

# 离散系统中厂商竞争的稳定条件

谢守波

(齐齐哈尔大学 理学院, 黑龙江 齐齐哈尔 161000)

**摘要:** 讨论了生产同质商品的寡头对市场价格有不同程度影响时的产量稳定性分析. 在离散时间模型中, 对一般的非线性价格函数, 得到不稳定的条件, 在线性情形下, 将看到全局稳定的充要条件是厂商数目不能超过 3.

**关键词:** 古诺调整过程; 局部渐进稳定; 全局渐进稳定

**中图分类号:** O158 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2010)04-0055-03

## Vendors' stable Condition in Discrete Systems

XIE Shou-bo

(College of Science, Qiqihar University, Qiqihar 161000, China)

**Abstract:** This paper focuses on the stability when the oligopolists have different power of affecting market price due to their market strategies even though their products are homogeneous. In discrete time model, conditions are unstable, I also examine the conditions under discrete time process, and it is interesting to see that to ensure global stability, when the inverse demand function is linear, the number of the firms in the industry should be no more than 3.

**Key words:** curnot regulating coures; local asympototic stability; global asympototic stability

### 1 概述

关于寡头竞争的稳定性已经有大量的研究, 早期的研究者包括 Hahn<sup>[1]</sup>, 他的讨论主要是针对古诺调整过程在非线反需求和成本函数下进行, 并且给出一个全局稳定的命题, 如图 1 所示. 随后, 在 1980 年 Seade<sup>[2]</sup> 给出了局部稳定的充分必要条件. 他们的结论简要的概括如下.

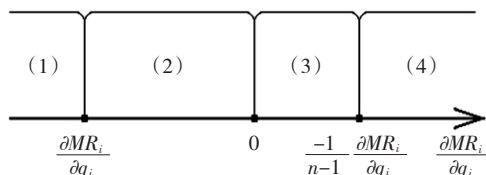


图 1 古诺调整过程示意图

如果存在某个  $i$  和  $j(j \neq i)$  满足  $\frac{\partial MR_i}{\partial q_j}$  落在区域

(1) 和 (4), 那么古诺调整过程的均衡是不稳定的, 其中,  $q_i$  和  $MR_i$  分别是厂商  $i$  的产量和边际收益. 如 Seade<sup>[2]</sup>, Al-Nowaihi 和 Levine<sup>[3]</sup> 指出, 如果对  $\forall i \neq j$ ,  $\frac{\partial MR_i}{\partial q_j}$  落在区域 (2) 和 (3), 均衡是局部渐进稳定的. Al-Nowaihi 和 Levine<sup>[3]</sup> 更进一步指出, 如果厂商数目不多于 6 个并且对  $\forall i \neq j$ ,  $\frac{\partial MR_i}{\partial q_j}$  落在区域 (2), 那么均衡是全局稳定的. 在本文中证明, 对  $\forall i \neq j$ , 当  $\frac{\partial MR_i}{\partial q_j}$  落在区域 (3), 这时均衡也是全局稳定的.

本文考虑当产品是同质, 不同寡头的产品在相同的价格下销售, 但是不同的寡头由于使用不同的

收稿日期: 2010-07-03

基金项目: 黑龙江省教育厅科学技术研究项目(11541097)

作者简介: 谢守波(1972—), 男, 讲师, E-mail: qqhr@163.com.

市场策略使得他们对市场价格有不同程度的影响,并分别考察了局部和全局稳定性,其中连续时间模型的结论是 Al-Nowaihi 和 Levines' 的拓展.

## 2 数学模型

考虑一个市场有任意但是固定数目的厂商  $n$  个,令  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  表示厂商的指标集合. 在同质商品模型中,凡需求函数为

$$P = f\left(\sum_{i=1}^n q_i\right)$$

式中:  $P$  和  $q_i$  分别表示市场价和第  $i$  个厂商的产出,并且总是假设  $f$  是严格递减的. 于是有对  $\forall i, j, \frac{\partial P}{\partial q_i} =$

$\frac{\partial P}{\partial q_j} = f'$ , 也就是说在其他厂商产量不变的情形下,各个厂商相同产量的微小变化对市场价格的影响是一样的,但是在实际中,很容易看到由于广告等经营策略的原因,两个厂商的产量变化导致的市场价格的变化是不同的. 由此,可以考虑如下形式的价格函数

$$P = f\left(\sum_{i=1}^n g_i(q_i)\right)$$

式中: 对每个  $i \in N, g_i: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$  是二次连续可微函数. 此外,假定  $g'_i > 0$  保证  $\frac{\partial P}{\partial q_i} < 0$ . 可以把  $g_i$  理解成一个和第  $i$  厂商产量有关的价格扩大因子.

令  $q_i(t) \geq 0$  为厂商  $i$  在  $t$  时刻的产出,  $C_i(q_i)$  是厂商  $i$  的总成本函数. 于是厂商  $i$  的收益为  $\pi_i =$

$q_i P\left(\sum_{i=1}^n g_i(q_i)\right) - C_i(q_i)$ . 最大化  $\pi_i$  有一阶条件

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = P + q_i P' g'_i - C'_i = 0.$$

令  $Q^i(t)$  为  $(q_1(t), \dots, q_{i-1}(t), q_{i+1}(t), \dots, q_n(t))^T$ . 假定当  $Q^i(t)$  给定时一阶条件有唯一解  $\tilde{q}_i$ .

在离散时间模型中,每一个竞争者并不知道其对手当期的产量,但是他们知道上一期他们对手的产量,并以上期的产量作为本期的估计选择当期的

产量,即满足一阶条件  $\frac{\partial \tilde{\pi}_i}{\partial q_i(t)} = 0$ .

还需要其他的假设得到的结论, A. Al-Nowaihi 和 P. L. Levine 称之为“核心假设”,即

(A1) 古诺均衡  $q^*$  存在并且存在于一个邻域并且满足  $q_i^* > 0 (i \in N = \{1, 2, \dots, n\})$ .

(A2)  $P$  和  $C_i (\forall i \in N)$  在  $q^*$  的某个邻域是二次连续可微的.

(A3)  $\frac{\partial^2 \pi_i}{\partial q_i^2} < 0$  在  $q_i^*$  点,  $\forall i \in N$ .

(A4)  $C'_i(q_i) > 0, \forall q_i > 0, \forall i \in N$ .

## 3 离散时间系统的稳定性条件

在稳定点  $q^* = (q_1^*, \dots, q_n^*)^T$  线性化  $F_i$ , 有

$$q_i(t) = q_i^* + \sum_{j \neq i} b_{ij} c_j (q_j(t-1) - q_j^*)$$

其中

$$b_i = - \frac{P'' q_i g'_i + P'}{P'' q_i g_i^2 + 2P' g'_i + q_i P' g''_i - C''_i} \Big|_{q^*},$$

$$c_i = g'_i \Big|_{q^*}, \text{ 对任意 } i \in N.$$

命题 1

1) 如果存在某个  $i, j \in N$ , 有

$$\left(\frac{1}{g'_j}\right)^2 \frac{\partial MR_i}{\partial q_j} \frac{\partial MR_j}{\partial q_j} = \left(\frac{1}{g'_i}\right)^2 \frac{\partial MR_j}{\partial q_i} \frac{\partial MR_i}{\partial q_i}$$

且  $\left|\frac{1}{g'_j} \frac{\partial MR_i}{\partial q_j}\right| > \left|\frac{1}{g'_i} \frac{\partial MR_i}{\partial q_i}\right|$ ,

那么  $q^*$  是不稳定的.

2)  $M$  是 1) 中的条件的对立条件的集合

①如果  $\frac{\partial MR_i}{\partial q_j} > 0$  对任意  $i, j \in M$  且  $\min_{i, j \in N} \frac{\frac{1}{g'_j} \frac{\partial MR_i}{\partial q_j}}{\frac{1}{g'_i} \frac{\partial MR_i}{\partial q_i}} <$

$-1$ , 那么  $q^*$  是不稳定的.

②如果  $\frac{\partial MR_i}{\partial q_j} < 0$  对任意  $i, j \in M$  且  $\max_{i, j \in N} \frac{\frac{1}{g'_j} \frac{\partial MR_i}{\partial q_j}}{\frac{1}{g'_i} \frac{\partial MR_i}{\partial q_i}} >$

$1$ , 那么  $q^*$  是不稳定的.

证明: 定义  $Q(t)$  为

$$(q_1(t) - q_1^*, \dots, q_n(t) - q_n^*)^T,$$

$$\text{且 } T = \begin{pmatrix} 0 & b_1 c_2 & \cdots & b_1 c_n \\ b_2 c_1 & 0 & \cdots & b_2 c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n c_1 & b_n c_2 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

系统  $q_i(t) = q_i^* + \sum_{j \neq i} b_{ij} c_j (q_j(t-1) - q_j^*)$ ,

$\forall i \in N$  等价于:  $Q(t) = TQ(t-1)$ .  $|\lambda I - T| = 0$

$\Leftrightarrow \prod_{i=1}^n (\lambda + b_i c_i) \left[ \sum_{i=1}^n \frac{-b_i c_i}{\lambda + b_i c_i} + 1 \right] = 0$  如果存  $i, j \in$

$N$  使得  $b_i c_i = b_j c_j$ , 那么  $-b_i c_i$  是矩阵  $T$  的特征值. 如果此时  $|b_i c_i| > 1$ , 那么系统是不稳定的. 于是命题

1 中 1) 成立.

如果任意  $i, j \in N, b_i c_i \neq b_j c_j$ , 则任意的  $-b_i c_i$  均不是矩阵  $T$  的特征值. 于是,  $|\lambda I - T| = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{b_i c_i}{\lambda + b_i c_i} = 1$ . 类似于命题 1, 有  $\max_{i \in N} b_i c_i > 1$ , 于是至少存在一个特征根大于 1. 于是命题 1 中 2) 中 ① 成立, 类似可证, ② 也成立.

特殊地, 考察当价格函数  $f$  和各个厂商的成本函数是线性的情形, 即,  $P = b - a(\sum_{i=1}^n w_i q_i)$  且  $C_i(q_i) = c_i q_i$ , 其中  $c_i$  是正常数. 进一步, 可以只讨论形如  $P = b - \sum_{i=1}^n w_i q_i$  的价格函数.

命题 2 在具有线性的价格和成本函数的离散时间模型中, 如果厂商数目大于 3, 那么古诺 - 纳什均衡是不稳定的, 如果厂商数目小于 3, 那么均衡是全局稳定的.

证明: 如果价格函数和各个厂商的总成本函数分别形如  $P = b - \sum_{i=1}^n w_i q_i$  和  $C_i(q_i) = c_i q_i$ . 则厂商  $i$  的收益函数为  $\pi_i = (b - \sum_{j \neq i}^n w_j q_j(t-1) - w_i q_i(t)) q_i(t) - c_i q_i(t)$ . 最大化  $\pi_i$  有厂商  $i$  在  $t$  时刻的最优解, 即  $q_i(t) = -\sum_{j \neq i}^n \frac{w_j}{2w_i} q_j(t-1) + \frac{b - c_i}{2w_i}, \forall i \in N$ . 或者可以简写为

$$Q(t) = A Q(t-1) + B,$$

式中  $Q(t)$  为  $(q_1(t), \dots, q_n(t))^T$ ,

$$A = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{w_2}{w_1} & \dots & \frac{w_n}{w_1} \\ \frac{w_1}{w_2} & 0 & \dots & \frac{w_n}{w_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_1}{w_n} & \frac{w_2}{w_n} & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$B = (\frac{b - c_1}{2w_1}, \dots, \frac{b - c_n}{2w_n})^T$ . 为讨论均衡的稳定性, 要考察矩阵  $A$  的特征值. 设  $\lambda$  是矩阵  $A$  的特征值, 其对应的特征向量为  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ . 因为  $Ax = \lambda x$ , 于是有  $-\frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \frac{w_j}{w_i} x_j = \lambda x_i$ , 即

$$\sum_j w_j x_j = (1 - 2\lambda) w_i x_i. \text{ 两边对 } w_i x_i \text{ 加和, 有}$$

$n \sum_j w_j x_j = (1 - 2\lambda) \sum_i w_i x_i$ , 于是有  $\lambda = \frac{1-n}{2}$  或者  $\sum_i w_i x_i = 0$ . 将  $\sum_i w_i x_i = 0$  代入  $\sum_j w_j x_j = (1 - 2\lambda) \sum_i w_i x_i$  有  $(1 - 2\lambda) \sum_i w_i x_i = 0$ . 因为对任意的  $i \in N, w_i > 0$ , 所以,  $(1 - 2\lambda) \sum_i w_i x_i = 0$  有对任意的  $i \in N, (1 - 2\lambda) x_i = 0$ . 如果  $\lambda \neq \frac{1}{2}$ , 那么对任意的  $i \in N, x_i = 0$ . 但这和特征向量非零矛盾. 于是矩阵  $A$  的特征值为  $\frac{1}{2}$  或者  $\frac{1-n}{2}$ . 事实上,  $\lambda_1 = \frac{1}{2}$  对应的线性无关的特征向量有  $n-1$  个,  $\lambda_2 = \frac{1-n}{2}$  对应的线性无关的特征向量有 1 个. 于是矩阵  $A$  的全部特征值就是  $\frac{1}{2}$  和  $\frac{1-n}{2}$ .

于是  $Q(t) = A Q(t-1) + B$  的不动点稳定当且仅当  $|\frac{1-n}{2}| < 1$ , 即  $n < 3$ .

## 4 结 语

在离散时间模型中, 给出了不稳定的充分条件 (或者稳定的必要条件), 可以看到, 具有线性的价格和成本函数的离散时间模型中, 稳定性只和厂商数目有关而和厂商对市场价格的影响无关, 当厂商数目较少的时候 (小于 3 个), 那么古诺 - 纳什均衡是全局稳定的, 当厂商数目较多 (大于 3 个), 那么没有一个稳定的古诺 - 纳什均衡.

## 参 考 文 献:

- [1] AL-NOWAIHI A, LEVINE P L, The Stability of the Cournot Oligopoly Model: A Reassessment [J]. Journal of Economic Theory 1985, 35: 307 - 321.
- [2] SEADE Jesus. The Stability of Cournot Revisited [J]. Journal of Economic Theory 1980, 23: 15 - 27.
- [3] HOSOMATSU Y. A Note on the Stability Condition in Cournot's Dynamic Market Solution When Neither the Actual Market Demand Function nor the Production Levels of Rivals are Known [J]. Review of Economic Studies 1969, 36: 117 - 122.
- [4] 张建平, 刘 凯, 郭晓丽. 离散时间系统的 ISS 稳定性及等价条件 [J]. 郑州轻工业学院学报: 自然科学版, 2008, 2: 14 - 16.
- [5] 孙 凯, 谢广明. 一类不确定线性周期离散时间系统的分析与控制 [J]. 应用数学和力学, 2009, 4: 35 - 37.
- [6] 于素娟, 汪志鸣. 非线性时变离散系统的稳定性判据 [J]. 华东师范大学学报: 自然科学版, 2007, 1: 24 - 26.

(编辑: 温泽宇)