

综合国力模型的 Bogdanov-Takens 奇异性

王晶囡¹, 郭爽²

(1. 哈尔滨理工大学 应用科学学院, 黑龙江 哈尔滨 150080; 2. 大庆师范学院 数学系, 黑龙江 大庆 163712)

摘要: 以系数为参数,研究了综合国力模型的稳定性及奇异性问题. 利用中心流形定理结合李雅普诺夫函数证明了该模型平衡点的不稳定性. 进一步发现了该平衡点具有 Bogdanov-Takens 奇异性. 通过含参数的可逆线性变换,得到了该模型带有普适开折的规范型,并指出了该模型在 Bogdanov-Takens 奇点附近的拓扑结构. 讨论了对应这些拓扑结构的一些综合国力的相应发展情况. 最后应用数值模拟验证了结论.

关键词: 综合国力模型; Bogdanov-Takens 奇异性; 规范型; 稳定性

中图分类号: O175.12; O193 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2012)04-0114-05

Bogdanov-Takens Singularity in Comprehensive National Power Model

WANG Jing-nan¹, GUO Shuang²

(1. School of Applied Science, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China;

2. Department of Mathematics, Daqing Normal College, Daqing 163712, China)

Abstract: In this paper, using coefficients as parameters, the stability and singularity of the comprehensive national power model are studied. By center manifold theory and Lyapunov function, the instability of the equilibrium point of the model is proved. It is found that the equilibrium point is Bogdanov-Takens singularity. Applying reversible linear transformations, the normal forms with universal unfolding parameters of the comprehensive national power model is obtained. Furthermore, the topology structures of the model near Bogdanov-Takens singularity are given. The associated development situations of the comprehensive national power for some topological structures are discussed. Finally, some numerical simulations are performed to support the analytic results.

Key words: comprehensive national power; Bogdanov-Takens singularity; normal form; stability

0 引言

综合国力,是一个主权国家生存与发展所拥有的全部实力(物质力和精神力)及国际影响力的合力.模型的建立开始于1981年美国乔治敦大学战略与国际研究中心的克莱因教授给出的综合国力公式

$P_p = (C + E + M) \times (S + W)$, 其中 P_p 是综合国力, C 是基本实体, E 是经济实力, M 是军事实力, S 是战略意图, W 是贯彻国家战略的意志. 这个公式只对已有国力进行度量,未考虑时间因素引起的发展与变化,无预报功能. 1992年,我国著名军事未来学家黄硕风^[1]教授给出了一个综合国力的微分动力学模型,其国力主方程为:

收稿日期: 2011-12-12

基金项目: 黑龙江省普通高等学校青年学术骨干支持项目(11251G0011)

作者简介: 王晶囡(1978—),女,博士研究生,讲师, E-mail: jnwang2006@yaboo.com.cn;

郭爽(1972—),女,硕士,副教授.

$$\frac{dy_t}{dt} = \rho y_t \left(1 - \frac{y_t}{M} \right)$$

其中: y_t 是国力函数; ρ 是国力的年增长率. 1997 年, 王树禾^[5]修改了该模型, 得到如下形式

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x \left(\frac{M-x}{M} \right) - \beta y$$

$$\frac{dy}{dt} = -\gamma y + \delta(m-x)x$$

这里 $x(t) = X(t) - X_0$, 其中 $X(t)$ 为硬国力函数, 即指某国物质文明(资源、经济、军事)水平的一个综合指标, X_0 是正的常数, 表示 $X(t)$ 的警戒线. $y(t)$ 是软国力函数, 即指某国精神文明问题(内政外交决策的失误与正确, 官员的腐败与廉洁, 国民教育的失败与成功, 社会治安情况的严重与良好等). 模型

建立依据: 物质文明的发展速度 $\frac{dx}{dt}$ 与现有文明水准

$x(t)$ 和发展潜力的份额 $\frac{(M-x)}{M}$ 乘积成正比, α 称为

增长系数; $-\beta y$ 表示社会丑恶现象对物质文明发展的阻滞, β 称为丑恶系数; $-\gamma y$ 表示人民与政府对丑恶现象的抵制与治理力度, γ 称为统治系数; $\delta(m-x)x$ 表示物质文明不足($x(t) < m$)时, 丑恶现象随 $x(t)$ 之增长而加剧, 但物质文明程度足够大之后($x(t) > m$) 社会丑恶现象随 $x(t)$ 之增加而减少. 文

[5] 还从数学上研究了相应的二次微分系统的 Hopf 分支、中心与细焦点的判定、极限环的存在唯一性等问题. 并对这些数学结论给予以合理解释, 将社会相平面划分成社会发展区域、社会动荡区域和社会崩溃区域. 2007 年, 邢秀梅^[6]考虑到软国力对硬国力的影响是有时滞作用的, 即软国力的某些变化需在一定的时间后才能在硬国力上显现出来, 因而引入了一个时滞. 并给出了该动力系统存在局部 Hopf 分支的条件并分析了平衡点的稳定性. 2009 年, 廖晓昕^[7]研究了一般综合国力非线性扩散数学模型及其相应简化的综合国力非线性扩散数学模型的全局渐近稳定性与部分变元全局稳定, 并给出了其余部分变元稳定性的构造性判据. 共所周知研究动力系统稳定性是非常重要的, 尤其是对生物系统和社会系统^[8-11]上有着非常重要的意义.

在文 [5] 的基础上, 本文扩充了在文 [5] 中某参数的取值范围, 找出产生 Bogdanov-Takens 奇点的条件. 利用中心流形理论与李雅普诺夫函数方法研究了综合国力模型平衡点的稳定性. 然后利用文 [7] 给出的规范型计算理论, 得到了该模型带有普适开折的规范型. 并得到了经参数扰动后的该模型

的拓扑结构. 与 [5] 中得出文的局部分支性质是一致的, 这说明该系统在临界状态下会发生一系列的连锁反映, 系统的任何自发的初始条件的细微改变都会引起结果的突变. 为定量地研究各国的综合国力提供了理论依据.

1 稳定性分析

在文 [5] 的模型中, 设

$$u(t) = \frac{x(t)}{M}, v(t) = \frac{y(t)}{M}, a = \frac{\alpha}{\beta},$$

$$b = \frac{\gamma}{\beta}, c = \frac{\delta M}{\beta}, d = \frac{m}{M}, s = \beta t,$$

然后, 仍把 s 写成 t 得

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= au(1-u) - v \\ \frac{dv}{dt} &= -bv + c(d-u)u \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

文 [5] 在 $\frac{(\alpha+\gamma)^2}{4\beta\delta} < m < M$ 条件下, 得出模型

(1) 有两个奇点 $E_1 = (0, 0)$, $E_2 = \left(\frac{ab-cd}{ab-c}, a\left(\frac{ab-cd}{ab-c}\right)\left(1-\frac{ab-cd}{ab-c}\right) \right)$. 若 $\frac{(\alpha+\gamma)^2}{4\beta\delta} = m$, 即 $ab = cd$ 成立, 此时模型只有一个奇点 $E_1 = (0, 0)$. 下面就研究参数在这种情况扰动时, 模型(1)的动态性质.

模型(1)在原点处的线性化的特征方程为:

$$\lambda^2 + (b-a)\lambda - ab + cd = 0 \quad (2)$$

为了研究方便, 先给出下面引理

引理 1 若 $ab = cd$ 且 $b = a$ 成立, 那么 $\lambda = 0$ 为特征方程(2)的二重根.

定理 1 若 $ab = cd$ 且 $b \neq a$ 成立, 那么模型(1)的零解是不稳定的.

证明: 因为由定理条件可得: 如果 $b < a$ 成立, 那么模型(1)在极点处的线性化的特征方程有一个正实根 $\lambda = a - b > 0$, 所以(1)的零解此时不是稳定的; 如果 $b > a$, 应用文 [8] 第一章给出的中心流形定理可以讨论模型式(1)零解的稳定性问题.

首先, 设 $u = x + y, v = ax + by$ 把式(1)化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{c-ab}{b-a}(x+y)^2 \\ \frac{dy}{dt} &= -(b-a)y + \frac{a^2-c}{b-a}(x+y)^2 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

设中心流形为

$$y = h(x) = a_1 x^2 + b_1 x^3 + o(x),$$

其中 $a_1 = \frac{a^2 - c}{(b - a)^2}$,

$$b_1 = \frac{2(a^2 - c)(a^2 + ab - 2c)}{(b - a)^4}, \text{则式(3)在中心流}$$

形上的投影为

$$u' = \frac{c - ab}{b - a} \left\{ u + \frac{a^2 - c}{(b - a)^2} u^2 + \frac{2(a^2 - c)(a^2 + ab - 2c)}{(b - a)^4} u^3 \right\}^2. \quad (4)$$

构造李雅普诺夫函数为

$$V = (b - a)u$$

沿着式(4)求得

$$\frac{dV}{dt} \geq 0$$

综上,可知模型(1)的零解是不稳定的.

2 Bogdanov-Takens 奇异性

在本部分中给出产生 Bogdanov - Takens 奇点的条件及该奇点附近的动态性质.

定理2 对于模型(1), 设 b 和 d 为分支参数, 并引入的两新的参数 ε_1 和 ε_2 使其分别满足 $b = a + \varepsilon_1$ 和 $d = \frac{a^2}{c} + \frac{\varepsilon_2}{c}$. 当 $b = a$ 且 $d = \frac{a^2}{c}$ 时, 模型(1)在平衡点 $(0, 0)$ 处历经了 Bogdanov - Takens 分支. 此时, 称平衡点 $(0, 0)$ 为 Bogdanov - Takens 奇点.

通过定理2引入的两参数 ε_1 和 ε_2 , 则模型(1)变为

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= au - v - au^2 \\ \frac{dv}{dt} &= (a^2 + \varepsilon_2)u - (a + \varepsilon_1)v - cu^2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

下面按照文[7]的规范型计算理论, 来研究原点附近的动态性质.

选择变换 $u = x + \frac{y}{a}$ 和 $v = ax$, 可得到

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \left(\frac{\varepsilon_2}{a} - \varepsilon_1 \right) x + \left(1 + \frac{\varepsilon_2}{a^2} \right) y - \frac{c}{a} \left(x + \frac{y}{a} \right)^2 \\ \frac{dy}{dt} &= (a\varepsilon_1 - \varepsilon_2)x - \frac{\varepsilon_2}{a}y + (c - a^2) \left(x + \frac{y}{a} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

利用文[8]第一章第二节给出的李括号算子, 可得到其规范型为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= (a\varepsilon_1 - \varepsilon_2)x - \varepsilon_1 y + (c - a^2)x^2 - 2axy \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

选取变换 $\bar{x} = \frac{4a^2}{c - a^2}x$, $\bar{y} = \frac{8a^3}{(c - a^2)^2}y$ 和 $\tau =$

$\frac{c - a^2}{2a}t$ 代入式(7), 然后仍记 $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$, $t = \tau$, 可得到

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{4a^2(a\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{(c - a^2)^2}x - \frac{2a\varepsilon_1}{c - a^2}y + x^2 - xy \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

再选取变换 $\tilde{x} = x - \frac{2a^2(a\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{(c - a^2)^2}$ 代入式(8),

然后仍记 $x = \tilde{x}$, 可得到如下形式

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= \mu_1 + \mu_2 y + x^2 - xy \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

其中: $\mu_1 = 4a^4(a\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 / (c - a^2)^4$;

$$\mu_2 = 2a^2(a\varepsilon_1 - \varepsilon_2) / (c - a^2)^2 - 2a\varepsilon_1 / (c - a^2)$$

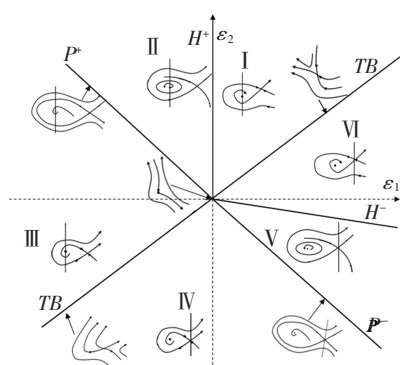
式(9)正好是文[9]第三章第一节的式(3)的形式, 所以由文[9]定理1的结论, 得到如下结论:

定理3 当 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ 在参数平面的原点附近变动时, 系统式(8)在相空间 $x - y$ 的原点附近有不同的拓扑结构, 这些拓扑结构分别对应于参数平面 $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ 原点 Ω 邻域中分支图的相应分支曲线及其分割区域. 分支图是由原点 $(0, 0)$ 及下列曲线构成:

- 1) $TB = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \mid \varepsilon_2 = a\varepsilon_1\}$
- 2) $H^\pm = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \mid \varepsilon_1 = 0 \text{ 且 } \varepsilon_2 > 0\}$
 $\varepsilon_2 = \frac{3a^2 - c}{2a}\varepsilon_1 \text{ 且 } \varepsilon_1 > 0\}$
- 3) $P^\pm = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \mid \varepsilon_2 = \frac{9a^2 - 7c}{2a}\varepsilon_1$
 $\text{且 } \varepsilon_1 < 0; \varepsilon_2 = \frac{19a^2 - 7c}{12a}\varepsilon_1 \text{ 且 } \varepsilon_1 > 0\}$

其中 TB 为鞍结点分支曲线, 当参数从 TB 线的一侧穿到另一侧平衡点的个数不变, 鞍点和结点相互转化; $H^\pm$ 为 Hopf 分支曲线, 在这条线的附近会产生极限环; $P^\pm$ 为同宿分支曲线, 在这条曲线上会出现同宿轨.

当 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ 在 $(0, 0)$ 的某邻域 Ω 内变化时, 参考文[10]的图1(分支图)的形式, 可由定理3得到式(8)在相空间的原点附近轨道的拓扑结构见图1.



注: 零平衡点上有一小竖线表示纵坐标.

图1 模型(8)的分支图

3 数值模拟

对于模型(1)取 $a=0.01$; $c=0.2$, 则有

$b=0.01+\varepsilon_1$; $d=0.0005+5\varepsilon_2$; 经过计算可得:

$TB: \varepsilon_2=0.01\varepsilon_1$; $H^+: \varepsilon_1=0, \varepsilon_2>0$;

$H^-: \varepsilon_2=-9.985\varepsilon_1, \varepsilon_1>0$;

$P^+: \varepsilon_2=-69.9554\varepsilon_1, \varepsilon_1<0$

$P^-: \varepsilon_2=-11.6508\varepsilon_1, \varepsilon_1>0$.

为了理解好分支图(图1), 下面分如下4种情况进行研究:

1) $\varepsilon_1=0.01$; $\varepsilon_2=0.0001$ 在图1的 TB 线上, 只有一个平衡点(见图2中的(a)).

2) $\varepsilon_1=0.1$; $\varepsilon_2=0.15$ 在图1中的区域I内, 平凡平衡点稳定, 非平凡平衡点为鞍点(见图2中的(b)).

3) $\varepsilon_1=0$; $\varepsilon_2=0.01$ 在图1的 H^+ 线上, 在平凡平衡点附近有极限环出现(见图2中的(c)).

4) $\varepsilon_1=-0.001$; $\varepsilon_2=0.0699554$ 在图1的 P^+ 线上, 有同宿轨出现(见图2中的(d)).

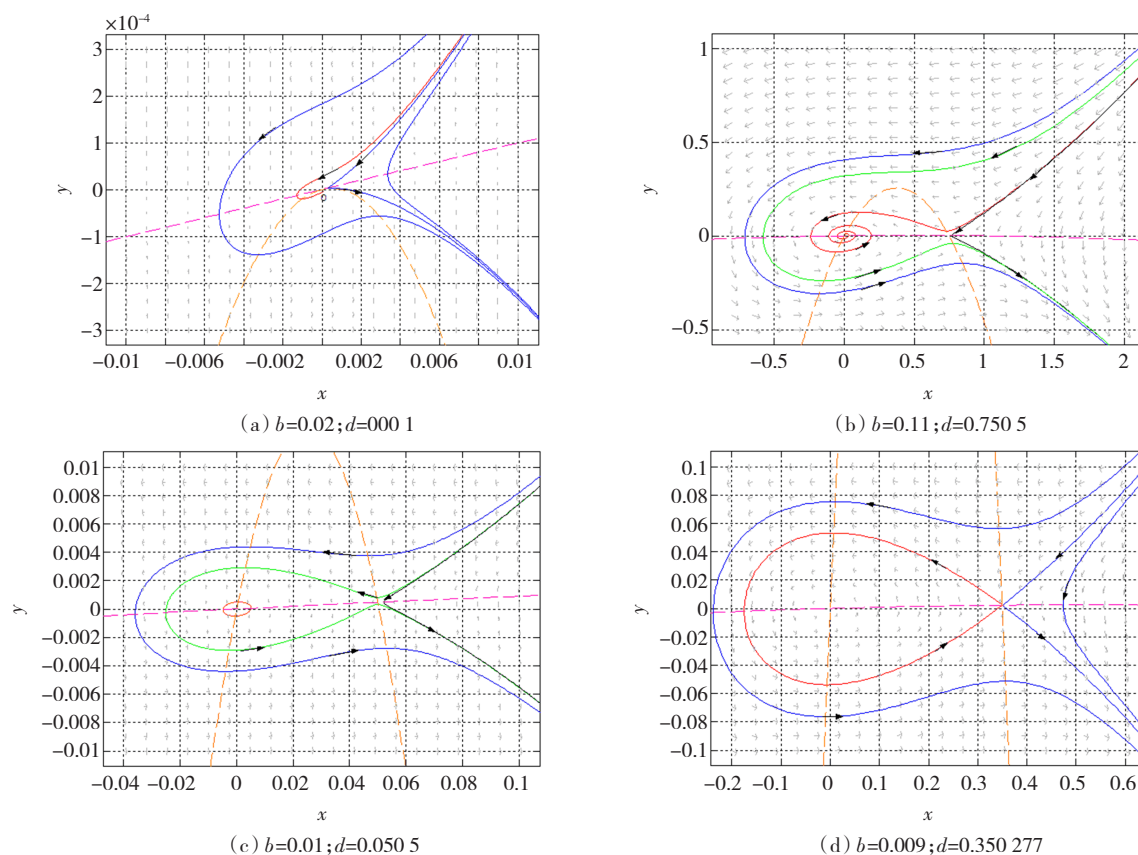


图2 模型(1)的相图

4 结语

在文中所做变换均为可逆变换, 所以模型(1)与式(5)和式(8)都有相同的拓扑结构. 这一点我们

可以从数值模拟出的图2中看到. 同时也证实了从文[6]得到Hopf分支、中心、极限环的存在等问题均属于Bogdanov-Takens分支的局部问题, 是由Bogdanov-Takens奇点产生的. 其中, 平凡平衡点稳定说明在物质文明不发达的同时, 社会的丑恶现象

也几乎不会出现; 极限环的出现说明此时物质文明和精神文明呈周期变化; 而同宿轨的出现意味着社会动荡区域的面积几乎为零, 社会的崩溃区域增加. 所以我们可以通过对模型的奇异性的分析找出参数之间相互影响的规律, 进一步预测各个国家的综合国力的发展情况.

参 考 文 献:

- [1] 黄硕风. 综合国力与国情研究 [J]. 中国国情国力, 1992(1): 13-19.
- [2] 王树禾. 综合国力的数学建模 [J]. 高校应用数学学报, 1997, 12(1): 29-36.
- [3] 邢秀梅. 具时滞综合国力模型的 Hopf 分支分析 [J]. 伊犁师范学院学报, 2007(3): 1-4.
- [4] 廖晓昕. 综合国力非线性扩散模型稳定性分析 [J]. 南京信息工程大学学报: 自然科学版, 2009, 1(3): 247-251.
- [5] 李冬梅, 李晔, 孙嘉轶. 具有 Michaelis-menten 功能性反应的时滞扩散竞争系统稳定性分析 [J]. 哈尔滨理工大学学报, 2010, 15(2): 102-105.
- [6] 李冬梅, 尹晓, 邵琛. 污染环境中 Smith 模型的稳定性 [J]. 哈尔滨理工大学学报, 2011, 16(3): 98-103.
- [7] FARIA T, MAGALHES LT. Normal Forms for Retarded Functional Differential Equations and Applications to Bogdanov-Takens Singularity [J]. Journal of Differential Equations, 1995, 122(2): 201-224.
- [8] 张伟江, 杨升荣. 非线性动力系统的动态分析 [M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1996: 1-18.
- [9] 张芷芬. 向量场的分岔理论基础 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1997: 129-152.
- [10] JIANG W, YUAN Y. Bogdanov-Takens Singularity in Van der Pol's Oscillator with Delayed Feedback [J]. Physical D, 2007, 227(2): 149-161.

(编辑: 王 萍)

(上接第 113 页)

- [6] YANG Donghui. Existence and Uniqueness of Positive Solutions to a Fourth-order Nonlinear Singular the Beam Equation [J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2009, 26(5): 890-894.
- [7] YAO Qingliu. Positive Solution for Eigenvalue Problems of Fourth-order Elastic Beam Equations [J]. Applied Mathematics Letters, 2004, 17: 237-243.
- [8] ZHANG Xinguang, LIU Lishan. Positive Solutions of Fourth-order Multi-point Boundary Value Problems with Bending Term [J]. Applied Mathematics And Computation, 2007, 194(2): 321-332.
- [9] BAI Zhanbing, HUANG Bingjia, GE Weigao. The Iterative Solutions for Some Fourth-order p-Laplace Equation Boundary Value Problems [J]. Applied Mathematics Letters, 2006, 19(1): 8-14.
- [10] YAO Qingliu. Existence and Multiplicity of Positive Solutions to a Singular Elastic Beam Equation Rigidly Fixed at Both Ends [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2008, 69(8): 2683-2694.
- [11] YANG Bo. Estimates of Positive Solutions to a Boundary Value Problem for the Beam Equation [J]. Communication in Mathematical Analysis, 2007, 2(1): 13-21.
- [12] LIN Xiao Ning, LI Xiao Yue, JIANG Daqing. Existence and Uniqueness of Solutions for Singular Fourth-order Boundary Value Problems [J]. Journal of Computational And Applied Mathematics, 2006, 196: 155-161.
- [13] AGARWA R P, MEEHAN M, OREGAN D. Fixed Point Theory and Applications [M]. Cambridge University Press, 2001: 20-32.
- [14] 盖功琪. 一类奇异二阶离散边值问题正解的存在唯一性 [J]. 哈尔滨理工大学学报, 2008(5): 115-117.
- [15] 徐润章; 刘亚成. 具异号非线性源项波动方程的初边值问题 [J]. 哈尔滨工程大学学报, 2007(4): 484-486.
- [16] GUO D, LAKSHMIKANTHAM V. Nonlinear Problems in Abstract Cones [M]. Academic Press, San Diego, 1988: 121-125.

(编辑: 王 萍)