

四阶半正的非线性两端固结梁方程的多个正解

高志英, 李 艳, 苑成军

(哈尔滨学院 理学学院数学系, 黑龙江 哈尔滨 150086)

摘 要: 研究了一四阶半正梁方程边值问题正解的存在性. 首先利用 Leray-Schauder 型非线性抉择定理获得了该半正梁的方程的第一个正解的存在性的充分条件, 然后利用 Krasnosel'skii 不动点定理获得了该半正梁的方程的第二个正解的存在性的充分条件, 最后该半正梁的方程多个正解的存在性的充分条件被建立. 并举例说明主要结论.

关键词: 边值问题; 半正的梁的方程; 正解; 不动点定理

中图分类号: O175.08 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2012)04-0110-04

Multiple Positive Solutions of a Fourth-order Nonlinear Semipositone Beam Equation Fixed at Both Ends

GAO Zhi-ying, LI Yang, YUAN Cheng-jun

(Department of Mathematics, School of Science, Harbin University, Harbin 150086, China)

Abstract: The paper investigates the existence of positive solutions for boundary value problem of a fourth-order nonlinear semipositone beam equation. First, using nonlinear alternative of Leray-Schauder type, sufficient condition for the first positive solutions of the beam equation is established; next, by Krasnosel'skii's fixed point theorem, sufficient condition for the second positive solutions of the beam equation is established; the last, sufficient condition for multiple positive solutions of the semipositone beam equation are established. An example is given to illustrate the main results.

Key words: boundary value problem; semipositone beam equation; positive solution; singular; fixed point theorem

0 引 言

文中将研究下面四阶非线性边值问题,

$$\left. \begin{aligned} u''''(t) &= \lambda f(t, u) & 0 < t < 1 \\ u(0) &= u'(0) = 0 \\ u(1) &= u'(1) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中 $\lambda > 0$ 是一个参数, f 是一个符号可以改变的连

续函数. 我们的目标是对这个梁的方程建立多个正解.

众所周知, 在描述一大类的弹性变形现象上四阶两点边值问题起来至关重要的作用, 例如, 方程 (1) 就刻画了以弹性梁在一定外力下的扭曲或弯曲形态. 因为这个原因, 有大量的研究四阶两点边值问题解的存在性和唯一性的文献存在. 见文 [1-15] 以及其相关的引文. 特别在文 [3-4, 6-7] 内, 这

收稿日期: 2011-08-20

基金项目: 黑龙江省普通高等学校青年学术骨干项目(1252G035); 黑龙江自然科学基金(A201012).

作者简介: 高志英(1961—), 女, 副教授, E-mail: gaozhiying345@126.com;

李 艳(1964—), 女, 副教授;

苑成军(1971—), 男, 教授.

些研究者在某些条件下研究了模型(1).

在文[5]中, Ma 和 Tisdell 研究了方程(1)的特殊情形, 即假定 $f(t, u) = p(t)u^\lambda$ 且 $\lambda \in (0, 1)$; 文[6]中, 在假定 $f(t, u) \geq 0$ 的条件下, 作者利用混合单调算子不动点定理, 研究了方程(1)正解的存在唯一性. 本文通过 Krasnosel'skii's 不动点定理和 Leray-Schauder 型抉择定理, 将给出方程(1)存在正解的3个充分条件. 最后给出了一些例子.

1 预备知识

用 $G: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ 表示边值问题(1)对应的 Green's 函数. 因此 $G(t, s)$ 能被表示为

$$G(t, s) = \frac{1}{6} \begin{cases} t^2(1-s)^2(3s-t-2ts), & 0 \leq t \leq s \leq 1 \\ s^2(1-t)^2(3t-s-2ts), & 0 \leq s \leq t \leq 1 \end{cases}$$

引理1^[6] $\frac{1}{3}e(t)e(s) \leq G(t, s) \leq e(t)$ 和 $G(t, s) \leq e(s)$. 其中 $e(t) = t^2(1-t)^2$

定理1^[6] 令 X 是一 Banach 空间, $\Omega \subset X$ 是一闭凸集. 设 U 是 Ω 的一相对开集, 且 $0 \in U$, 再设 $S: \bar{U} \rightarrow \Omega$ 是一个紧连续映射. 则

1) S 在 $\bar{U}$ 有一个不动点, 或

2) 存在一个 $u \in \partial U$ 和 $v \in (0, 1)$, 使得 $\dot{u} = vSu$ 中必有一个成立, 且仅有一个成立.

定理2^[6] 令 X —Banach 空间, $P \subset X$ 是 X 的一个锥. 设 Ω_1, Ω_2 是 X 的开集, 且 $0 \in \Omega_1 \subset \bar{\Omega}_1 \subset \Omega_2$, 若一个全连续算子 $S: P \rightarrow P$, 使得

1) $\|Sw\| \leq \|w\|$, $w \in P \cap \partial\Omega_1$, $\|Sw\| \geq \|w\|$, $w \in P \cap \partial\Omega_2$, 或

2) $\|Sw\| \geq \|w\|$, $w \in P \cap \partial\Omega_1$, $\|Sw\| \leq \|w\|$, $w \in P \cap \partial\Omega_2$

成立. 则在 $P \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1)$ 内必有一个不动点.

2 主要结论

讨论微分方程微分方程(1). 本文中作如下假定

(H₁) $f(t, u) \in C([0, 1] \times [0, +\infty), (-\infty, +\infty))$, 且存在函数 $g(t) \in L^1([0, 1], (0, +\infty))$, 对任意的 $t \in (0, 1)$ 和 $u \in [0, +\infty)$, 使得 $f(t, u) \geq -g(t)$ 成立.

(H₁^{*}) $f(t, u) \in C((0, 1) \times [0, +\infty), (-\infty, +\infty))$ 在 $t=0, 1$ 处可以奇异, 且存在函数 $g(t) \in$

$L^1((0, 1), (0, +\infty))$, 对任意的 $t \in (0, 1)$ 和 $u \in [0, +\infty)$, 使得 $f(t, u) \geq -g(t)$ 成立.

(H₂) $f(t, 0) > 0, t \in [0, 1]$.

(H₃) 存在区间 $[b_1, b_2] \subset (0, 1)$ 使得

$$\lim_{u \uparrow +\infty} \min_{t \in [b_1, b_2]} \frac{f(t, u)}{u} = +\infty$$

(H₄) $\int_0^1 q(s)f(s, z) ds < +\infty$ 对 $z \in [0, m]$ 成立, $m > 0$ 是任意一实数.

事实上, 仅需要考虑边值问题

$$\left. \begin{aligned} x^{(4)}(t) + \lambda [f(t, [x(t) - v(t)]^*) + g(t)] &= 0, \\ 0 < t < 1 \\ x(0) = x'(0) = x(1) = x'(1) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中

$$y(t)^* = \begin{cases} y(t), & y(t) \geq 0 \\ 0, & y(t) < 0 \end{cases}$$

$v(t) = \lambda \int_0^1 G(t, s)g(s) ds$, 且是边值问题

$$-v^{(4)}(t) = \lambda g(t), \quad 0 < t < 1,$$

$$v(0) = v'(0) = v(1) = v'(1) = 0$$

的解.

证明边值问题(2)存在正解 x , 并且 $x(t) \geq v(t)$, $t \in [0, 1]$, 如果这个是真的, 则 $u(t) = x(t) - v(t)$ 是边值问题(2)的非负解(在 $(0, 1)$ 上是正的). 对任意的 $t \in (0, 1)$ 有 $-u^{(4)} - v^{(4)} = \lambda [f(t, u) + g(t)]$, 则 $-u^{(4)} = \lambda f(t, u)$. 因此将集中研究边值问题(2).

$x(t)$ 是边值问题(2)的解的充要条件是

$$x(t) = \lambda \int_0^1 G(t, s) (f(t, [x(t) - v(t)]^*) + g(t)) ds, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (3)$$

考虑 Banach 空间 $E = C[0, 1]$, 其上范数为标准的范数 $\|x\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|$, $x \in E$. 定义一个锥 P :

$$P = \left\{ x \in E \mid x(t) \geq \frac{1}{3}e(t)\|x\|, \quad t \in [0, 1] \right\}$$

再定义一个算子 $T: P \rightarrow X$ 如下

$$Tx(t) = \lambda \int_0^1 G(t, s) (f(t, [x(t) - v(t)]^*) + g(t)) ds, \quad 0 \leq t \leq 1, x \in P. \quad (4)$$

根据引理1, 对任意的 $t \in [0, 1]$ 和 $x \in P$. 有 $Tx(t) \geq 0$ 和

$$Tx(t) = \lambda \int_0^1 G(t, s) (f(t, [x(t) - v(t)]^*) + g(t)) ds \leq$$

$$\lambda \int_0^1 e(s) (f(t, [k(t) - v(t)]^*) + g(t)) ds$$

故有

$$\|Tx\| \leq \int_0^1 e(s) (f(t, [k(t) - v(t)]^*) + g(t)) ds.$$

另一方面,又有

$$Tx(t) \geq \frac{1}{3} e(t) \lambda \int_0^1 e(s) (f(t, [k(t) - v(t)]^*) + g(t)) ds \geq \frac{1}{3} e(t) \|Tx\|$$

因此, $T(P) \subset P$. 进一步的,通过标准的证明,可以得到 T 是紧的全连续算子.

定理3 如果条件 $(H_1) - (H_2)$ 成立. 则存在常数 $\bar{\lambda} > 0$ 使得,对任意 $0 < \lambda < \bar{\lambda}$. 的边值问题(1)至少有一个正解.

证明: 固定 $\delta \in (0, 1)$. 由 (H_2) , 存在 $0 < \varepsilon < 1$ 使得

$$f(t, z) \geq \delta f(t, 0), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad 0 \leq z \leq \varepsilon \quad (5)$$

成立. 令 $0 < \lambda < \frac{\varepsilon}{2c\bar{f}(\varepsilon)} =: \bar{\lambda}$, 其中 $\bar{f}(\varepsilon) =$

$$\max_{0 \leq t \leq 1, 0 \leq z \leq \varepsilon} \{f(t, z) + g(t)\}, c = \int_0^1 e(s) ds. \text{ 因为}$$

$\lim_{z \downarrow 0} \frac{\bar{f}(z)}{z} = +\infty$ 和 $\frac{\bar{f}(\varepsilon)}{\varepsilon} < \frac{1}{2c\lambda}$, 则,存在一个 $R_0 \in (0, \varepsilon)$ 使得

$$\frac{\bar{f}(R_0)}{R_0} < \frac{1}{2c\lambda}$$

令 $x \in P$ 和 $v \in (0, 1)$ 使得 $x = vT(x)$, $\|x\| \neq R_0$ 如不然,则有

$$\begin{aligned} \|Tx(t)\| &\leq \lambda \int_0^1 e(s) [f(s, [k(s) - v(s)]^*) + g(s)] ds \leq \\ &\lambda \int_0^1 e(s) \max_{0 \leq s \leq 1; 0 \leq z \leq R_0} [f(s, z) + g(s)] ds \leq \\ &\lambda \int_0^1 e(s) \bar{f}(R_0) ds \leq \lambda c \bar{f}(R_0) \end{aligned}$$

即

$$\frac{\bar{f}(R_0)}{R_0} \geq \frac{1}{c\lambda} > \frac{1}{2c\lambda} = \frac{\bar{f}(R_0)}{R_0}$$

这说明 $\|x\| \neq R_0$. 令 $U = \{x \in P : \|x\| < R_0\}$. 根据 Leray-Schauder 型非线性抉择定理, T 有一个不动点 $x \in \bar{U}$. 根据式(4)、(5)和 $R_0 < \varepsilon$ 有

$$\begin{aligned} x(t) &\geq \lambda \int_0^1 G(t, s) [f(s, 0) + g(s)] ds \geq \\ &\lambda \left[\delta \int_0^1 G(t, s) f(s, 0) ds + \right. \end{aligned}$$

$$\left. \int_0^1 G(t, s) g(s) ds \right] >$$

$$\lambda \int_0^1 G(t, s) g(s) ds = u(t) \quad t \in (0, 1)$$

令 $u(t) = x(t) - v(t) > 0$, 则(1)有解 u 且 $\|u\| \leq \|x\| \leq R_0 < 1$.

定理4 如果条件 (H_1^*) 和 $(H_3) - (H_4)$ 成立. 则存在常数 $\lambda^* > 0$, 使得对任意的 $0 < \lambda \leq \lambda^*$ 边值问题(1)至少有一个正解.

证明 令 $\Omega_1 = \{x \in C[0, 1] : \|x\| < R_1\}$. 其中

$$R_1 = \max\{1, r\} \text{ 和 } r = 3 \int_0^1 g(s) ds \text{ 选择}$$

$$\lambda^* = \min\left\{1, R_1 \left[\int_0^1 e(s) \left[\max_{0 \leq z \leq R_1} f(s, z) + g(s) \right] ds \right]^{-1}\right\}.$$

则对任意的 $x \in P \cap \partial\Omega_1$, 从 $\|x\| = R_1$ 和 $x(s) - v(s) \leq x(s) \leq \|x\|$, 有

$$\begin{aligned} \|Tx(t)\| &\leq \lambda \int_0^1 e(s) [f(s, [k(s) - v(s)]^*) + g(s)] ds \leq \\ &\lambda \int_0^1 e(s) \left[\max_{0 \leq z \leq R_1} f(s, z) + g(s) \right] ds \leq \\ &R_1 = \|x\| \end{aligned}$$

这说明 $\|Tx\| \leq \|x\|$, $x \in P \cap \partial\Omega_1$.

另一方面,选择常数 $N > 0$ 使得 $\frac{\lambda N}{9} \min_{\theta_1 \leq t \leq \theta_2} e(t) \times$

$\int_{\theta_1}^{\theta_2} e^2(s) ds \geq 1$. 根据假设 (H_3) , 对任意的 $t \in [\theta_1, \theta_2]$, 存在常数 $B > 0$ 使得

$$\frac{f(t, z)}{z} > N \text{ 即 } f(t, z) > Nz, z > B$$

成立. 选择 $R_2 = \max\left\{R_1 + 1, 2\lambda r, \frac{6(B+1)}{\min_{\theta_1 \leq t \leq \theta_2} e(t)}\right\}$, 且令

$\Omega_2 = \{x \in C[0, 1] : \|x\| < R_2\}$, 则对任意的 $x \in P \cap \partial\Omega_2$, 有

$$x(t) - v(t) \geq x(t) - \frac{1}{3} e(t) \lambda \int_0^1 3g(s) ds \geq$$

$$x(t) - \frac{x(t)}{\|x\|} \lambda r \geq$$

$$x(t) - \frac{x(t)}{R_2} \lambda r \geq$$

$$\left(1 - \frac{\lambda r}{R_2}\right) x(t) \geq \frac{1}{2} x(t) \geq 0, t \in [0, 1]$$

并且 $\min_{\theta_1 \leq t \leq \theta_2} \{x(t) - v(t)\} \geq \min_{\theta_1 \leq t \leq \theta_2} \left\{\frac{1}{2} x(t)\right\} \geq \min_{\theta_1 \leq t \leq \theta_2}$

$$\left\{\frac{e(t)}{6} \|x\|\right\} = \frac{R_2 \min_{\theta_1 \leq t \leq \theta_2} e(t)}{6} \geq B + 1 > B.$$

$$\begin{aligned}
\|Tx(t)\| &\geq \max_{0 \leq t \leq 1} \lambda \int_0^1 \frac{1}{3} e(t) e(s) [f(s, [v(s)]^*) - \\
&\quad v(s)]^* + g(s)] ds \geq \\
&\quad \max_{0 \leq t \leq 1} \lambda \frac{1}{3} e(t) \int_0^1 e(s) f(s, [v(s)]^* - \\
&\quad v(s)]^* ds \geq \\
&\quad \frac{\lambda}{3} \min_{\theta_1 \leq t \leq \theta_2} e(t) \int_{\theta_1}^{\theta_2} e(s) f(s, x(s) - \\
&\quad v(s)]^* ds \geq \\
&\quad \frac{\lambda}{3} \min_{\theta_1 \leq t \leq \theta_2} e(t) \int_{\theta_1}^{\theta_2} e(s) \frac{N}{2} x(s) ds \geq \\
&\quad \frac{\lambda N}{9} \min_{\theta_1 \leq t \leq \theta_2} e(t) \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^2(s) \|x\| ds \geq \\
&\quad \frac{\lambda N}{9} \min_{\theta_1 \leq t \leq \theta_2} e(t) \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^2(s) ds \|x\| \geq \\
&\quad \|x\|
\end{aligned}$$

$$\|Tx\| \geq \|x\|, x \in P \cap \partial \Omega_2$$

因此, Krasnoselskii 不动点定理的条件被满足, 于是 T 有不动点 x , 且 $r < \|x\| < R_2$ 使得

$$\begin{aligned}
-x'''(t) &= \lambda(f(s, [v(s)]^* - v(s)]^* + g(s)), 0 < t < 1, \\
x(0) &= x'(0) = x(1) = x'(1) = 0.
\end{aligned}$$

因为 $r < \|x\|$,

$$\begin{aligned}
x(t) - v(t) &\geq \frac{e(t)}{3} \|x\| - \lambda \int_0^1 G(t,s) g(s) ds \geq \\
&\quad \frac{e(t)}{3} \|x\| - \frac{e(t)}{3} \lambda \int_0^1 3g(s) ds \geq \\
&\quad \frac{e(t)}{3} r - \frac{e(t)}{3} \lambda r \geq \\
&\quad (1 - \lambda) \frac{e(t)}{3} r \geq 0, \quad t \in (0,1)
\end{aligned}$$

令 $u(t) = x(t) - v(t)$, 则 $u(t)$ 是边值问题(1)的一个正解.

因为条件 (H_1) 蕴含了条件 (H_1^*) 和 (H_4) , 再根据定理 3、4 的证明过程, 下面的定理:

定理 5 如果条件 $(H_1) - (H_3)$ 成立, 则当 $\lambda > 0$ 充分的小的时候, 边值问题(1)至少有两个解.

事实上, 令 $0 < \lambda < \min\{\bar{\lambda}, \lambda^*\}$, 则边值问题(1)至少有两个正解 u_1 和 u_2 .

3 应用

考虑下面边值问题

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) = \lambda(u^a(t) + \cos(2\pi u(t))), 0 < t < 1, \lambda > 0, \\ u(0) = u'(0) = 0, \\ u(1) = u'(1) = 0, \end{cases}$$

其中 $a > 1$. 如果 $\lambda > 0$ 充分的小, 方程(9)有两个正

解 u_i 且 $u_i(t) > 0, t \in (0,1), i = 1, 2$.

$$\text{令 } f(t, u) = u^a(t) + \cos(2\pi u(t)), g(t) = 2,$$

显然

$$f(t, 0) = 1 > 0, f(t, u) + g(t) \geq u^a(t) + 1 > 0,$$

$$\lim_{u \uparrow + \infty} \frac{f(t, u)}{u} = +\infty, t \in (0,1)$$

即条件 $(H_1) - (H_3)$ 满足. 令 $\delta = \frac{1}{2}, \varepsilon = \frac{1}{8}$ 和 $c =$

$$\int_0^1 e(s) ds, \text{ 有 } \frac{1}{16c\left(\left(\frac{1}{8}\right)^a + 3\right)} : = \bar{\lambda}, \text{ 因为}$$

$$\frac{\varepsilon}{2c\left(\max_{0 \leq t \leq \varepsilon} f(t, x) + 2\right)} \geq \frac{1}{16c\left(\left(\frac{1}{8}\right)^a + 3\right)}. \text{ 如果 } 0 < \lambda <$$

$\bar{\lambda}$, 则 $0 < \lambda < \frac{\varepsilon}{2c\left(\max_{0 \leq t \leq \varepsilon} f(t, x) + 2\right)}$, 根据定理 3, 方程

(9) 有正解 u_1 且 $\|u_1\| \leq \frac{1}{8}$.

接下来, 令 $R_1 = 2$, 有

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e(s) [\max_{0 \leq z \leq R_1} f(s, z) + g(s)] ds &\leq \\
\int_0^1 e(s) [2^a + 2] ds &= (2^a + 2)c
\end{aligned}$$

和 $\lambda^* = \min\left\{1, \frac{1}{(2^{a-1} + 1)c}\right\}$. 如果 $0 < \lambda < \lambda^*$, 则

$0 < \lambda < 2\left(\int_0^1 e(s) [\max_{0 \leq z \leq R_1} f(s, z) + g(s)] ds\right)^{-1}$, 根据定理 4, 方程(9)有正解 u_2 且 $\|u_2\| \geq 1$.

所以, 如果 $\lambda < \min\{\bar{\lambda}, \lambda^*\}$, 根据定理 5, 方程(9)有两个正解 u_i 且 $u_i(t) > 0, t \in (0,1), i = 1, 2$.

参考文献:

- [1] LIU X, LI W. Existence and Multiplicity of Solutions for Fourth-order Boundary Value Problems with Parameters [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007, 327: 362-375.
- [2] GUPTA C P. Existence and Uniqueness Theorems for the Bending of an Elastic Beam Equation [J]. Applicable Analysis, 1988, 26 (4): 289-304.
- [3] GABRIELE Bonanno, BEATRICE Di Bella, A Boundary Value Problem for Fourth-order Elastic Beam Equations [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2008, 343: 1166-1176.
- [4] KOSMATO N. Countably Many Solution of a Fourth Order Boundary Value Problem [J]. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2004(12): 1-15.
- [5] MA Ruyun, TISDELL C C. Positive Solution of Singular Sublinear Fourth-order Boundary Value Problem [J]. Applicable Analysis, 2005, 84(12): 1199-1220.

(下转第 118 页)

也几乎不会出现; 极限环的出现说明此时物质文明和精神文明呈周期变化; 而同宿轨的出现意味着社会动荡区域的面积几乎为零, 社会的崩溃区域增加. 所以我们可以通过对模型的奇异性的分析找出参数之间相互影响的规律, 进一步预测各个国家的综合国力的发展情况.

参 考 文 献:

- [1] 黄硕风. 综合国力与国情研究 [J]. 中国国情国力, 1992(1): 13-19.
- [2] 王树禾. 综合国力的数学建模 [J]. 高校应用数学学报, 1997, 12(1): 29-36.
- [3] 邢秀梅. 具时滞综合国力模型的 Hopf 分支分析 [J]. 伊犁师范学院学报, 2007(3): 1-4.
- [4] 廖晓昕. 综合国力非线性扩散模型稳定性分析 [J]. 南京信息工程大学学报: 自然科学版, 2009, 1(3): 247-251.
- [5] 李冬梅, 李晔, 孙嘉轶. 具有 Michaelis-menten 功能性反应的时滞扩散竞争系统稳定性分析 [J]. 哈尔滨理工大学学报, 2010, 15(2): 102-105.
- [6] 李冬梅, 尹晓, 邵琛. 污染环境中 Smith 模型的稳定性 [J]. 哈尔滨理工大学学报, 2011, 16(3): 98-103.
- [7] FARIA T, MAGALHES LT. Normal Forms for Retarded Functional Differential Equations and Applications to Bogdanov-Takens Singularity [J]. Journal of Differential Equations, 1995, 122(2): 201-224.
- [8] 张伟江, 杨升荣. 非线性动力系统的动态分析 [M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1996: 1-18.
- [9] 张芷芬. 向量场的分岔理论基础 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1997: 129-152.
- [10] JIANG W, YUAN Y. Bogdanov-Takens Singularity in Van der Pol's Oscillator with Delayed Feedback [J]. Physical D, 2007, 227(2): 149-161.

(编辑: 王 萍)

(上接第 113 页)

- [6] YANG Donghui. Existence and Uniqueness of Positive Solutions to a Fourth-order Nonlinear Singular the Beam Equation [J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2009, 26(5): 890-894.
- [7] YAO Qingliu. Positive Solution for Eigenvalue Problems of Fourth-order Elastic Beam Equations [J]. Applied Mathematics Letters, 2004, 17: 237-243.
- [8] ZHANG Xinguang, LIU Lishan. Positive Solutions of Fourth-order Multi-point Boundary Value Problems with Bending Term [J]. Applied Mathematics And Computation, 2007, 194(2): 321-332.
- [9] BAI Zhanbing, HUANG Bingjia, GE Weigao. The Iterative Solutions for Some Fourth-order p-Laplace Equation Boundary Value Problems [J]. Applied Mathematics Letters, 2006, 19(1): 8-14.
- [10] YAO Qingliu. Existence and Multiplicity of Positive Solutions to a Singular Elastic Beam Equation Rigidly Fixed at Both Ends [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2008, 69(8): 2683-2694.
- [11] YANG Bo. Estimates of Positive Solutions to a Boundary Value Problem for the Beam Equation [J]. Communication in Mathematical Analysis, 2007, 2(1): 13-21.
- [12] LIN Xiao Ning, LI Xiao Yue, JIANG Daqing. Existence and Uniqueness of Solutions for Singular Fourth-order Boundary Value Problems [J]. Journal of Computational And Applied Mathematics, 2006, 196: 155-161.
- [13] AGARWA R P, MEEHAN M, OREGAN D. Fixed Point Theory and Applications [M]. Cambridge University Press, 2001: 20-32.
- [14] 盖功琪. 一类奇异二阶离散边值问题正解的存在唯一性 [J]. 哈尔滨理工大学学报, 2008(5): 115-117.
- [15] 徐润章; 刘亚成. 具异号非线性源项波动方程的初边值问题 [J]. 哈尔滨工程大学学报, 2007(4): 484-486.
- [16] GUO D, LAKSHMIKANTHAM V. Nonlinear Problems in Abstract Cones [M]. Academic Press, San Diego, 1988: 121-125.

(编辑: 王 萍)