

引用格式: YANG Yaya, Li Hang, JIN Guangri. Spin squeezing characteristic time and quantum metrological precision in the two-axis twisting model[J]. Acta Photonica Sinica, 2026, 55(7):0727002

杨亚亚,李航,金光日. 双轴扭曲模型自旋压缩特征时间及量子度量精度[J]. 光子学报, 2026, 55(7):0727002

双轴扭曲模型自旋压缩特征时间及量子度量精度

杨亚亚,李航,金光日

(浙江理工大学 理学院 浙江 杭州 310018)

摘 要:双轴扭曲模型描述 N 个自旋 $1/2$ 粒子的非线性相互作用,用于制备原子自旋压缩态。过去的数值和近似解析解显示最优压缩态出现于特定时间,满足 $\ln(N)/N$ 标度律。本文重新研究双轴扭曲模型并分析其宇称对称性,从而得到平均自旋方向,以及自旋态压缩、反压缩方向。对自旋算符运动方程中高阶项采用截断近似,得到最优压缩时间的 $\ln(N)/N$ 标度律。分析有无噪声情况量子 Fisher 信息最大值,发现双轴扭曲自旋态可实现干涉仪相位测量精度突破标准量子极限,达到所谓的类海森堡标度率。

关键词:双轴扭曲模型;宇称对称;最优压缩;截断近似;量子 Fisher 信息;类海森堡标度律

中图分类号:O431.2

文献标识码:A

doi:10.3788/gzxb20265507.0727002

尊敬的编辑和审稿专家:

首先,对给予稿件《双轴扭曲模型自旋压缩特征时间及量子度量精度》详尽审查的编辑和提出专业审稿意见的专家们表示由衷的感谢。这些宝贵的意见和建议都很有参考价值,对我们的研究具有指导意义。我们仔细地考虑了每一条审稿意见,并对稿件进行了修改,修改内容已在稿件中标为红色。以下是对每一条审稿意见的回复,由蓝色字体标出。

对专家 1 的回复:

问题 1:图 1(b)图中作者分别采用了三种对压缩系数的判据方法。这三种判据在双轴扭曲模型下哪个更好?造成其不同结果的最大影响因素是什么?

回复 1:感谢专家提出的问题。下面是对三种压缩系数的分析总结:KITAGAWA M 与 UEDA M 定义的压缩系数 ξ^2 与自旋压缩的涨落有关,不能完整反映相位度量能力。WINELAND D J 等人定义的相位压缩参数 ξ_w^2 可描述相位灵敏度,是压缩态相位不确定度与标准量子极限的比值,但仅对高斯态有效,双轴扭曲体系常会出现非高斯态(如 GHZ 态、双数态等),所以该判据就会出现发散、失效。而对由量子 Fisher 信息定义的压缩参数来讲,该判据不依赖态是否高斯;并且可将相位测量精度的理论极限突破标准量子极限,达到所谓的海森堡标度率;该判据对双轴扭曲这类强非线性、易产生非高斯纠缠的模型,适用性更广、物理意义更完整。综上所述,影响这三类判据的最大因素为该自旋态是否属于高斯态。

问题 2:文中第三页,最优压缩时间 $\varphi_{\min}$ 和 $\tilde{\varphi}_{\min}$ 所表示的含义不同,但其表达式中的 $t_{\min}$ 是不是也应该有所区别,因为一般来讲不同刻画手段达到最优压缩时间是有差异的。

回复 2:感谢专家对我的指导意见。针对上述指导意见,已将稿件中的 $\tilde{\varphi}_{\min}$ 表达式修改为 $\tilde{\varphi}_{\min} = \chi \tilde{t}_{\min}$,并将图 2 的纵坐标修改为了 $\varphi_{\min}, \tilde{\varphi}_{\min}$ 。

问题 3:文中第五页根据 André 与 Lukin 提出的截断方案所采取的近似,其近似的条件是什么?其近似随着时间演化到什么程度会不适用?

基金项目:“量子通信与量子计算机”国家科技重大专项(2023ZD0300904)

第一作者:杨亚亚, 2270816364@qq.com

通讯作者:金光日, grjin@zstu.edu.cn

收稿日期:2026-01-22;录用日期:2026-04-17

<http://www.photon.ac.cn>

回复3:感谢专家提出的问题。ANDRÉ A 与 LUKIN M D 提出的截断近似方案在初始时刻严格成立,动力学满足短时间演化条件,系统的激发数和高阶关联均可忽略的特性,一旦演化时长增加、非线性关联累积,该截断将逐步失效。

问题4:维格纳函数的负性程度是否与量子 Fisher 信息的最大值有直接的定量关联?能否通过分析维格纳函数的负体积来预测或解释为何在噪声影响下系统仍然能保持一定的度量优势?

回复4:感谢专家提出的问题。下面是对此问题的回答:通常情况下,量子态的维格纳负体积越大,自旋态的非经典特征越突出,量子相干性与量子关联也越强,其所能承载的量子 Fisher 信息理论上限也更高。不过,二者并不存在严格一一对应的定量关系,仅凭单一的负体积数值,无法精确推算出量子 Fisher 信息的最大值。然而通过分析维格纳函数的负体积,能够有效预测并解释含噪声系统下的量子计量优势。若系统维格纳函数的负值区域未被噪声完全消除,且在可控噪声范围内保持稳定的非零负性,就说明体系中仍保留着量子相干性与非经典关联。这正是量子 Fisher 信息得以部分留存、相位测量精度突破标准量子极限、趋近海森堡标度规律的根源。

问题5:QFI 在什么条件下比 Wineland 定义的参数更普适?

回复5:感谢专家提出的问题。根据问题2的回答可知:QFI 定义的压缩参数不局限于自旋态是否属于高斯态,而 WINELAND D J 定义的压缩参数在自旋态为非高斯态的情况下会趋于发散的情况。因此 QFI 定义的压缩参数在非高斯态条件下更普适。

以上是对专家1的回复,下面是对专家2的回复。

问题1:写作格式与表述清晰度

公式和符号:论文部分公式显示错误(显示方框),似乎是 word 版本问题,请作者仔细校对论文公式中的特殊符号。

语言规范性:论文中部分句子较长,表述可以更加精炼,并将某些口语化表述调整为更正式的学术语言(不具体列出,请作者通篇进行语言润色)。

文末参考文献列表格式不统一,部分条目信息不全(如卷号)。需严格按照投稿期刊的要求进行检查和整理。

回复1:感谢专家对我的指导意见。根据上述内容,感谢专家对稿件细节之处的提醒,已将全篇稿件进行了仔细的修改,包括公式、格式和参考文献,并将修改之处标记为了红色。

问题2:论文中对系统宇称的定义存在细节上的不严格问题。宇称算符 $\exp[i\pi(j + \hat{J}_z)]$ 中的 $j = N/2$, 而决定宇称的是 $\{j + m\}$ 的奇偶,根据论文的定义 $j = N/2$ 和 m 的定义,奇宇称的定义似乎存在问题,论文中当 j 为奇数时显然 $m = -j, -j + 2, \dots$ 得到的为偶数,请作者仔细核对,要么修改 m 的定义,要么将 j 的取值改为 $j = \lceil N/2 \rceil, \lfloor N/2 \rfloor$ 表示向上取整数,比如 $N = 1$ 时, $j = \lceil N/2 \rceil = 1$, 均可。而且,论文既然讨论了系统态的奇偶宇称问题,所以论文在数值计算的时候不应该只选取 j 为偶数时的情况进行数值计算,这对于论文结论的一般性有影响。

回复2:感谢专家对我的指导意见。宇称对称性的提出,是为了说明双轴扭曲模型的平均自旋方向指向 z 轴。因为该模型属于偶宇称,这就导致了 $c_{m+1}^* c_m = 0$, 即 $\langle \hat{J}_+ \rangle = 0, \langle \hat{J}_x \rangle = \langle \hat{J}_y \rangle = 0$, 所以平均自旋方向指向 z 轴。对于宇称算符的错误表述已在稿件中标记为红色。

问题3:论文中所提到的“类海森堡标度率”是和本论文相关的一个重要概念,所以建议在论文中给予必要的说明和补充。

回复3:感谢专家对我的指导意见。压缩系数 $\xi_Q^2 = N/F_Q \approx \alpha/N$ 表明相位测量精度的理论下限(即量子 Cramer-Rao 下限)可达到 $1/\sqrt{F_Q} \approx \sqrt{\alpha}/N$, 称为海森堡标度率。我们的结果无法达到该极限,这是因为量子 Fisher 信息最大值在 N 足够大时($N > 100$), 仅能实现 $\xi_Q^2 \approx \alpha(N)/N$, 其中系数 $\alpha(N)$ 微弱地依赖于 N , 此标度率不是理想的海森堡标度律,而是一个只能达到类似于海森堡极限的标度率,因此称在噪声影响下测量精度的下限仅达到类海森堡标度率。

问题4:论文在引言部分列举了 TAT 模型可能的实验实现平台,建议在结论部分简要讨论一下本理论

研究结果(特别是考虑噪声后的结论)对实验的指导意义,从而增强论文的实验关联性从而降低论文是为了理论而研究理论的弊端。

回复4:感谢专家对我的指导意见。在退相干影响下的量子Fisher信息定义的压缩系数能够为实验设计提供思路:无需一味追求无噪的实验环境,而是聚焦于可控噪声区间内的最优压缩与测量方案匹配,适配现有实验技术的噪声水平,兼顾测量精度与实验可行性。

再次感谢编辑老师和各位审稿专家对本稿件提出的宝贵意见。每一次的修改,都是对稿件的进一步完善,这也增强了我做科研的严谨性。我们诚挚希望修改后的稿件能够满足审稿要求。如果还有其他的意见或建议,请随时告知我们,我们非常乐意给予解答和改进。

此致

敬礼!

0 引言

在光学干涉测量与光谱技术中,压缩光因其在提升相位测量精度方面的潜力而备受关注^[1]。从数学形式上看,单模光场的压缩真空态^[2]定义为 $\exp[\varphi(\hat{a}^2 - \hat{a}^{\dagger 2})/2]|0\rangle$,其中 φ 为压缩参量, $\hat{a}^\dagger$ 和 $\hat{a}$ 为光场的产生、湮灭算符, $|0\rangle$ 是光场的真空态。压缩真空态在物理本质上对应双光子过程,通过光子成对产生与湮灭实现。实验中,压缩光可由参量下转换、四波混频等技术实现^[2]。1981年,CAVES C M^[1]提出相干光-压缩真空光为马赫-曾德(Mach-Zehnder)干涉仪的输入态,通过光强差测量可实现相位测量精度超越标准量子极限^[1](Standard Quantum Limit, SQL)。类似地, N 个自旋1/2粒子(或者单个自旋 $N/2$)压缩态定义为 $\exp[\varphi(\hat{J}_-^2 - \hat{J}_+^2)/2]|j, -j\rangle$ ^[3],式中 $\hat{J}_\pm$ 分别为集体自旋的升、降算符, $|j, m\rangle$ 为自旋算符 $\hat{J}_z$ 的本征态、本征值为 $m\hbar$ (后续取普朗克常数 $\hbar=1$)。

多粒子自旋压缩态在量子精密测量^[4-7]领域有着重要应用。产生自旋压缩的物理机制主要包括原子-原子非线性相互作用^[3]、原子-光相互作用^[4-5,8-9]。KITAGAWA M与UEDA M^[3]从理论上提出两种非线性相互作用模型,即单轴扭曲模型和双轴扭曲模型,前者已在多个实验平台实现,包括玻色-爱因斯坦凝聚体系^[10-12]、金刚石的氮-空位色心系统^[13]、核自旋系统^[14]、超导量子比特系统^[15]、原子系综^[16]。双轴扭曲模型用于定义多原子系统真空压缩态,原则上可在现有单轴扭曲实验平台上通过多脉冲技术实现^[17]。例如超冷碱金属原子系统^[18-24]。最近多脉冲技术进一步用于实现所谓的三轴扭曲模型^[25],以及双轴扭曲模型^[26]。近期工作包括多模式量子纠缠态构成的量子网络^[27],原子系综中压缩态的制备与计量应用^[28],超冷原子系综的非高斯纠缠态与精密测量^[29],以及通过量子Fisher信息量标度非厄米离子阱系统中的量子相变^[30]。

双轴扭曲模型无法给出严格解,过去只能数值计算自旋算符涨落^[3],各种近似结果显示最优压缩时间满足 $\ln(N)/N$ 标度律^[31-33]。采用相空间半经典近似^[34-35],可求出双轴扭曲自旋压缩系数和量子Fisher信息的近似解析解。通过分析该模型的宇称对称性,证明平均自旋方向始终指向布洛赫球 z 轴,自旋压缩、反压缩方向分别沿 x 轴和 y 轴。为了理解双轴扭曲自旋压缩动力学,我们首先研究少粒子数情况,得到最优压缩态的严格解,其次对有限粒子数自旋系统的运动方程中高阶自旋算符进行截断近似,重新得到最优压缩时间的 $\ln(N)/N$ 标度律。最后以双轴扭曲自旋态为干涉仪探针态,数值计算有、无噪声情况下量子Fisher信息 F_Q 最大值(Quantum Fisher information, QFI^[36-38]),由此得到最优压缩系数 $\xi_Q^2 = N/F_Q \approx \alpha(N)/N$,其中系数 $\alpha(N)$ 微弱地依赖于粒子数 N 。上述结果表明噪声影响下,双轴扭曲模型的混合态依然对量子度量有用,相位测量精度的下限(即所谓的量子Cramer-Rao下限^[36-38])可达到所谓的类海森堡标度率(Heisenberg-like scaling)。

论文结构如下:第二节我们介绍双轴扭曲模型自旋压缩动力学;第三节解析求解双轴扭曲模型最优压缩时间与粒子数 N 之间的标度关系;第四节详述我们的核心发现:在含有噪声的系统中,量子Fisher信息定义的压缩参数可达到类海森堡极限的标度律,表明了即便存在噪声干扰,双轴扭曲模型所描述的混合量子态,在量子度量中仍可发挥作用。

1 双轴扭曲模型的自旋压缩动力学

双轴扭曲模型最早由KITAGAWA M和UEDA M提出^[3],用于描述 N 个自旋 $1/2$ 粒子(或者大自旋粒子)的非线性相互作用,其哈密顿量表示为

$$\hat{H} = \chi (\hat{J}_x \hat{J}_y + \hat{J}_y \hat{J}_x) = \frac{\chi}{2i} (\hat{J}_+^2 - \hat{J}_-^2) \quad (1)$$

式中及全文取 $\hbar = 1$, χ 描述自旋-自旋相互作用强度。集体自旋算符定义为

$$\hat{J}_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_\alpha^{(i)} \quad (\alpha = x, y, z) \quad (2)$$

其中, $\hat{\sigma}_\alpha^{(i)}$ 为第 i 个粒子的泡利算符, $\hat{J}_\pm = \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y$ 分别为集体自旋的升、降算符。与单模光场压缩真空态类似, $|\varphi\rangle = \exp[\varphi(\hat{J}_-^2 - \hat{J}_+^2)/2]|j, -j\rangle$ 为原子“压缩真空态”, $\varphi = \chi t$ 为无量纲时间, $|j, m\rangle$ 标记角动量 $\hat{J}_z$ 的本征态、本征值为 m 。原子压缩真空态可展开为

$$|\varphi\rangle = e^{\varphi(\hat{J}_-^2 - \hat{J}_+^2)/2}|j, -j\rangle = \sum_{m=-j}^j c_m(\varphi) |j, m\rangle \quad (3)$$

式中, $c_m(\varphi)$ 为概率幅, 求解含时薛定谔方程得到。注意到双轴扭曲模型具有守恒的宇称, 即哈密顿量与宇称算符 $\exp[i\pi(j + \hat{J}_z)]$ 对易。双轴扭曲模型对应偶宇称, 求和指标 m 取值遵循 $m = -j, -j+2, \dots$ 其中 $j = N/2$ 为角动量量子数。上述结果表明, 对于任意时间 $\varphi = \chi t$ 平均自旋始终指向 z 轴方向, 这是因为 $c_{m+1}^* c_m = 0$, 即 $\langle \hat{J}_+ \rangle = 0, \langle \hat{J}_x \rangle = \langle \hat{J}_y \rangle = 0$ 。图1(a)给出角动量 z 分量 $\langle \hat{J}_z \rangle = \sum_m m |c_m(\varphi)|^2$ 随时间的演化曲线, 可以发现 $\langle \hat{J}_z \rangle$ 从 $-j$ 开始增大, 除了特定时刻之外非零。

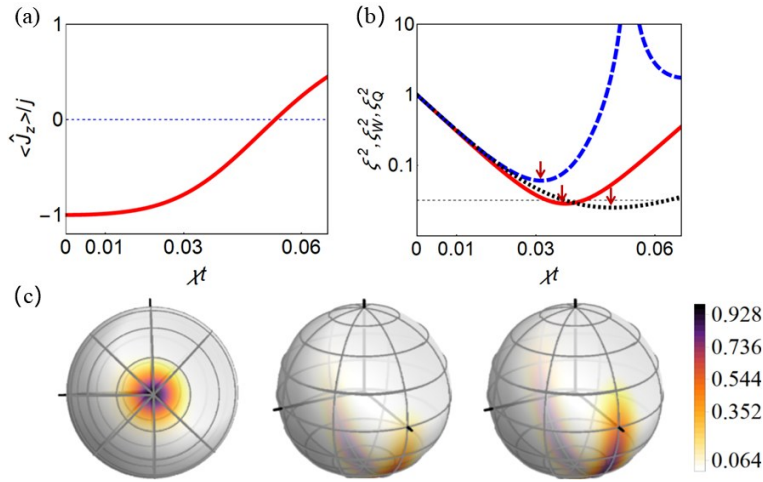


图1 双轴扭曲模型自旋压缩动力学及特定时刻自旋态的准概率分布($N=60$)。(a)归一化平均自旋 $\langle \hat{J}_z \rangle / j$; (b)三个自旋压缩系数随时间的变化曲线, 其中自旋压缩参数 ξ^2 (红色实线)、 ξ_w^2 (蓝色虚线)、 ξ_Q^2 (黑色点线); (c)初始时刻、 $\varphi_{\min}$ 和 $\varphi_{\max}$ 自旋态对应的准概率分布

Fig. 1 Spin squeezing dynamics of two-axis twisting model and the quasi-probability distributions of the spin states at specific times($N=60$). (a) Evolution of the normalized mean spin $\langle \hat{J}_z \rangle / j$; (b) Time dependence of the three spin squeezing coefficients: ξ^2 (red solid curve), ξ_w^2 (blue dashed curve), and ξ_Q^2 (black dotted curve); (c) Quasi-probability distributions (Q-functions) of the collective spin states at the initial moment, $\varphi_{\min}$ and $\varphi_{\max}$

为了研究原子自旋态 $|\varphi\rangle$ 的涨落分布, 可引入垂直于 z 轴的单位矢量 $\vec{n}_\perp = (\cos\eta, \sin\eta, 0)$, 因此有 $\hat{J}_\eta = \hat{J} \cdot \vec{n}_\perp$, 即 $\hat{J}_\eta = \hat{J}_x \cos\eta + \hat{J}_y \sin\eta$, 其中 η 为自旋压缩角度。根据文献^[40], 该自旋分量的涨落为

$$(\Delta \hat{J}_\eta)^2 = \frac{1}{2} [\langle \hat{C} \rangle + \langle \hat{A} \rangle \cos(2\eta) + \langle \hat{B} \rangle \sin(2\eta)] \quad (4)$$

其中

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{J}_x^2 - \hat{J}_y^2 = (\hat{J}_+^2 + \hat{J}_-^2)/2 \\ \hat{B} = \hat{J}_x \hat{J}_y + \hat{J}_y \hat{J}_x = \hat{H}/\chi \\ \hat{C} = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 \end{cases} \quad (5)$$

令 $(\Delta \hat{J}_\eta)^2$ 对 η 的一阶导数为零,可得最优压缩角 η_{op} ,满足 $\tan(2\eta_{\text{op}}) = \langle \hat{B} \rangle / \langle \hat{A} \rangle$ 。代入式(4)中,得到最优涨落 $V_\pm = \left(\langle \hat{C} \rangle \pm \sqrt{\langle \hat{A} \rangle^2 + \langle \hat{B} \rangle^2} \right) / 2$ 。另一方面,由于对易式 $[\hat{B}, \hat{H}] = 0$,因此 $\langle \hat{B} \rangle$ 不随时间演化。对于初态 $|j, -j\rangle$,可求出 $\langle \hat{B} \rangle = \text{Im} \langle J_+^2 \rangle = 0$,该结果对于任意时间都成立,意味着 $\eta_{\text{op}} = 0$ 或 $\pi/2$ 。这一结果表明 $|\varphi\rangle$ 的最优压缩方向沿 x 轴、反压缩方向沿 y 轴(如图 1(c) 准概率分布所示),相应的涨落分别为

$$V_\pm = \frac{\langle \hat{C} \rangle \pm |\langle \hat{A} \rangle|}{2} = \frac{j(j+1) - \langle \hat{J}_z^2 \rangle \pm |\langle \hat{A} \rangle|}{2} \quad (6)$$

式中, $\langle \hat{A} \rangle = \text{Re} \langle J_+^2 \rangle$,此外第二步已假定原子数目守恒, $\hat{C} = j(j+1) - \hat{J}_z^2$ 。双轴扭曲自旋压缩可实现涨落 $V_- = (\Delta \hat{J}_x)^2$ 小于标准量子极限 $j/2$ 、反压缩涨落 $V_+ = (\Delta \hat{J}_y)^2 > j/2$,确保海森堡不确定关系 $(\Delta \hat{J}_x)^2 (\Delta \hat{J}_y)^2 \geq |\langle \hat{J}_z \rangle|^2 / 4$ 依然成立,其中平均自旋大小 $|\langle \hat{J}_z \rangle| \leq j$,如图 1(a) 所示。自旋态 $|\varphi\rangle$ 的压缩程度由压缩系数 $\xi^2 = 2V_-/j$ 度量^[3]。对于初态 $|j, -j\rangle$, $(\Delta J_x)^2 = (\Delta J_y)^2 = j/2$,即 $\xi^2 = 1$ 。随着非线性相互作用诱导的量子关联增强,压缩分量的涨落可突破标准量子极限,演化为自旋压缩态(即 $\xi^2 < 1$),如图 1(b) 中红色实线所示。压缩系数在特定时刻达到极小值,对应于最大压缩态,压缩度量 $\xi_{\text{min}}^2 = \xi^2(\varphi_{\text{min}})$,其中最优压缩时间 $\varphi_{\text{min}} = \chi t_{\text{min}}$ 。

在量子度量学领域,与相位灵敏度有关的压缩系数^[4-5]定义为

$$\xi_w^2 = \frac{2j}{|\langle \hat{J}_z \rangle|^2} V_- \quad (7)$$

由于 $|\langle \hat{J}_z \rangle| \leq j$,因此 $\xi_w^2 \geq \xi^2$ 。图 1(b) 蓝色虚线显示, ξ_w^2 在特定时刻达到极小值,记为 $\tilde{\varphi}_{\text{min}} = \chi \tilde{t}_{\text{min}}$ 。值得提及, $\xi_w^2 < 1$ 表征度量有益的自旋压缩态,但该判据仅适合高斯型压缩态^[39]。对于非高斯态,例如 GHZ 态(即 Greenberger - Horne - Zeilinger 态) $\sim (|j, j\rangle + e^{i\alpha} |j, -j\rangle)$,平均自旋大小 $\langle \hat{J}_z \rangle = 0$,导致压缩系数 ξ_w^2 发散,如图 1(b) 蓝色虚线 $\chi t \sim 0.05$ 处。

量子 Fisher 信息确定相位测量精度的理论下限^[36-38],即所谓的量子 Cramer-Rao 下限 $1/\sqrt{F_Q}$ 。为了方便,可以用 QFI 重新定义压缩系数^[39]

$$\xi_Q^2 = \frac{N}{F_Q} < 1 \quad (8)$$

式中, F_Q 为量子 Fisher 信息^[36]。考虑自旋态 $|\varphi\rangle$ 作为输入态^[41],干涉仪的末态为 $\exp(-i\theta \hat{J}_y) |\varphi\rangle$,QFI 定义为

$$F_Q = 4 \left[\langle \varphi | \hat{J}_y^2 | \varphi \rangle - |\langle \varphi | \hat{J}_y | \varphi \rangle|^2 \right] = 4V_+ \quad (9)$$

其中, $V_+ = (\Delta \hat{J}_y)^2$,由式(6)给出。对于初态 $|j, -j\rangle$ (即式(3)中取 $\varphi = 0$),相当于自旋相干态^[42-44],即 $|\theta, \phi\rangle$ 其中极角和方位角 $\theta = \phi = 0$,式(6)给出 $V_+ = j/2$,即 $F_Q = N$, $\xi_Q^2 = 1$,在相位度量精度仅能达到标准量子极限。对于双数态^[45-47],其量子 Fisher 信息为 $F_Q = N(N+2)/2$,进而可得 $\xi_Q^2 \approx 2/N$,如图 1(b) 中灰色横线所示,相位度量精度突破标准量子极限,达到所谓海森堡标度率(Heisenberg scaling)。图 1(b) 黑色点线可以看出, ξ_Q^2 的最小值出现在 φ_{min} 之后时刻,并且略低于灰色横线,表明双轴扭曲模型可制备非高斯自旋态,其相位测量精度可优于双数态情况。

对上述三个压缩参数分析总结:KITAGAWA M 与 UEDA M 定义的压缩系数^[3] ξ^2 与自旋压缩的涨落有关,不能完整反映相位度量能力。WINELAND D J 等人定义的相位压缩参数^[4-5] ξ_w^2 可描述相位灵敏度,是压缩态相位不确定度与标准量子极限(SQL)的比值,但仅对高斯态有效,双轴扭曲体系常会出现非高斯态(如 GHZ 态、双数态等),所以该判据就会出现发散、失效。而对由量子 Fisher 信息定义的压缩参数^[39]来讲,该判

据不依赖态是否高斯;并且可将相位测量精度的理论极限突破标准量子极限,达到所谓的海森堡标度率;该判据对双轴扭曲这类强非线性、易产生非高斯纠缠的模型,适用性更广、物理意义更完整。综上所述,影响这三类判据的最大因素为该自旋态是否属于高斯态。

图 1(c)中给出 $\varphi = 0, \tilde{\varphi}_{\min}, \varphi_{\min}$ 三个时刻自旋态 $|\varphi\rangle$ 在布洛赫球上的准概率分布,分别对应初态、相位度量有益的自旋态、最大压缩态。为了简单起见,这里讨论特定时刻自旋态的 Q 函数,定义为 $Q = |\langle \theta, \phi | \varphi \rangle|^2$,其中 $|\theta, \phi\rangle$ 标记自旋相干态^[42-44], $|\varphi\rangle$ 为双轴扭曲自旋态,由式(3)给出。可以看出,初态在垂直于 z 轴的方向上展现各向同性涨落分布。经过一段时间演化,自旋压缩态展现各向异性涨落分布,压缩方向沿 x 轴方向、反压缩方向沿 y 轴方向,与式(6)处分析一致。图 2 给出 $\varphi_{\min}$ 随粒子数 N 的变化(红色实心圆),红色实线为数值拟合结果。发现最优压缩时间 $t_{\min}$ 遵循 $\ln(N)/N$ 的标度关系。大量数值模拟结果表明,最优压缩时间满足标度律

$$\varphi_{\min} = \chi t_{\min} \approx 0.527 \frac{\ln(N)}{N} \quad (10)$$

压缩系数 $\xi_{\min}^2 \approx 1.82/N$ 。图 2 蓝色方块为 ξ_w^2 达到极小值特征时间,数值结果 $\tilde{\varphi}_{\min} = \chi \tilde{t}_{\min} \approx 0.478 \ln(N)/N$,相应的最优压缩系数 $\xi_{w,\min}^2 \approx 3.9/N$ 。特征时间及压缩系数的部分数值结果已发表于文献^[17]中。

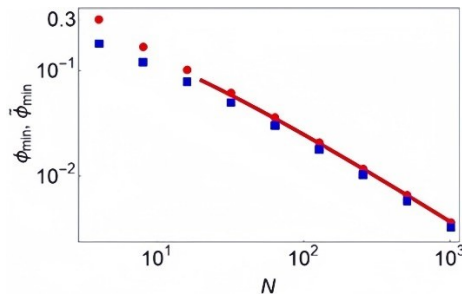


图 2 最优压缩时间 $\varphi_{\min}$ (红色圆点)与 $\tilde{\varphi}_{\min}$ (蓝色方块)随粒子数 N 的关系

Fig. 2 The relationship between the optimal squeezing times $\varphi_{\min}$ (red circles) and $\tilde{\varphi}_{\min}$ (blue squares) and the particle number N

2 自旋压缩态及特征时间

为了简单,首先研究少粒子数自旋系统($N = 2, 3, 4$),通过对概率幅 c_m 求解,得到压缩方差 V_- 达到极小值时所对应的自旋压缩态。对于有限 N 情况,我们试图近似求解 V_- 极小值,以及最优压缩时间。

2.1 少粒子数情形

当 $N = 2$ 时,在双轴扭曲哈密顿量作用下,从初始态 $|j, -j\rangle$ 开始动力学演化,非零概率幅为 $c_{-1}(\varphi) = \cos \varphi, c_1(\varphi) = -\sin \varphi$ 。 x 轴方向的涨落为 $V_- = (\Delta J_x)^2 = [1 - |\sin(2\varphi)|]/2$,其在 $\varphi_{\min} = \pi/4$ 时达到最小值 $(V_-)_{\min} = 0$,对应自旋压缩参数 $\xi_{\min}^2 = 0$ 。此时的自旋压缩态为

$$|\varphi_{\min}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, -1\rangle - |1, 1\rangle) \quad (11)$$

当 $N = 3$ 时,非零概率幅 $c_{-3/2}(\varphi) = \cos(\sqrt{3}\varphi), c_{1/2}(\varphi) = -\sin(\sqrt{3}\varphi)$ 。 x 轴方向的涨落为 $V_- = [7/2 - 2\cos^2(\sqrt{3}\varphi) - |\sqrt{3}\sin(2\sqrt{3}\varphi)|]/2$,在 $\varphi_{\min} = \pi/(6\sqrt{3})$ 时达到最小值 $(V_-)_{\min} = 1/4$,对应 $\xi_{\min}^2 = 1/3$,相应的最大压缩态表示为

$$|\varphi_{\min}\rangle = \frac{1}{2}(\sqrt{3}|3/2, -3/2\rangle - |3/2, 1/2\rangle) \quad (12)$$

对于 $N = 4$,非零概率幅 $c_2(\varphi) = \sin^2(\sqrt{3}\varphi), c_{-2}(\varphi) = \cos^2(\sqrt{3}\varphi), c_0(\varphi) = -1/\sqrt{2}\sin(2\sqrt{3}\varphi)$,由此可求出涨落 V_- 的解析式,其在 $\varphi_{\min} = \pi/(6\sqrt{3})$ 时达到最小值 $(V_-)_{\min} = 1/4$,对应 $\xi_{\min}^2 = 1/4$,相应量子态为

$$|\varphi_{\min}\rangle = \frac{1}{4} \left(3|2, -2\rangle - \sqrt{6}|2, 0\rangle + |2, 2\rangle \right) \quad (13)$$

这些少粒子系统的精确解为后续数值解提供了可验证的结果,不仅揭示了压缩效应的产生机制,还阐明了最优压缩时间及其涨落随粒子数的变化规律。

2.2 有限粒子数情形

对于有限粒子数,双轴扭曲模型无法解析求解。这是因为自旋算符的海森堡方程无法封闭,例如

$$\frac{d\hat{J}_z}{d\varphi} = -(\hat{J}_+^2 + \hat{J}_-^2) = -2\hat{A} \quad (14)$$

其中,算符 $\hat{A}$ 由式(5)定义,另一方面,

$$\frac{d(\hat{J}_+^2 + \hat{J}_-^2)}{d\varphi} = 4 \left\{ [2j(j+1) - 1] \hat{J}_z - 2\hat{J}_z^3 \right\} \quad (15)$$

又与 $\hat{J}_z^3$ 相关,使得方程组无法封闭。借鉴 ANDRE A 与 LUKIN M D 提出的截断方案^[31],采用近似 $\langle \hat{J}_z^3 \rangle \approx \langle \hat{J}_z \rangle^3$,该截断近似在初始时刻严格成立,动力学满足短时间演化条件下,系统的激发数和高阶关联均可忽略的特性,一旦演化时长增加、非线性关联累积,该截断将逐步失效。考虑短时间演化行为,基于此截断方案,得到关于 $\langle \hat{J}_z \rangle$ 的封闭方程

$$\frac{d^2 \langle \hat{J}_z \rangle}{d\varphi^2} + 4(2j^2 + 2j - 1) \langle \hat{J}_z \rangle - 8 \langle \hat{J}_z \rangle^3 = 0 \quad (16)$$

其解析解可表示为 $\langle \hat{J}_z \rangle = -j \operatorname{cd}(a\varphi; v)$,其中 $a = 2\sqrt{j^2 + 2j - 1}$, $v = (2j/a)^2$, $\operatorname{cd}(u; v) = \operatorname{cn}(u; v) / \operatorname{dn}(u; v)$ 为雅可比椭圆函数。利用式(6)可知,涨落满足 $2V_- = j(j+1) - \langle \hat{J}_z^2 \rangle - |\langle \hat{A} \rangle|$,其中 $d\langle \hat{J}_z \rangle / d\varphi = -2\langle \hat{A} \rangle$,如式(14)所示。再取近似 $\langle \hat{J}_z^2 \rangle \approx \langle \hat{J}_z \rangle^2$,得到涨落近似解

$$\begin{aligned} V_- &\approx \frac{1}{2} \left\{ j(j+1) - \langle \hat{J}_z \rangle^2 - \frac{1}{2} \left| \frac{d\langle \hat{J}_z \rangle}{d\varphi} \right| \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ j(j+1) - j^2 \operatorname{cd}^2(a\varphi; v) - \frac{aj}{2} \right. \\ &\quad \left. \times \left| \operatorname{cn}(a\varphi + K(v); v) \operatorname{dn}(a\varphi + K(v); v) \right| \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

式中, $K(v)$ 为第一类完全椭圆积分。与数值模拟结果的对比,该表达式在演化初期具有较高的精度。令 $V_- = 0$,得到最优压缩时间

$$\varphi_{\min} \approx \frac{K(v)}{a} \sim \frac{1}{2} \frac{\ln(4N)}{N} \quad (18)$$

其中,最后一步用到 $v \lesssim 1$ 且 $j \gg 1$ 时的渐近关系, $a \approx 2j$ 和 $K(v) \approx \ln(8j)/2$ 。将 $\varphi_{\min}$ 代入式(17)可得

$$(V_-)_{\min} \approx \frac{1}{2} \frac{j-1}{j} \quad (19)$$

对于 $j \gg 1$, $(V_-)_{\min}$ 逐渐趋近于 $1/2$,这与 KITAGAWA M 和 UEDA M 的结果^[3]一致。压缩系数满足标度关系 $\xi_{\min}^2 = 2(V_-)_{\min}/j \approx 2/N$,与数值拟合 $\xi_{\min}^2 \approx 1.82/N$ 接近。该近似解有助于理解双轴扭曲模型自旋压缩行为,特别是最优压缩时间满足的 $\ln(N)/N$ 标度律。类似结果可用相空间的半经典近似^[34-35]得到。值得提及,在半经典近似中式(18)用于预测量子 Fisher 信息 F_Q 达到最大值(或 ξ_Q^2 达到极小值)^[35]。

3 噪声影响的量子 Fisher 信息

为了分析双轴扭曲自旋态在度量学中的潜在应用,需要进一步研究噪声影响下的量子 Fisher 信息。具体考虑自旋系统的集体退相干,动力学由主方程^[48-52]描述

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}] + \frac{\Gamma}{2} \left(\hat{J}_z \hat{\rho} \hat{J}_z - \frac{1}{2} \{ \hat{J}_z^2, \hat{\rho} \} \right) \quad (20)$$

其中, $\hat{H}$ 为双轴扭曲哈密顿量, 由式(1)表示, Γ 为集体退相干率。密度矩阵算符^[52] $\hat{\rho} = \sum_{m,n=-j} \rho_{m,n} |j, m\rangle \langle j, n|$, 矩阵元 $\rho_{m,n} = \langle j, n | \hat{\rho} | j, m \rangle$ 。对角化密度矩阵, 求出所有非零本征值 λ_i 及其本征态 $|\lambda_i\rangle$, 量子态又可以谱分解为 $\hat{\rho} = \sum_i \lambda_i |\lambda_i\rangle \langle \lambda_i|$ 。考虑双轴扭曲自旋态为干涉仪的探针态, 输出态 $\hat{\rho}(\theta) = \exp(-i\theta\hat{J}_y) \hat{\rho} \exp(i\theta\hat{J}_y)$ 的量子 Fisher 信息^[41]为

$$F_Q = \sum_i \lambda_i F_{Q,i} - \sum_{i \neq j} \frac{8\lambda_i \lambda_j}{\lambda_i + \lambda_j} |\langle \lambda_i | \hat{J}_y | \lambda_j \rangle|^2 \quad (21)$$

式中, λ_i 和 $|\lambda_i\rangle$ 分别为密度矩阵 $\hat{\rho}$ 的本征值及其本征态, $F_{Q,i}$ 为第 i 个本征态对量子 Fisher 信息的贡献, $F_{Q,i} = 4(\langle \lambda_i | \hat{J}_y^2 | \lambda_i \rangle - |\langle \lambda_i | \hat{J}_y | \lambda_i \rangle|^2)$ 。对于纯态情况 $\hat{\rho} = |\varphi\rangle \langle \varphi|$, 量子 Fisher 信息由式(9)给出。

图3给出不同退相干率 $\gamma = \Gamma/\chi$ 情况下量子 Fisher 信息 F_Q/N^2 随无量纲时间的变化, 其中粒子数取为 $N=10$ (a), 20 (b)。可以看出 F_Q/N^2 也在特定时刻达到最大值(灰色竖线处)。无噪声情况下($\gamma=0$), 通过图1(b)可知, 该特征时刻略大于最大压缩时间 $\varphi_{\min}$, 后者由式(10)给出。图3(a)和(b)的蓝色实线表明量子 Fisher 信息的最大值分别为 $F_Q/N^2 \approx 0.76$ (a), 0.7 (b)。这一结果在图4(a)也得到验证, 如图中蓝色实线及红色虚线所示。有噪声情况, F_Q/N^2 的特征时间进一步延后, 其最大值随退相干率增大而减小。具体而言, 退相干率 $\gamma=10$ 时, 图3(a)和(b)红色虚线表明量子 Fisher 信息的最大值 $F_Q/N^2 \approx 0.54$ (a), 0.59 (b)。当 $\gamma=20$, F_Q/N^2 最大值进一步减小, 分别约为 0.42 、 0.49 , 如图3(a)和(b)黑色点线的峰值所示。图3(c)和(d)显示不同退相干率 γ 情况下, 自旋态在特定时刻的准概率分布, 我们在布洛赫球上画出自旋态的维格纳函数^[53-62]。与图1(c)自旋态 Q 函数不同, 维格纳函数可以取负值, 表明自旋态具有非经典量子关联特性^[62]。图3(c)和(d)对应于 $N=10$ (a)和 20 (b)三个特征时刻自旋态的维格纳分布, 从左到右, 分别描述纯态($\gamma=0$)和混合态($\gamma=10, 20$)。可见呈现关于 x 轴对称的条纹状结构, 并伴有大量范围的负值区域。随着退相干率增大, 条纹结构逐渐变淡、模糊。通常情况下, 量子态的维格纳负体积越大, 自旋态的非经典特征越突出, 量子相干性与量子关联也越强, 其所能承载的量子 Fisher 信息理论上限也更高。不过, 二者并不存在严格一一对应的定量关系, 仅凭单一的负体积数值, 无法精确推算出量子 Fisher 信息的最大值。然而通过分析维格纳函数的负体积, 能够有效预测并解释含噪声系统下的量子计量优势。若系统维格纳函数的负值区域未被噪声完全消除, 且在可控噪声范围内保持稳定的非零负性, 就说明体系中仍保留着量子相干性与非经典关联。这正是量子 Fisher 信息得以部分留存、相位测量精度突破标准量子极限、趋近海森堡标度规律的根源。为了区分, 我们计算自旋态的纯度 $\text{Tr}(\hat{\rho}^2)$ 。图3(c)中, 从左至右, 自旋态的纯度依次为 1 、 0.29 、 0.26 ; 图3(d)中, 纯度分别为 1 、 0.22 、 0.18 。

为了分析混合态在度量学应用, 图4(a)给出特定粒子数目情况下($N=10, 20, 50$), 量子 Fisher 信息 F_Q/N^2 最大值随退相干率 γ 的变化曲线。可以看出, 当 $\gamma < 10^{-1}$ 时, 退相干率对 F_Q/N^2 最大值的影响可忽略。量子 Fisher 信息 F_Q/N^2 最大值分别约为 0.76 ($N=10$ 情况, 蓝色实线)、 0.7 ($N=20$ 情况, 红色虚线)、 0.66 ($N=50$ 情况, 黑色点线), 前两个结果与图3(a)和(b)中纯态结果(蓝色实线的最大值)吻合。随着 γ 增大(尤其是 $\gamma \geq 1$), 退相干效应对系统量子 Fisher 信息的影响逐渐显现, 具体而言, F_Q/N^2 最大值随 γ 增大而减小。图4(b)中考虑不同退相干率情况下($\gamma=0, N, 2N$), 量子 Fisher 信息 F_Q/N 最大值随粒子数 N 的变化关系。对于足够大 N , 无噪声情况($\gamma=0$), 量子 Fisher 信息最大值 $F_Q \approx 0.64N^2$ (蓝色点线), 表明压缩系数 $\xi_Q^2 = N/F_Q \approx 1.56/N$, 小于 KITAGAWA M 和 UEDA M^[3] 定义的压缩系数 $\xi_{\min}^2 \approx 1.82/N$, 以及 WINELAND DJ 等人^[4-5] 定义的压缩系数 $\xi_{W, \min}^2 \approx 3.9/N$ 。这在图1(b)中也能看到。当退相干率 $\gamma=N$ 时, 我们的数值结果显示最大值 $F_Q \approx 0.42N^2$ (红色方块), 相应的压缩系数 $\xi_Q^2 \approx 2.39/N$; 对于 $\gamma=2N$ 情况, 最大值 $F_Q \approx 0.3N^2$ (黑色三角), $\xi_Q^2 \approx 3.37/N$ 。

值得提及的是, 压缩系数 $\xi_Q^2 = N/F_Q \approx \alpha/N$ 表明相位测量精度的理论下限(即量子 Cramer-Rao 下限)可达到 $1/\sqrt{F_Q} \approx \sqrt{\alpha}/N$, 称为海森堡标度率。我们的结果无法达到该极限, 这是因为图4(b)给出的量子 Fisher 信息最大值在 N 足够大时($N > 100$), 仅能实现 $\xi_Q^2 \approx \alpha(N)/N$, 其中系数 $\alpha(N)$ 微弱地依赖于 N , 此标度率不

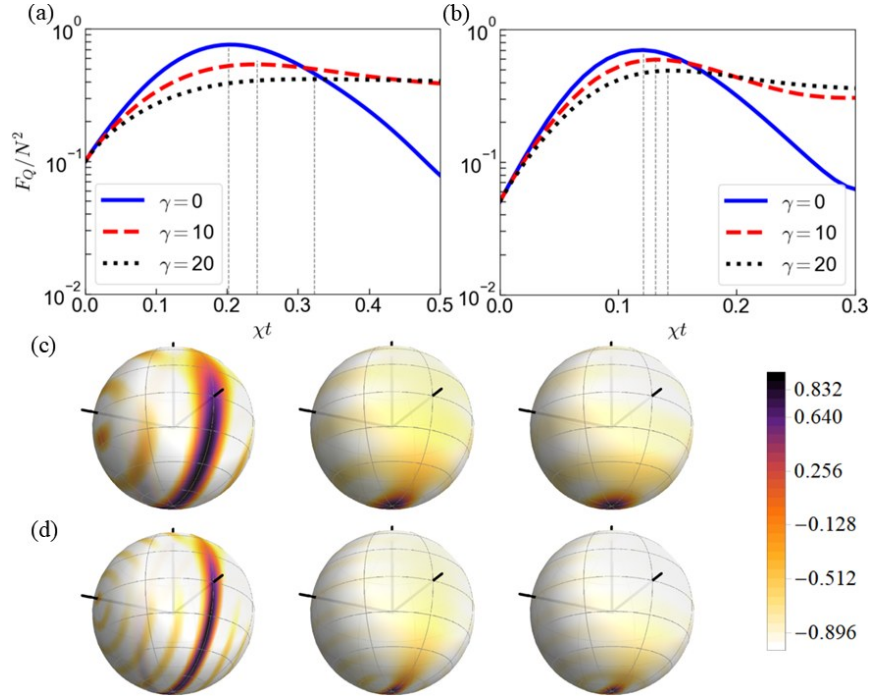


图3 量子Fisher信息随时间变化。(a)粒子数 $N=10$; (b)粒子数 $N=20$; (c)粒子数 $N=10$ 最大量子Fisher信息对应的自旋态维格纳分布,从左到右分别为 $\gamma=0$ (纯态)、退相干情况($\gamma=10, 20$); (d)粒子数 $N=20$ 最大量子Fisher信息对应的自旋态维格纳分布,从左到右分别为 $\gamma=0$ (纯态)、退相干情况($\gamma=10, 20$)

Fig.3 The Quantum Fisher Information as a function of time is presented. (a) shows the results for particle number $N=10$; (b) shows the results for particle number $N=20$; (c) displays the Wigner distributions of the spin states corresponding to the maximum QFI for $N=10$, from left to right, the columns represent $\gamma=0$ (pure state), and the decoherence scenarios with rates $\gamma=10, 20$; (d) displays the Wigner distributions of the spin states corresponding to the maximum QFI for $N=20$, from left to right, the columns represent $\gamma=0$ (pure state), and the decoherence scenarios with rates $\gamma=10, 20$

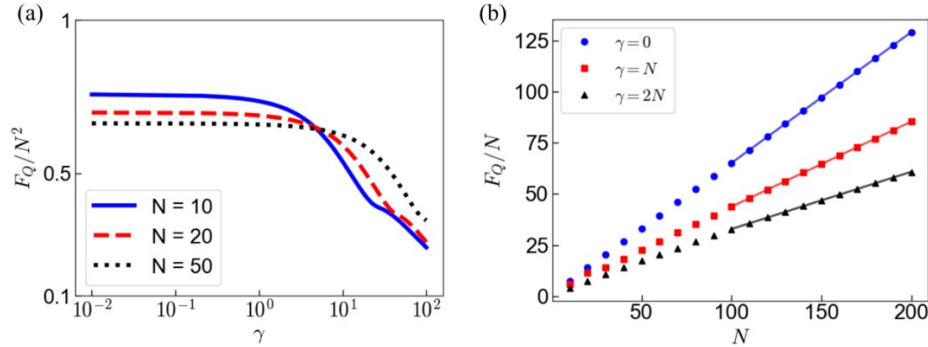


图4 量子Fisher信息最大值随不同变量的变化曲线。(a)退相干率;(b)粒子数目

Fig.4 The variation curves of the maximum quantum Fisher information with different variables. (a) Decoherence rate; (b) Number of particles

是理想的海森堡标度律,而是一个只能达到类似于海森堡极限的标度率,因此称在噪声影响下测量精度的下限仅达到类海森堡标度率。

4 总结

本文聚焦 N 个自旋 $1/2$ 粒子系统的集体自旋(或单个自旋粒子),以双轴扭曲模型为研究对象,系统探究其自旋压缩动力学特性及量子度量的应用价值。明确系统平均自旋沿布洛赫球 z 轴方向、压缩与反压缩方向分别沿 x 轴和 y 轴。针对少粒子数情况,给出最优压缩时间对应的自旋态解析表达式;通过高阶角动量算符截断近似得到有限粒子数场景下最优压缩时间满足 $\ln(N)/N$ 标度率并确定了三个压缩系数的标度规律。

进一步以该自旋态为干涉仪探针态,发现在集体退相干情况下,由量子Fisher信息定义的最优压缩系数可达 $\xi_Q^2 = N/F_Q \approx \alpha(N)/N$ (系数 $\alpha(N)$ 微弱依赖于 N),其相位测量精度可突破标准量子极限达到类海森堡标度率。在退相干影响下的量子Fisher信息定义的压缩系数能够为实验设计提供思路,无需一味追求无噪的实验环境,而是聚焦于可控噪声区间内的最优压缩与测量方案匹配,适配现有实验技术的噪声水平,兼顾测量精度与实验可行性。

致谢 双轴扭曲模型中压缩系数部分内容得到刘永椿和尤力的帮助,在此表达真诚的感谢。

参考文献

- [1] CAVES C M. Quantum-mechanical noise in an interferometer[J]. *Physical Review D*, 1981, 23(8): 1693.
- [2] GERRY C C, KNIGHT P L. Introductory Quantum Optics[M]. JING Jun, transl. Beijing: Tsinghua University Press, 2019.
GERRY C C, KNIGHT P L. 量子光学导论[M]. 景俊, 译. 北京: 清华大学出版社, 2019.
- [3] KITAGAWA M, UEDA M. Squeezed spin states[J]. *Physical Review A*, 1993, 47(6): 5138.
- [4] WINELAND D J, BOLLINGER J J, ITANO W M, et al. Spin squeezing and reduced quantum noise in spectroscopy[J]. *Physical Review A*, 1992, 46(11): R6797.
- [5] WINELAND D J, BOLLINGER J J, ITANO W M, et al. Squeezed atomic states and projection noise in spectroscopy [J]. *Physical Review A*, 1994, 50(1): 67.
- [6] MA J, WANG X G, SUN C P, et al. Quantum spin squeezing[J]. *Physics Reports*, 2011, 509(2-3): 89-165.
- [7] PEZZE L, SMERZI A, OBERTHALER M K, et al. Quantum metrology with nonclassical states of atomic ensembles[J]. *Reviews of Modern Physics*, 2018, 90(3): 035005.
- [8] QIN W, CHEN Y H, WANG X, et al. Strong spin squeezing induced by weak squeezing of light inside a cavity[J]. *Nanophotonics*, 2020, 9(16): 4853-4868.
- [9] LEROUX I D, SCHLEIER-SMITH M H, VULETIĆ V. Implementation of cavity squeezing of a collective atomic spin [J]. *Physical Review Letters*, 2010, 104(7): 073602.
- [10] ESTÈVE J, GROSS C, WELLER A, et al. Squeezing and entanglement in a Bose - Einstein condensate[J]. *Nature*, 2008, 455(7217): 1216-1219.
- [11] GROSS C, ZIBOLD T, NICKLAS E, et al. Nonlinear atom interferometer surpasses classical precision limit [J]. *Nature*, 2010, 464(7292): 1165-1169.
- [12] RIEDEL M F, BÖHI P, LI Y, et al. Atom-chip-based generation of entanglement for quantum metrology[J]. *Nature*, 2010, 464(7292): 1170-1173.
- [13] BENNETT S D, YAO N Y, OTTERBACH J, et al. Phonon-Induced Spin-Spin Interactions in Diamond Nanostructures: Application to Spin Squeezing[J]. *Physical review letters*, 2013, 110(15): 156402.
- [14] AUCCAISE R, ARAUJO-FERREIRA A G, SARTHOUR R S, et al. Spin squeezing in a quadrupolar nuclei NMR system[J]. *Physical Review Letters*, 2015, 114(4): 043604.
- [15] XU K, ZHANG Y K, SUN Z H, et al. Metrological characterization of non-Gaussian entangled states of superconducting qubits[J]. *Physical Review Letters*, 2022, 128(15): 150501.
- [16] HAN B, DUAN J L, JIN S C, et al. Spin squeezing of 10^{11} atoms by prediction and retrodiction measurements[J]. *Nature*, 2020, 581(7807): 159-163.
- [17] LIU Y C, XU Z F, JIN G R, et al. Spin squeezing: Transforming one-axis twisting into two-axis twisting[J]. *Physical review letters*, 2011, 107(1): 013601.
- [18] BARNETT S M, PEGG D T. Quantum theory of optical phase correlations[J]. *Physical Review A*, 1990, 42(11): 6713.
- [19] KUZMICH A, MANDEL L, JANIS J, et al. Quantum nondemolition measurements of collective atomic spin[J]. *Physical Review A*, 1999, 60(3): 2346.
- [20] KUZMICH A, MANDEL L, BIGELOW N P. Generation of spin squeezing via continuous quantum nondemolition measurement[J]. *Physical Review Letters*, 2000, 85(8): 1594.
- [21] LEROUX I D, SCHLEIER-SMITH M H, VULETIĆ V. Implementation of cavity squeezing of a collective atomic spin [J]. *Physical Review Letters*, 2010, 104(7): 073602.
- [22] SCHLEIER-SMITH M H, LEROUX I D, VULETIĆ V. Squeezing the collective spin of a dilute atomic ensemble by cavity feedback[J]. *Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 2010, 81(2): 021804.
- [23] CHEN Z L, JUSTIN G B, SHANNON R, et al. Conditional spin squeezing of a large ensemble via the vacuum Rabi splitting[J]. *Physical Review Letters*, 2011, 106(13): 133601.
- [24] INOUE R, TANAKA S I R, NAMIKI R, et al. Unconditional quantum-noise suppression via measurement-based quantum feedback[J]. *Physical review letters*, 2013, 110(16): 163602.

- [25] ZHANG X, HU Z, LIU Y C. Fast generation of GHZ-like states using collective-spin XYZ model[J]. Physical Review Letters, 2024, 132(11): 113402.
- [26] MA J, SHEN Y, HUANG J, et al. Quantum metrology via Floquet-engineered two-axis twisting and turning dynamics [J]. Physical Review A, 2025, 112(4): L040602.
- [27] WANG Jiawei, ZHANG Pei, CAI Yin. Advancements in MultiMode Quantum Entanglement Networks [J]. Chinese Journal of Lasers, 2024, 51(18): 1800003.
王嘉玮, 张沛, 蔡寅. 多模式量子纠缠及纠缠网络研究进展[J]. 中国激光, 2024, 51(18): 1800003.
- [28] WANG Enlong, WANG Guochao, ZHU Lingxiao, et al. Progress of Atomic Spin Squeezing and Its Applications in Quantum Precision Measurement[J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2024, 61(9): 0900001.
王恩龙, 王国超, 朱凌晓等. 原子自旋压缩在量子精密测量中的应用研究进展[J]. 激光与光电子学进展, 2024, 61(9): 0900001.
- [29] LU Bo, HAN Chengyin, ZHUANG Min, et al. Non-Gaussian entangled states and quantum metrology with ultracold atomic ensemble[J]. Acta Physica Sinica, 2019, 68(4): 58-67.
鹿博, 韩成银, 庄敏, 等. 超冷原子系综的非高斯纠缠态与精密测量[J]. 物理学报, 2019, 68(4): 58-67.
- [30] LIN Yuhao, YAN Kai, TAN Jia, et al. Witnessing quantum phase transition in a non-Hermitian trapped ion system via quantum Fisher information[J]. Chinese Optics, 2024, 17(6): 1467-1475.
蔺玉豪, 严凯, 谭佳, 等. 通过量子Fisher信息量标度非厄米离子阱系统中的量子相变[J]. 中国光学, 2024, 17(6): 1467-1475.
- [31] ANDRE A, LUKIN M D. Atom correlations and spin squeezing near the Heisenberg limit: Finite-size effect and decoherence[J]. Physical Review A, 2002, 65(5): 053819.
- [32] STOCKTON J K, GEREMIA J M, DOHERTY A C, et al. Characterizing the entanglement of symmetric many-particle spin-1/2 systems[J]. Physical Review A, 2003, 67(2): 022112.
- [33] COMBES J, WISEMAN H M. States for phase estimation in quantum interferometry[J]. Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics, 2004, 7(1): 14.
- [34] KAJTOCH D, WITKOWSKA E. Quantum dynamics generated by the two-axis counter-twisting Hamiltonian[J]. Physical Review A, 2015, 92(1): 013623.
- [35] MUÑOZ-ARIAS M H, DEUTSCH I H, POGGI P M. Phase-space geometry and optimal state preparation in quantum metrology with collective spins[J]. PRX Quantum, 2023, 4(2): 020314.
- [36] BRAUNSTEIN S L, CAVES C M. Statistical distance and the geometry of quantum states[J]. Physical Review Letters, 1994, 72(22): 3439.
- [37] BRAUNSTEIN S L, CAVES C M, MILBURN G J. Generalized uncertainty relations: Theory, examples, and Lorentz invariance[J]. Annals of Physics, 1996, 247(1): 135-173.
- [38] ZHANG J, PENG K, BRAUNSTEIN S L. Backaction-induced spin-squeezed states in a detuned quantum-nondemolition measurement[J]. Physical Review A, 2003, 68(3): 035802.
- [39] PEZZÉ L, SMERZI A. Entanglement, nonlinear dynamics, and the Heisenberg limit[J]. Physical review letters, 2009, 102(10): 100401.
- [40] JIN G R, LIU Y C, LIU W M. Spin squeezing in a generalized one-axis twisting model[J]. New Journal of Physics, 2009, 11(7): 073049.
- [41] ZHANG Y M, LI X W, YANG W, et al. Quantum Fisher information of entangled coherent states in the presence of photon loss[J]. Physical Review A, 2013, 88: 043832.
- [42] RADCLIFFE J M. Some properties of coherent spin states[J]. Journal of Physics A: General Physics, 1971, 4(3): 313.
- [43] ARECCHI F T, COURTENS E, GILMORE R, et al. Atomic coherent states in quantum optics[J]. Physical Review A, 1972, 6(6): 2211.
- [44] ZHANG W M, GILMORE R. Coherent states: Theory and some applications[J]. Reviews of Modern Physics, 1990, 62(4): 867.
- [45] HOLLAND M J, BURNETT K. Interferometric detection of optical phase shifts at the Heisenberg limit[J]. Physical Review Letters, 1993, 71(9): 1355-1358.
- [46] LÜCKE B, SCHERER M, KRUSE J, et al. Twin matter waves for interferometry beyond the classical limit[J]. Science, 2011, 334 (6057): 773-776.
- [47] JIN G R, YANG W, SUN C P. Quantum-enhanced microscopy with binary-outcome photon counting[J]. Physical Review A, 2017, 95: 013835.
- [48] PURI R R, AGARWAL G S. Exact density matrix for the degenerate-Raman-coupled model in the presence of collisions [J]. Physical Review A, 1992, 45(7): 5073.
- [49] CHEN T W, LEUNG P T. Effect of collision dephasing on atomic evolutions in a high-Q cavity[J]. Physical Review A, 2003, 67(5): 055802.

- [50] KHODORKOVSKY Y, KURIZKI G, VARDI A. Decoherence and entanglement in a bosonic Josephson junction: Bose-enhanced quantum Zeno control of phase diffusion[J]. *Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 2009, 80(2): 023609.
- [51] LIU Y C, JIN G R, YOU L. Quantum-limited metrology in the presence of collisional dephasing[J]. *Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 2010, 82(4): 045601.
- [52] JI C G, LIU Y C, JIN G R. Spin squeezing of one-axis twisting model in the presence of phase dephasing[J]. *Quantum Information & Computation*, 2013, 13: 266–280.
- [53] AGARWAL G S. Relation between atomic coherent-state representation, state multipoles, and generalized phase-space distributions[J]. *Physical Review A*, 1981, 24(6): 2889.
- [54] DOWLING J P, AGARWAL G S, SCHLEICH W P. Wigner distribution of a general angular-momentum state: Applications to a collection of two-level atoms[J]. *Physical Review A*, 1994, 49(5): 4101.
- [55] KLIMOV A B, ROMERO J L, DE GUISE H. Generalized SU (2) covariant Wigner functions and some of their applications[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2017, 50(32): 323001.
- [56] TILMA T, EVERITT M J, SAMSON J H, et al. Wigner functions for arbitrary quantum systems[J]. *Physical review letters*, 2016, 117(18): 180401.
- [57] KOCZOR B, ZEIER R, GLASER S J. Continuous phase-space representations for finite-dimensional quantum states and their tomography[J]. *Physical Review A*, 2020, 101(2): 022318.
- [58] BENEDICT M G, CZIRJÁK A. Wigner functions, squeezing properties, and slow decoherence of a mesoscopic superposition of two-level atoms[J]. *Physical Review A*, 1999, 60(5): 4034.
- [59] HUANG S, AGARWAL G S. Weak value amplification of atomic cat states[J]. *New Journal of Physics*, 2015, 17(9): 093032.
- [60] DAVIS J, KUMARI M, MANN R B, et al. Wigner negativity in spin-j systems[J]. *Physical Review Research*, 2021, 3(3): 033134.
- [61] KOCZOR B, ZEIER R, GLASER S J. Continuous phase-space representations for finite-dimensional quantum states and their tomography[J]. *Physical Review A*, 2020, 101(2): 022318.
- [62] ROSIEK C A, ROSSI M, SCHLIESSER A, et al. Quadrature squeezing enhances wigner negativity in a mechanical duffing oscillator[J]. *PRX Quantum*, 2024, 5(3): 030312.

Spin squeezing characteristic time and quantum metrological precision in the two-axis twisting model

YANG Yaya, Li Hang, JIN Guangri

(School of Science, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: The two-axis twisting model is used to describe the nonlinear interaction of N spin particles and serves as an important means for generating atomic spin-squeezed states. As one of the core research subjects in the field of quantum precision measurement, multi-particle spin-squeezed states offer the potential to enhance measurement accuracy. The physical mechanisms for generating spin squeezing primarily involve nonlinear atom-atom interactions and atom-light interactions. KITAGAWA M and UEDA M proposed two nonlinear interaction models: the one-axis twisting model and the two-axis twisting model. The latter is specifically employed to define vacuum-squeezed states in multi-atom systems and can, in principle, be realized on existing one-axis twisting experimental platforms through multi-pulse techniques. Examples of such platforms include ultracold alkali metal atomic systems and nitrogen-vacancy centers in diamond. Recently, multi-pulse techniques have further been utilized to implement the so-called three-axis twisting model, as well as generalized versions of the two-axis twisting model. This work systematically investigates the dynamical behavior of the two-axis twisting model and the evolution of its associated quantum Fisher information under noisy environments by combining analytical analysis with numerical simulations. The study begins by examining the symmetry between the Hamiltonian and the parity operator of the model. This symmetry determines the mean spin direction of the system, allowing us to unambiguously identify the directions of spin squeezing and anti-squeezing. Systematically analyze the characteristics of the three squeezing parameters and focus on the characteristic

times at which they reach their minimum values. For few-particle systems, we derive an explicit analytical form of the quantum state at the optimal squeezing time, which directly reveals the underlying quantum state structure and its squeezing characteristics. In systems with finite particle numbers, both numerical simulations and approximate analytical studies consistently indicate that the optimal spin-squeezed state emerges at a specific time following a characteristic scaling law $\ln(N)/N$ with respect to the particle number. Guided by this scaling law, we adopt an operator truncation approximation to obtain an explicit analytical expression linking the optimal squeezing time to the particle number. This result provides a crucial theoretical guideline for optimizing experimental parameters. Furthermore, we systematically analyze the impact of collective dephasing noise on the quantum Fisher information, aiming to assess the robustness of the metrological advantage offered by the prepared spin-squeezed states under realistic noisy conditions. For the two-axis twisting system, the mean spin of the collective ensemble is strictly aligned along the z -axis of the Bloch sphere, while the squeezing and anti-squeezing directions are oriented along the x -axis and y -axis, respectively. Each of the three squeezing parameters attains its minimum at a specific time, and the dominant factor influencing all three criteria is whether the spin state is Gaussian. The optimal squeezing time is given analytically by the coefficient $\varphi_{\min} = \chi t_{\min} \approx 0.527 \ln(N)/N$. Under the influence of noise, the squeezing parameter defined via the quantum Fisher information satisfies the relation $\xi_Q^2 = N/F_Q \approx \alpha(N)/N$. In summary, this study systematically investigates the dynamical characteristics of the two-axis twisting model and the application of quantum Fisher information in quantum metrology. The results indicate that the optimal squeezing time for two-axis twisting spin squeezing follows a scaling law of $\ln(N)/N$, and explicit analytical expressions for three squeezing coefficients are derived. Furthermore, by using the generated spin-squeezed state as a probe for interferometry, we show that under collective decoherence, the optimal squeezing coefficient defined via quantum Fisher information can reach $\xi_Q^2 = N/F_Q \approx \alpha(N)/N$, where the coefficient $\alpha(N)$ exhibits a weak dependence on the particle N . The corresponding phase measurement precision surpasses the standard quantum limit and approaches a Heisenberg-like scaling, demonstrating that the two-axis twisting model not only facilitates quantum metrology under ideal conditions but also retains practical utility in the presence of realistic noise.

Key words: Two-axis twisting model; Parity symmetry; Optimal squeezing; Truncation approximation; Quantum Fisher information; Heisenberg-like scaling

OCIS Codes: 120.5050; 270.6570; 270.5585

CSTR: 32255.14.gzxb20265507.0727002