition; time-frequency domain; reverberation suppression

混响主要由海面,海底以及水体散射引起,在浅海环境中,海底散射强度大,海底散射在浅海混响中占据支配性作用<sup>[1]</sup>。这些散射信号与目标回波信号混合在一起,给目标检测和参数估计带来了极大的挑战,准确处理混响信号,提取有用信息,对于提高声呐系统的目标识别能力、通信质量和环境监测精度至关重要。

在浅海环境中,低频远距离混响收到波导的传播效应影响,通常在混响的时间-频率域或者距离-频率域呈现出一定的干涉结构,这是由于声波在浅海波导中传播时不同模态相互干涉形成的<sup>[2-3]</sup>。通过对混响干涉条纹的准确分离可以实现混响抑制的目的,并且对主动声呐探测目标检测与跟踪具有重要作用<sup>[4-6]</sup>。但是,受到海底随机散射的影响,实测数据的混响时频处理结果通常呈现点斑状的随机干扰,这就为混响干涉结构的准确提取、以及目标分离带来严重干扰<sup>[7]</sup>。

近年来,研究人员从小波域<sup>[8]</sup>和分数傅里叶域<sup>[9]</sup>着手,对不同时间(即不同散射距离)的混响进

收稿日期:2025-06-10. 网络出版日期:2025-06-24.

基金项目:国家自然科学基金项目(12374427).

作者简介:高博,男,副教授,博士生导师.

庄天一,男,硕士研究生.

通信作者:庄天一,E-mail: zhuangtianyi@stu.ouc.edu.cn.

行奇异值分解<sup>[10]</sup>、模态分解<sup>[11]</sup>和主成分分析等<sup>[12]</sup>处理,然而受海洋复杂环境影响,特别是海底随机散射导致混响干涉结构较为复杂,混响干涉结构的提取依然受到限制<sup>[13]</sup>。

因此,本文首先在浅海混响的微扰近似理论的基础上,系统地推导了混响干涉结构的物理模型,指出了浅海低频混响干涉不变量(简称浅海混响不变量)是对混响样本进行系综平均处理的结果,在理论上揭示了单 ping 实测混响数据散斑状干扰的物理机制,随后利用 Hankel 矩阵构造在捕捉信号固有结构特征方面的优势,提出了一种基于 3D-Hankel 矩阵构造的混响信号处理方法,该方法充分利用了 Hankel 矩阵的低秩特性,将混响数据进行 Hankel 化的矩阵重构以后,结合矩阵结合奇异值分解(singular value decomposition, SVD)进行去噪和恢复丢失信号,可以有效提高混响信号低秩结构(即混响不变量)的信噪比<sup>[14-15]</sup>。该方法有效提高了混响不变量的分离精度,增强了对环境变化的适应性。通过仿真和实验验证,该方法在提取混响干涉条纹结构准确度和稳定性方面具有优势。这些改进有望提高声呐系统的目标探测能力,为海洋监测和 underwater 通信的应用提供了技术途径。

## 1 混响不变量分离理论基础

### 1.1 基于微扰近似的浅海混响不变量理论模型

图 1 所示为粗糙海底界面混响示意图,  $\eta$  为局部海底粗糙度,  $r$  为声源到散射体距离,  $\theta$  为极坐标系角度。

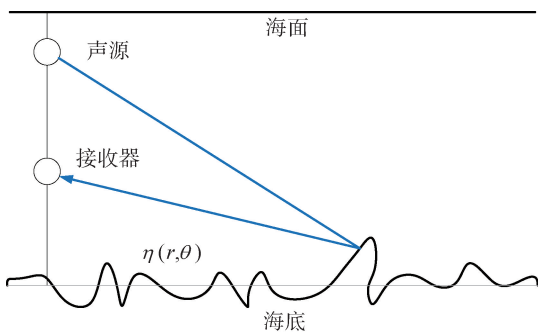


图 1 粗糙海底界面混响示意

Fig. 1 Schematic diagram of reverberation at the rough seabed interface

考虑波导中海底粗糙界面的阻抗边界条件为:

$$Z \equiv \frac{p}{\partial p / \partial n} \quad (1)$$

式中:  $Z$  为边界阻抗;  $p$  为平直海底的总声场;  $n$  为局部海底的法线方向。定义局部粗糙度  $\eta$  的边界算子  $B$  为:

$$B_p = \frac{p}{\partial p / \partial z} \quad (2)$$

式中  $z$  为深度。在微扰理论中,式(1)可以扩展至平直海底声场  $p$  与海底起伏  $\eta$  导致的海底散射场  $p_s$  之和。阻抗完全由垂向分量决定,阻抗为:

$$Z = B_p = \frac{p}{\partial p / \partial z} = B_{p+p_s} + \eta \frac{\partial B_{p+p_s}}{\partial z} \quad (3)$$

对边界算子  $B$  计算偏微分为:

$$\frac{\partial B_p}{\partial z} = \partial \left( \frac{p}{\partial p / \partial z} \right) / \partial z = \frac{(\partial p / \partial z)^2}{(\partial p / \partial z)^2} - \frac{p}{(\partial p / \partial z)^2} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 1 - \frac{p}{(\partial p / \partial z)^2} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \quad (4)$$

按照式(2),将式(3)展开为:

$$Z = \frac{p + p_s}{\partial(p + p_s) / \partial z} + \eta \left( 1 - \frac{p + p_s}{(\partial(p + p_s) / \partial z)^2} \frac{\partial^2(p + p_s)}{\partial z^2} \right) \quad (5)$$

阻抗  $Z$  可以继续化简为:

$$Z \approx \frac{(p + p_s) \partial z}{\partial(p + p_s)} + \eta \left( 1 - (p + p_s) \left[ \frac{\partial z}{\partial(p + p_s)} \right]^2 \frac{\partial^2(p + p_s)}{\partial z^2} \right) = (p + p_s) \left( \frac{\partial z}{\partial p} - \left( \frac{\partial z}{\partial p} \right)^2 \frac{\partial p_s}{\partial p} \right) + \eta \left( 1 - (p + p_s) \left[ \frac{\partial z}{\partial p} - \left( \frac{\partial z}{\partial p} \right)^2 \frac{\partial p_s}{\partial p} \right]^2 \frac{\partial^2(p + p_s)}{\partial z^2} \right) \approx \frac{p + p_s}{\partial p / \partial z} - \frac{p + p_s}{(\partial p / \partial z)^2} \frac{\partial p_s}{\partial p} + \eta \left( 1 - (p + p_s) \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial p} \right)^2 - 2 \left( \frac{\partial z}{\partial p} \right)^3 \frac{\partial p_s}{\partial p} \right] \frac{\partial^2(p + p_s)}{\partial z^2} \right) \quad (6)$$

联立式(2)、(6),并消去  $p / (\partial p / \partial z)$ ,同时忽略高阶项表达为:

$$\frac{p_s}{\partial p / \partial z} - \frac{p + p_s}{(\partial p / \partial z)^2} \frac{\partial p_s}{\partial z} = -\eta \left( 1 - \frac{p + p_s}{(\partial p / \partial z)^2} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) \quad (7)$$

式(7)中假设散射场  $p_s \ll p$ ,则为:

$$\frac{p_s}{\partial p / \partial z} - \frac{p}{(\partial p / \partial z)^2} \frac{\partial p_s}{\partial z} = -\eta \left( 1 - \frac{p}{(\partial p / \partial z)^2} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) \quad (8)$$

由式(8)经过简单的代数运算后为:

$$\frac{\partial p_s}{\partial z} = \frac{p_s}{Z} + \eta \left( \frac{(\partial p / \partial z)^2}{p} - \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) \quad (9)$$

格林第三定理给出了在已知格林函数后的任意位置处,散射场满足的面积分表达为:

$$p_s = \frac{1}{2\pi} \iint dS \left( p_s \frac{\partial G}{\partial z} - G \frac{\partial p_s}{\partial z} \right) = \frac{1}{2\pi} \iint dS \left( p_s \frac{G}{Z} - G \frac{\partial p_s}{\partial z} \right) \quad (10)$$

式中应用到了格林函数的阻抗表达式  $Z = p/(\partial p/\partial z) = G/(\partial G/\partial z)$ 。将式(9)代入式(10),则表达为:

$$p_s = \frac{1}{2\pi} \iint dS \left( p_s \frac{G}{Z} - G \left[ \frac{p_s}{Z} + \eta \left( \frac{(\partial p/\partial z)^2}{p} - \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) \right] \right) = \frac{1}{2\pi} \iint dS G \eta \left( \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{(\partial p/\partial z)}{Z} \right) \quad (11)$$

海洋波导中格林函数的远场表达式为:

$$G(r, z_b, z_r) = \frac{i e^{-i\pi/4}}{\sqrt{8\pi}} \sum_{m=1}^M \varphi_m(z_b) \varphi_m(z_r) \frac{e^{i k_{rm} r}}{\sqrt{k_{rm} r}} \quad (12)$$

式中:  $\varphi_m$  为第  $m$  阶简正波本征函数;  $k_{rm}$  为第  $m$  阶简正波水平波数;  $z_b$  为海底深度;  $z_r$  为接收器深度;  $z_s$  为声源深度。声源激发的海底散射位置处声压的简正波表达式为:

$$P(z_b, z_s, r) = e^{-i\pi/4} \sqrt{2\pi} \sum_n \varphi_n(z_s) \varphi_n(z_b) \frac{e^{i k_{rn} r}}{\sqrt{k_{rn} r}} \quad (13)$$

将式(12)、(13)代入式(11),即可求得小起伏粗糙界面下的混响声场表达式:

$$p_s = \frac{1}{4\pi} \sum_{m,n} S_{m,n} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \eta(r, \theta) dr d\theta e^{i(k_{rm} + k_{rn})r} \quad (14)$$

其中:

$$S_{m,n} = \frac{\varphi_m(z_b) \varphi_m(z_r) \varphi_n(z_s)}{\sqrt{k_{rm} k_{rn}}} \left( \frac{\partial \varphi_n(z_b)/\partial z}{Z} - \frac{\partial^2 \varphi_n(z_b)}{\partial z^2} \right) \quad (15)$$

式(15)与文献[16]中推导结果一致,当声速为  $c$ ,发射脉冲宽度  $\tau$  有限时,式(14)距离积分存在上下限。则对混响强度  $I_s$  进行系综平均后表示为:

$$\langle I_s \rangle = \langle p_s p_s^* \rangle \approx \frac{1}{16\pi^2} \sum_{m,n,m',n'} S_{m,n} S_{m',n'} \times \int_0^{2\pi} \int_{\frac{c}{2}(t-\tau)}^{\frac{c}{2}(t+\tau)} \langle \eta(r, \theta) \eta(r', \theta') \rangle dr d\theta e^{i(k_{rm} + k_{rn})r} \times \int_0^{2\pi} \int_{\frac{c}{2}(t-\tau)}^{\frac{c}{2}(t+\tau)} dr' d\theta' e^{-i(k_{r'm'} + k_{r'n'})r'} \quad (16)$$

海底起伏函数系综为:

$$\langle \eta(r, \theta) \eta(r', \theta') \rangle = R_\eta(r \cos \theta - r' \cos \theta', r \sin \theta - r' \sin \theta') \quad (17)$$

假设  $R_\eta$  为高斯相关系数,满足:

$$R_\eta(x, y) = \frac{\langle \eta^2 \rangle}{2\pi l_x l_y} \exp(- (x^2/2l_x^2 + y^2/2l_y^2)) \quad (18)$$

式中:  $l_x, l_y$  为海底界面相关长度,在远场时,做代换  $r'' = r' - r, \theta'' = \theta' - \theta$ ,对  $\theta''$  积分并假设  $l = l_x = l_y \gg r''$ (小起伏界面),根据文献[16]则有:

$$\int_{-\theta}^{2\pi-\theta} d\theta'' R_\eta(r, r'', \theta, \theta'') \approx \frac{\langle \eta^2 \rangle}{\pi r l \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{r''^2}{2l^2}\right) \approx \frac{\langle \eta^2 \rangle}{\pi r l \sqrt{2\pi}} \quad (19)$$

则式(16)表达为:

$$\langle I_s(r'_0, f) \rangle \approx \frac{1}{16\pi^2} \sum_{m,n,m',n'} S_{m,n} S_{m',n'} \times \frac{2\pi \langle \eta^2 \rangle}{\pi r'_0 l \sqrt{2\pi}} \int_{r_0}^{r_0 + \frac{c\tau}{2}} e^{i[k_{rm} + k_{rn} - (k_{r'm'} + k_{r'n'})]r} dr \times \int_{r_0 - r}^{r_0 + \frac{c\tau}{2} - r} e^{-i(k_{r'm'} + k_{r'n'})r''} dr'' = \frac{1}{16\pi^2} \sum_{m,n,m',n'} S_{m,n} S_{m',n'} \frac{\langle \eta^2 \rangle 2\pi}{\pi r'_0 l \sqrt{2\pi}} \times \int_{r_0}^{r_0 + \frac{c\tau}{2}} e^{i(k_{rm} + k_{rn})r} dr \times \int_{r_0}^{r_0 + \frac{c\tau}{2}} e^{-i(k_{r'm'} + k_{r'n'})r'} dr' \quad (20)$$

根据积分中值定理,化简为:

$$\int_{r_0}^{r_0 + \frac{c\tau}{2}} e^{i(k_{rm} + k_{rn})r} dr \times \int_{r_0}^{r_0 + \frac{c\tau}{2}} e^{-i(k_{r'm'} + k_{r'n'})r'} dr' = (c\tau/2)^2 e^{i(k_{rm} + k_{rn} - k_{r'm'} - k_{r'n'})r^*} \quad (21)$$

$r^* \in [r_0, r_0 + \frac{c\tau}{2}]$  是公共中值可以写作  $r^* = r_0 + \delta r_0$ 。最终,混响系综强度可写为:

$$\langle I_s(r_0, \omega) \rangle \approx \frac{(c\tau)^2}{32\sqrt{2\pi}\pi^2} \frac{\langle \eta^2 \rangle}{l} \times \sum_{m,n,m',n'} S_{m,n} S_{m',n'} \frac{e^{i(k_{rm} + k_{rn} - k_{r'm'} - k_{r'n'}) (r_0 + \delta r_0)}}{r_0} \times \sum_{m,n,m',n'} S_{m,n} S_{m',n'} \frac{e^{i(k_{rm} + k_{rn} - k_{r'm'} - k_{r'n'}) (r_0 + \delta r_0)}}{r_0} \quad (22)$$

式(22)所示的二维系综混响强度的一族等值线上,有  $\langle I_s(r, \omega) \rangle = \langle I_s(r + \Delta r, \omega + \Delta \omega) \rangle$ ,在相位上表达为:

$$[k_{rm}(\omega) - k_{r'm'}(\omega) + k_{rn}(\omega) - k_{r'n'}(\omega)](r + \delta r) = [k_{rm}(\omega + \Delta \omega) - k_{r'm'}(\omega + \Delta \omega)](r + \delta r + \Delta r) + [k_{rn}(\omega + \Delta \omega) - k_{r'n'}(\omega + \Delta \omega)](r + \delta r + \Delta r) \quad (23)$$

根据一阶泰勒展开式则有  $k_r(\omega + \Delta \omega) = k_r(\omega) + (\partial k_r/\partial \omega) \Delta \omega$ 。同时群慢度  $s_g$  和相慢度  $s_p$  可以表示为群速度  $c_g$  和相速度  $c_p$  的倒数,表达式写为:

$$s_g = 1/c_g = \partial k_r/\partial \omega, s_p = 1/c_p = k_r/\omega \quad (24)$$

因此式(23)在忽略二阶小量的情况下可以写为:

$$(k_{rm} - k_{r'm'} + k_{rn} - k_{r'n'}) \Delta r = - (r + \delta r) \left( \frac{\partial k_{rm}}{\partial \omega} - \frac{\partial k_{r'm'}}{\partial \omega} + \frac{\partial k_{rn}}{\partial \omega} - \frac{\partial k_{r'n'}}{\partial \omega} \right) \Delta \omega \quad (25)$$

根据式(25),海底系综混响强度时空干涉结构满足:

$$-\frac{s_g^{mm'} + s_g^{nn'}}{s_p^{mm'} + s_p^{nn'}} = \frac{\omega}{r + \delta r} \frac{\Delta r}{\Delta \omega} \approx \frac{\omega}{r} \frac{\Delta r}{\Delta \omega} \quad (26)$$

式(26)表明在系综混响强度中,才会在时频域存在类似于水声传播中稳定的干涉结构,可以用混响不变量来描述。

根据式(14)计算的混响强度  $I_s = p_s p_s^*$  和式(22)计算的系综混响强度  $\langle I_s(r_0, \omega) \rangle$ , 对声源深度 50 m, 接收器深度 65 m, 水深 88 m 的浅海混响进行仿真, 其结果如图 2 所示, 图 2(a) 为未系综混响仿真结果, 受到海底随机散射的影响, 混响干涉条纹被严重污染, 无法直接观测, 图 2(b) 为系综混响仿真结果, 经过系综后, 消除了海底随机散射的影响, 使得混响干涉条纹可以清晰观测到。

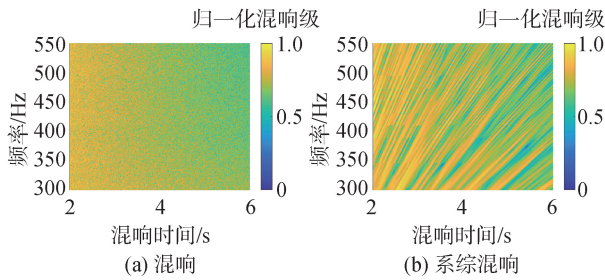


图 2 混响时频域信号仿真结果

Fig. 2 Simulation results of time-frequency domain signals of reverberation

然而,混响系综强度中存在的混响不变量的获取受到空间系综的影响,通常都需要进行大量的样本实验才可能得到稳定的结果<sup>[13]</sup>。目前,从混响系综强度中分离混响不变结构的方法仅考虑样本间结构特征,但并未考虑样本内的结构特征。当同时考虑样本间和样本内混响的结构特征时,将可能显著提高对混响不变结构的分离效果和混响不变量估计结果的准确性。由此,引入了一种 3D-Hankel 矩阵结构构造的方法来增强分离效果,并对构造方法提出了物理上的可解释性。

### 1.2 3D-Hankel 矩阵构造

Hankel 矩阵是一种具有特定结构特性的矩阵,对于任意的正整数  $m \times n$  的矩阵  $\mathbf{H}$  称为 Hankel 矩阵,如果它满足对所有的  $i$  和  $j$ , 当  $i + j$  为常数时,矩阵元素  $h_{ij}$  保持不变。数学上,这可以表示为:  $h_{ij} = h_{i+1, j-1}$  对于所有满足  $i + j = k$  的  $i, j$ , 其中  $k$  是固定的整数。

将信号构造成 Hankel 矩阵,从 1 个一维数据序列开始,该序列可以是时间序列、空间分布等。根据数据序列的长度和所需的分析精度,确定 Hankel 矩阵的行数和列数。按照 Hankel 矩阵的定义,将数据序列的元素填充到矩阵中,确保每条平行对角线上的元素值相等。其数学表示为:

假设有一个长度为  $N$  的数据向量  $\mathbf{I} = [h_1 \ h_2 \ h_3 \ \dots \ h_N]$ , 则一个由该向量构造的 Hankel 矩阵  $\mathbf{H}$  可以表示为:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_n \\ h_2 & h_3 & \dots & h_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_m & h_{m+1} & \dots & h_{m+n-1} \end{bmatrix} \quad (27)$$

式中:  $m, n$  表示矩阵的行数和列数,且满足  $m + n - 1 = N$ 。

块状 Hankel 矩阵是 1 个由子矩阵(块)组成的大矩阵,其中每个子矩阵位于矩阵的对角线上,并且与对角线平行的子矩阵是相同的。这意味着,如果  $\mathbf{H}_{uv}$  是矩阵中的第  $u$  行第  $v$  列的子矩阵,那么对于所有满足  $u + v - 1 = K$  的整数  $u$  和  $v$ ,子矩阵  $\mathbf{H}_{uv}$  是相同的。如果  $\mathbf{P}$  是 1 个以 Hankel 矩阵为元素的矩阵  $\mathbf{P} = [\mathbf{H}_1 \ \mathbf{H}_2 \ \mathbf{H}_3 \ \dots \ \mathbf{H}_K]$ , 构造块状 Hankel 矩阵,那么这个矩阵  $\mathbf{H}_{\text{block}}$  可以表示为:

$$\mathbf{H}_{\text{block}} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2 & \dots & \mathbf{H}_v \\ \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_3 & \dots & \mathbf{H}_{v+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{H}_u & \mathbf{H}_{u+1} & \dots & \mathbf{H}_{u+v-1} \end{bmatrix} \quad (28)$$

Hankel 矩阵构造能捕捉混响固有结构,得益于 Hankel 矩阵特殊的矩阵结构,混响在时频平面上形成双曲线形干涉条纹,如图 2(b) 所示,干涉条纹的斜率为:

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \beta \frac{f}{t} \quad (29)$$

定义时频图  $\mathbf{I}(t, f)$  中 2 个子区域为:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= \mathbf{I}(f_j : f_j + N - K, t_i : t_i + T - L) \\ \mathbf{I}_2 &= \mathbf{I}(f_j + \Delta f : f_j + \Delta f + N - K, t_i + \Delta t : t_i + \Delta t + T - L) \end{aligned} \quad (30)$$

若增量满足波导不变量  $\beta$  的约束,  $\Delta f = \beta \frac{f}{t} \Delta t$ ,

则 2 个子区域满足:

$$\mathbf{I}_1(t, f) \approx \mathbf{I}_2(t, f) \quad (31)$$

这表明,子区域在时频平面上的结构可通过平移相互映射,从而具有局部相似性。Hankel 矩阵构造利用这一物理现象,将所有子区域重塑为一维向量,并拼接成二维矩阵,从而将干涉结构的求解转换成低秩求解问题。

对于 2015 年南海混响实验的海洋环境,水深为 88 m,海底声速为 1 664 m/s,海底密度为 9 g/cm<sup>3</sup>,海底声衰减系数为 0.2 dB/λ,声速剖面如图 3 所示。

浅海底混响数据,数据为接收器深度 65 m,距接收器水平距离 200 m,深度 50 m 的 31 次爆炸声源的声信号接收数据,对其进行短时傅里叶变换

得到 31 张 lofar 图,图 4 给出了第 1Ping,第 6Ping,第 11Ping,第 16Ping。

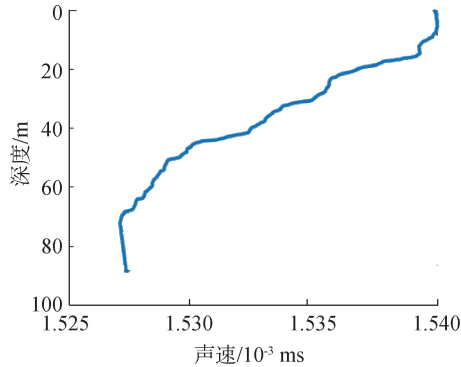


图 3 南海混响实验声速剖面

Fig. 3 Sound speed profile of the South China Sea reverberation experiment

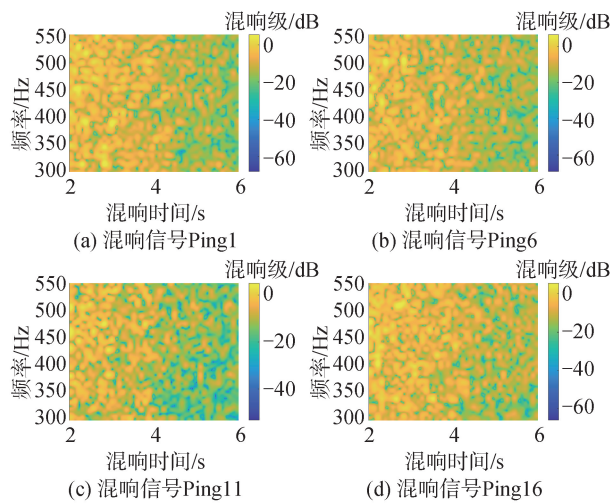


图 4 实测的不同 ping 的混响信号时频图

Fig. 4 Measured reverberation signals of different pings

实测数据处理结果表明,受到海底散射效应影响,浅海远距离的混响时频干涉结构遭到了明显破坏。简单的单样本混响时频处理无法获取混响不变量。

为了准确提取混响干涉结构,本文数据分为三维:频率、距离和次数,对其进行 3D-Hankel 矩阵构造过程如下:首先对距离维做 Hankel 矩阵构造,然后对频率维做块状 Hankel 矩阵构造,最后对次数维做块状 Hankel 矩阵构造。将这种 3D-Hankel 矩阵构造定义为  $H_{3D}(\cdot)$ 。当对 3D-Hankel 结构的矩阵进行降秩重构后,矩阵会失去 Hankel 结构特性,此时,对其进行反对角线平均即可恢复 3D-Hankel 结构,从而恢复信号,将这一过程定义为  $H_{3D}^{-1}(\cdot)$ ,图 5 给出了 3D-Hankel 矩阵构造的流程图:

对原始数据和 3D-Hankel 矩阵构造后的数据进行奇异值分解,原始数据是三维数据,将每一 Ping 数据的重塑为一维数据,即将频率和距离的二维数

据重塑为一维数据,从而三维原始数据重塑为二维数据。原始数据大小为频率 256 个点,距离 46 个点,Ping 数为 31Ping,即  $256 \times 46 \times 31$  大小的数据,经过重塑后数据变为  $11\ 776 \times 31$  大小的数据。对三维原始数据进行 3D-Hankel 矩阵构造后数据已经变成二维数据。经过 1 次式(27),2 次式(28),其大小为  $49\ 536 \times 47\ 104$ 。分别计算原始数据和 3D-Hankel 矩阵的奇异值,并对奇异值进行归一化以及计算每个奇异值的占比,结果如图 6 所示。经过 3D-Hankel 矩阵构造后数据的低秩特性更加明显。

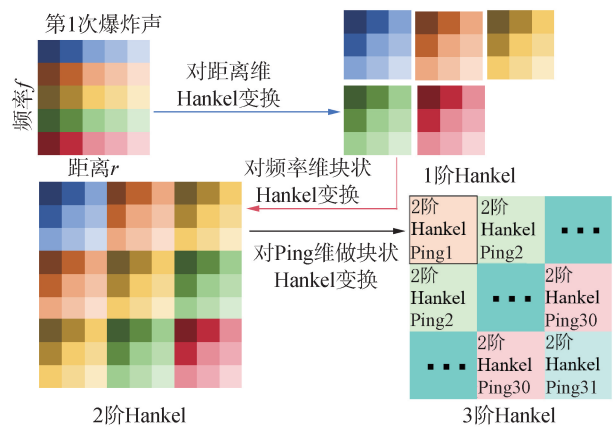


图 5 3D-Hankel 矩阵构造流程

Fig. 5 Flowchart of 3D-Hankel matrix construction

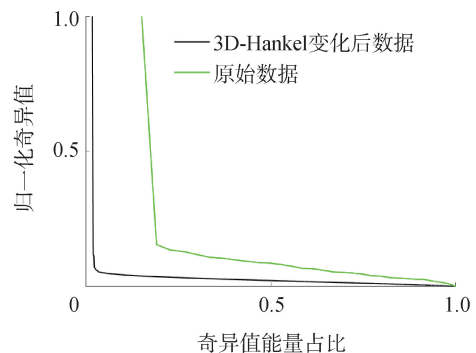


图 6 奇异值分布

Fig. 6 Singular value distribution

### 1.3 矩阵分解算法

广义正交分解 (general orthogonal decomposition, Go-Dec) 算法是将观测矩阵  $D \in \mathbf{R}^{m \times n}$  分解为低秩矩阵  $L \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 、稀疏矩阵  $S \in \mathbf{R}^{m \times n}$  和噪声矩阵  $N \in \mathbf{R}^{m \times n}$ , 即:  $D = L + S + N$ 。其中:  $\text{rank}(L) \leq r$  (低秩约束);  $\|S\|_0 \leq k$  (稀疏约束);  $N$  为噪声。算法通过交替优化  $L$  和  $S$  实现目标函数的最小化。输入观测矩阵  $D$ , 低秩约束  $r$ , 稀疏度  $k$ , 最大迭代次数  $t_{\max}$ , 误差阈值  $\epsilon$ , 初始化低秩矩阵  $L_0$  和稀疏矩阵  $S_0$ 。对待分解矩阵进行进行双边随机投影 (bilateral random projection, BRP) 降低矩阵维度, 再进行基提取, 生成随机投影矩阵  $A_1 \in \mathbf{R}^{n \times r}$ 。计算投影:  $A_2 = \tilde{D}A_1, Y_2 = \tilde{D}^H A_2, Y_1 = \tilde{D}Y_2$ , 对  $Y_1$  和  $Y_2$  进行 QR 分

解,提取正交基:  $Y_1 = Q_1 R_1, Y_2 = Q_2 R_2$ , 其中  $Q_1 \in \mathbf{R}^{m \times r}, Q_2 \in \mathbf{R}^{n \times r}$  为列正交矩阵。通过投影基重构低秩矩阵。进行稀疏矩阵更新,计算残差:  $E_t = D - L_{t+1}$ 。对  $E_t$  进行硬阈值处理,保留前  $k$  个最大绝对值元素:  $S_t = P_{\Omega}^k(D - L_t)$ , 其中  $P_{\Omega}^k(\cdot)$  为硬阈值算子。终止条件若满足  $\|D - L_{t+1} - S_{t+1}\|_F < \epsilon$  或  $t \geq t_{\max}$ , 终止迭代; 否则继续迭代。

3D-Hankel 矩阵可以增强信号的特征提取, 将 3D-Hankel 矩阵构造作为低秩分解的约束对数据进行分解。3D-Hankel 矩阵分解算法同样是将一个观测矩阵  $D$  分解为 3 个部分: 低秩矩阵  $L$ 、稀疏矩阵  $S$  和噪声矩阵  $N$ 。输入观测矩阵  $D$ , 低秩约束  $L_0$ , 稀疏度  $k$ , 最大迭代次数  $t_{\max}$ , 误差阈值  $\epsilon$ , 初始化低秩矩阵  $L_0$  和稀疏矩阵  $S_0$ 。对待分解矩阵进行进行双边随机投影降低矩阵维度, 再进行基提取, 生成随机投影矩阵  $A_1 \in \mathbf{R}^{n \times r}$ 。计算投影:  $A_2 = \tilde{D} A_1, Y_2 = \tilde{D}^H A_2, Y_1 = \tilde{D} Y_2$ , 对  $Y_1$  和  $Y_2$  进行 QR 分解, 提取正交基:  $Y_1 = Q_1 R_1, Y_2 = Q_2 R_2$  其中  $Q_1 \in \mathbf{R}^{m \times r}, Q_2 \in \mathbf{R}^{n \times r}$  为列正交矩阵。通过投影基重构低秩矩阵。此时数据失去 3D-Hankel 矩阵构造特性, 通过进行逆 3D-Hankel 矩阵构造  $L_t = H_{3D}^{-1}(L)$  恢复最初形式, 进行稀疏矩阵更新, 计算残差:  $E_t = D - L_{t+1}$ 。对  $E_t$  进行硬阈值处理, 保留前  $k$  个最大绝对值元素:  $S_t = P_{\Omega}^k(D - L_t)$ , 其中  $P_{\Omega}^k(\cdot)$  为硬阈值算子。终止条件若满足  $\|D - L_{t+1} - S_{t+1}\|_F < \epsilon$  或  $t \geq t_{\max}$ , 终止迭代; 否则继续迭代。在 3D-Hankel 分解算法的求解过程中, 将原始三维数据 3D-Hankel 矩阵构造从而实现将数据转化成二维。通过随机投影得到降秩结构后, 此时数据失去 3D-Hankel 矩阵构造特性, 通过进行逆 3D-Hankel 矩阵构造得到低秩矩阵  $L$ , 更新稀疏矩阵  $S$ 。重复更新步骤, 直到满足停止条件。最终输出优化后的低秩矩阵  $L$  和稀疏矩阵  $S$ 。

## 2 结果分析

针对 2015 年实测的浅海混响数据, 图 7(a)、(b) 展示了 GO-DEC 方法和 3D-Hankel 矩阵构造分解算法的结果, GO-DEC 方法是对 2015 年实测的 31Ping 浅海混响数据原始数据直接进行  $r = 1$  的主成分分析, 将距离和频率维度重塑为一维向量, 再按 ping 维排列, 经过奇异值分解后再恢复原形式。GO-DEC 方法分解的混响干涉结构并不清晰准确, 其中存在大量噪点, 这是因为噪声叠加和海洋环境不确定性引起的, 这可能会影响信号的进一步分析和处理。3D-Hankel 矩阵构造分解算法对 2015 年实测的浅海 31Ping 混响数据进行  $r = 20$  的主成分分析,  $r$  的选取依据图 6 的奇异值能量占比, 提取的混

响干涉结构显示出了更高的清晰度, 进一步去除了噪声, 消除了海洋不确定的影响。图 7(c)、(d) 给出了 10 号与 11 号, 10 号与 12 号筒正波干涉仿真结果, 3D-Hankel 分解结果与其表现出了极大的相似性, 由于低阶筒正波干涉跨度大在较小频率和时间范围内并不明显, 在较小范围内主要由高阶筒正波干涉形成干涉条纹, 3D-Hankel 分解在小区域干涉条纹分离过程中, 可以精准分离干涉结构的主要模态。

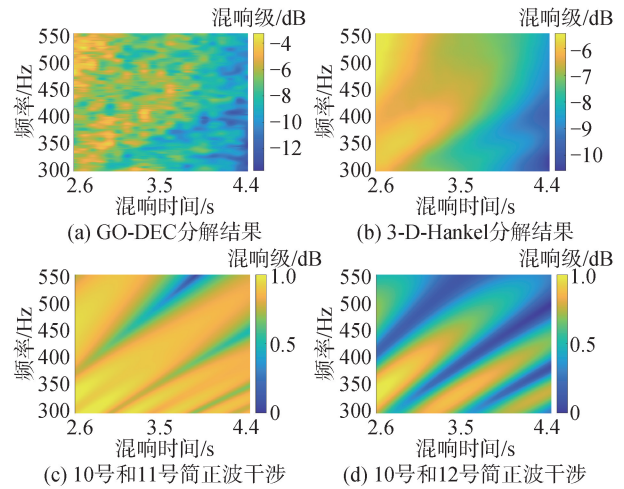


图 7 分解结果和筒正波干涉

Fig. 7 Decomposition results and normal mode interference diagrams

对分解结果与仿真结果不同时间范围进行 Radon 变换提取  $\beta$  分布,  $\beta_1 \sim \beta_6$  分别取 2.61~3.23 s, 2.67~3.30 s, 2.73~3.36 s, 2.80~3.42 s, 2.86~3.49 s, 2.92~3.55 s 这 6 个时间段进行处理, 结果如图 8 所示其中  $E$  为  $\beta$  的能量为。

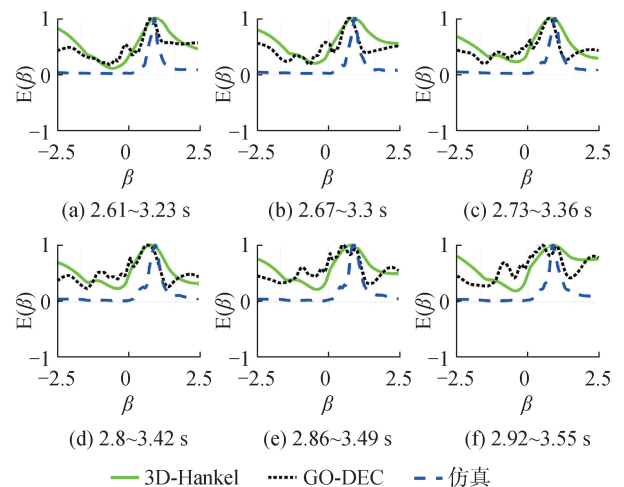


图 8 不同时间段  $\beta$  分布对比

Fig. 8 Comparison of  $\beta$  distributions across different time intervals

GO-DEC 分解结果  $\beta_1 \sim \beta_6$  的值分别为 1.01、0.92、0.92、0.83、0.66 和 0.63。3D-Hankel 矩阵构造分解结果  $\beta_1 \sim \beta_6$  的值分别为 1.17、1.08、1.01、

0.97、0.99 和 1.08。仿真结果  $\beta = 1.06$ 。3D-Hankel 矩阵构造分解结果  $\beta$  值更加接近仿真值,相较于 GO-DEC 分解结果,  $\beta_1 \sim \beta_6$  的值更加稳定,都集中在仿真值附近,GO-DEC 分解结果部分  $\beta$  出现了较大的偏离。表 1 和表 2 展示了对  $\beta_1 \sim \beta_6$  分布曲线进行相关计算的结果,3D-Hankel 矩阵构造分解结果相关最小值为 0.81,GO-DEC 分解结果相关最小值为 0.51,进一步证实了 3D-Hankel 矩阵构造分解方法在混响干涉条纹提取准确性和稳定性上的优势。

表 1 3D-Hankel  $\beta_1 \sim \beta_6$  分布曲线相关系数

Table 1 3D-Hankel  $\beta_1 \sim \beta_6$  distribution correlation coefficient

相关系数	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$	$\beta_6$
$\beta_1$	1.00	—	—	—	—	—
$\beta_2$	0.99	1.00	—	—	—	—
$\beta_3$	0.87	0.9	1.00	—	—	—
$\beta_4$	0.86	0.9	0.99	1.00	—	—
$\beta_5$	0.93	0.97	0.97	0.97	1.00	—
$\beta_6$	0.93	0.95	0.81	0.81	0.92	1.00

表 2 GO-DEC  $\beta_1 \sim \beta_6$  分布曲线相关系数

Table 2 GO-DEC  $\beta_1 \sim \beta_6$  distribution correlation coefficient

相关系数	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$	$\beta_6$
$\beta_1$	1.00	—	—	—	—	—
$\beta_2$	0.89	1.00	—	—	—	—
$\beta_3$	0.74	0.93	1.00	—	—	—
$\beta_4$	0.61	0.83	0.96	1.00	—	—
$\beta_5$	0.52	0.73	0.87	0.94	1.00	—
$\beta_6$	0.51	0.62	0.74	0.79	0.92	1.00

在不同时间段导致  $\beta$  波动 (1.17→0.97) 的原因为未完全去除的少量噪声的影响,对图 2(b) 干涉条纹进行不同混噪比噪声的污染,每个混噪比仿真 6 次,其  $\beta$  值会因为噪声发生波动,结果如表 3 所示。随着噪声减小,干涉条纹的  $\beta$  值趋于稳定,这进一步证实了噪声是影响波导不变量波动的原因。

表 3 不同混噪比  $\beta$  值的波动情况

Table 3 The fluctuation of  $\beta$  values under different reverberation-to-noise ratios

混噪比/dB	$\beta$ 值随次数变化					
-14	1.21	-1.58	1.64	-1.00	-2.42	1.01
-12	0.99	1.37	0.16	1.12	0.93	1.02
-10	0.97	1.00	1.62	1.16	1.12	1.11
-8	1.01	1.09	1.10	1.20	1.01	1.05
-6	1.06	1.01	1.12	1.03	1.03	1.09
-4	1.05	1.03	1.09	1.05	1.00	1.08
-2	1.04	1.08	1.06	1.04	1.09	1.04
0	1.06	1.05	1.04	1.06	1.08	1.08
2	1.08	1.07	1.07	1.06	1.07	1.06
4	1.06	1.06	1.05	1.07	1.07	1.04
6	1.06	1.05	1.06	1.05	1.07	1.05
8	1.05	1.07	1.05	1.07	1.060	1.07

### 3 结论

1) 浅海低频远程混响受波导的传播干涉效应影响,在时间-频率域存在稳定的干涉结构,但该结构是对混响样本的系综平均结果。在实测数据中,随机海底散射会严重破坏该干涉结构,导致无法准确提取。

2) 针对浅海低频远程混响的稳定干涉结构提取问题,本文基于微扰近似混响理论提出了浅海混响不变量的概念,并提出了一种基于 3D-Hankel 矩阵构造的时频域处理方法。通过结合 3D-Hankel 矩阵的低秩近似特性与奇异值分解技术,显著提升了混响干涉条纹的分离精度与稳定性。

3) 实验结果表明,本文提出的基于 3D-Hankel 矩阵构造的混响不变量提取方法,该方法充分利用了 Hankel 矩阵的低秩特性,能够有效抑制噪声及海底随机散射不确定性的干扰,成功分离出表征混响信号的干涉条纹结构。

4) 与传统的 GO-DEC 分解方法相比,3D-Hankel 矩阵构造分解算法在混响干涉条纹的清晰度、相关系数稳定性以及模态分离准确性方面均展现出显著优势,其提取的混响干涉条纹更接近仿真结果,相关系数波动范围更小。该方法通过增强信号特征提取能力,提高了对复杂海洋环境的适应性,为浅海声呐系统的目标探测、混响抑制、水下通信以及海底低质参数反演提供了新的技术途径。未来研究可进一步探索算法在单 Ping 数据处理中的潜力,并结合更多实际海试数据验证其鲁棒性,以推动该方法在主动声呐探测中的广泛应用。

### 参考文献:

[1] 高博, 杨士莪, 朴胜春, 等. 浅海远程海底混响的耦合简正波模型[J]. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2010, 40(12): 1461-1467.  
GAO Bo, YANG Shi'e, PIAO Shengchun, et al. Coupled normal mode model of remote submarine reverberation in shallow water[J]. Scientia sinica (physica, mechanica & astronomica), 2010, 40(12): 1461-1467.

[2] 李风华, 张燕君, 张仁和, 等. 浅海混响时间-频率干涉特性研究[J]. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2010, 40(7): 838-841.  
LI Fenghua, ZHANG Yanjun, ZHANG Renhe, et al. Study on time-frequency interference characteristics of reverberation in shallow water[J]. Scientia sinica (physica, mechanica & astronomica), 2010, 40(7): 838-841.

[3] 唐浩, 王方勇. 浅海主动声呐混响干涉结构特性及增强方法[J]. 声学及电子工程, 2020(2): 1-5.  
TANG Hao, WANG Fangyong. Structural characteristics and enhancement methods of reverberation interference in shallow sea active sonar[J]. Acoustics and electronics engineering, 2020(2): 1-5.

- [4] GOLDHAHN R, HICKMAN G, KROLIK J L. Waveguide invariant reverberation mitigation for active sonar [C]//2007 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and signal processing-ICASSP'07. Piscataway, NJ: IEEE, 2007: II-941-II-944.
- [5] GOLDHAHN R, HICKMAN G, KROLIK J. Waveguide invariant broadband target detection and reverberation estimation[J]. The journal of the acoustical society of America, 2008, 124(5): 2841-2851.
- [6] QUIJANO J E, ZURK L M. Use of the invariance principle for target tracking in active sonar geometries [M]. IEEE, 2006:35-49.
- [7] HOLLAND C W, ELLIS D D. Clutter from non-discrete seabed structures[J]. The journal of the acoustical society of America, 2012, 131(6): 4442-4449.
- [8] LI X, XIA Z. Research of underwater bottom object and reverberation in feature space[J]. Journal of marine. SCI. Appl, 2013, 12, 235-239.
- [9] YU G, PIAO S. Multiple moving targets detection and parameters estimation in strong reverberation environments [J]. Shock and vibration, 2016, 2016(1): 5274371.
- [10] WALL M E, RECHTSTEINER A, ROCHA L M. Singular value decomposition and principal component analysis [M]//A practical approach to microarray data analysis. Boston, MA: Springer US, 2003: 91-109.
- [11] HUANG N E, SHEN Z, LONG S R, et al. The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis[J]. Proceedings of the Royal Society of London. Series A: mathematical, physical and engineering sciences, 1998, 454(1971): 903-995.
- [12] ZHOU T, TAO D. Godec: Randomized low-rank & sparse matrix decomposition in noisy case [C]//Proceedings of the 28th international conference on machine learning, ICML 2011. 2011: 954-965.
- [13] PANG J, GAO B. Application of a randomized algorithm for extracting a shallow low-rank structure in low-Frequency reverberation[J]. Remote sensing, 2023, 15(14): 3648.
- [14] ZHAO X, YE B. Similarity of signal processing effect between Hankel matrix-based SVD and wavelet transform and its mechanism analysis[J]. Mechanical systems and signal processing, 2009, 23(4): 1062-1075.
- [15] JIN K H, YE J C. Annihilating filter-based low-rank Hankel matrix approach for image inpainting[J]. IEEE Transactions on image processing, 2015, 24(11): 3498-3511.
- [16] LEPAGE K. Bottom reverberation in shallow water: Coherent properties as a function of bandwidth, waveguide characteristics, and scatterer distributions[J]. The journal of the acoustical society of America, 1999, 106(6): 3240-3254.

### 本文引用格式:

高博,庄天一,庞杰,等. 基于 3D-Hankel 矩阵构造的混响不变量分离 [J]. 哈尔滨工程大学学报,2025,46(8):1530-1537.

GAO Bo, ZHUANG Tianyi, PANG Jie, et al. Reverberation invariant separation based on 3D-Hankel matrix construction[J]. Journal of Harbin Engineering University, 2025, 46(8): 1530-1537.