

关于有正则元环的交换性定理

陈光海, 王延鹏

(哈尔滨理工大学 应用科学学院, 黑龙江 哈尔滨 150080)

摘要: 为了研究环的交换性条件, 依据 Herstein 关于交换性的著名结论以及 Jacobson 密度定理等理论, 讨论有中心正则元的环, 在一定条件下的交换性, 推广了一系列已有定理, 该结论中多项式条件比较宽松, 涵盖了多个已有结论.

关键词: 交换性; Jacobson 根; 中心; 正则元; m -扭自由

中图分类号: O153.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2012)04-0119-03

Commutativity of Rings Containing Regular Elements

CHEN Guang-hai, WANG Yan-peng

(School of Applied Science, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: In order to research the commutativity of rings, according to Herstein's famous theory and Jacobson's density theory, we discuss the commutativity of the rings containing regular elements satisfying some condition and spread a series of existing theorem. The conclusion in which polynomial is in loose condition, covers a number of existing conclusions.

Key words: commutativity; Jacobson radical; center; regular elements; m -torsionfree

文 [1] 证明了如果有单位元的环满足 $C_1(m, R \setminus J(R))$, $C_2(m, R \setminus J(R))$, $Q(m)$, m 是一固定正整数, 那么 R 可交换. 本文将其中的单位元条件弱化到存在中心正则元 $r \notin J(R)$, 通过对 Koethe 半单纯环、半质环及一般环进行了研究, 利用零因子, 正则元, 中心及亚直不可约环以及密度定理等相关知识, 并且对 Herstein 定理的进一步研究, 提出并严格地证明了一个更具有一般性环的交换性条件.

文中 $J(R)$ 为 R 的 Jacobson 根基, 并且: $C_1(m, R \setminus J(R))$ 表示 $[x^m, y^m] = 0, x, y \in R \setminus J(R)$.

$C_2(m, R \setminus J(R))$ 表示: $[xy]^m + y^m x^m, x] = 0 = [yx]^m + x^m y^m, x], x, y \in R \setminus J(R)$.

$Q(m)$ 表示: 对任意的 $x, y \in R$, 使得 $m[x, y] = 0$, 则有 $[x, y] = 0$.

1 若干引理

引理 1 若 R 为有中心正则元 $r \notin J(R)$ 的 m -扭自由环, 并且满足 $C_1(m, R)$, $C_2(m, R)$ 那么有

I) 如果 $a \in N(R)$, $y \in R$, 那么有 $[a, y^m] = 0$;

II) 如果 $a \in N(R)$, $b \in N(R)$, 那么有 $[a, b] = 0$;

其中 $N(R)$ 为 R 的幂零元集合.

证明: I) 由假设可得 $[xy]^m + y^m x^m, x] = 0$,

$[yx]^m + x^m y^m, x] = 0$ 因此有

$$x\{[xy]^m - [yx]^m\} = y^m x^{m+1} - xy^m x^m \quad (1)$$

$$\{[xy]^m - [yx]^m\}x = x^m y^m x - x^{m+1} y^m \quad (2)$$

结合用式(1)左乘 x , 用式(2)右乘 x 得到

$$[x, [x^{m+1}, y^m]] = 0 \quad (3)$$

收稿日期: 2012-01-03

基金项目: 黑龙江省自然科学基金(A200601); 黑龙江省教育厅科学技术研究项目(10051060).

作者简介: 陈光海(1953—), 男, 副教授, 硕士生导师, E-mail: chenguanhai@126.com;

王延鹏(1982—), 男, 讲师.

显然 $[x^{m+1}, y^m] = x^m [x, y^m] + [x^m, y^m] x$, 再由 $C_1(m, R)$ 及式(3)得到

$$x^m [x, [x, y^m]] = 0 \quad (4)$$

取 $r' = r + ra$ 代替式(4)的 x 得 $r'^m [r', [r', y^m]] = 0$, 即 $[r', [r', y^m]] = 0$, 再由 $C_1(m, R)$ 可知 $[r'^m, y^m] = 0$, 因此有 $mr'^{m-1} [r', y^m] = 0$, 又因为 $Q(m)$, r' 为 R 中的正则元, 所以 $[r', y^m] = 0$, 即 $[r + ra, y^m] = 0$, 因此 $[a, y^m] = 0$.

II) 由式 I) 知 $[a, x^m] = 0, a \in N(R), x \in R$. 同样用 I) 可得

$$[a, (r + rx)^m] = 0 \quad (5)$$

若 $b^2 = 0$, 且 $b \neq 0$, 用 b 代替(5)中的 x 有 $[a, (r + rb)^m] = 0$, 因此 $m[a, b] = 0$, 再由 $Q(m)$ 得到 $[a, b] = 0$.

任取 $b \in N(R)$, 则必有自然数 s 使得当 $n \geq s$ 时, $[a, b^n] = 0$. 设满足 $[a, b^n] = 0$ 的最小正自然数为 k , 下面就来证明 $k = 1$.

若 $k > 1$, 用 b^{k-1} 代替(5)中的 x 有 $[a, (r + rb^{k-1})^m] = 0$, 化简得到 $[a, b^{k-1}] = 0$. 这与 k 为满足 $[a, b^n] = 0$ 的最小正自然数矛盾, 因此 $k = 1$. 于是 $[a, b] = 0$.

引理2 环 R 中存在中心正则元 r , 如果 $dx^m [x, y] = 0$, 且 $d(x+r)^m [x, y] = 0$, 其中正整数 $m \geq 1, d \geq 1$, 那么有 $d[x, y] = 0$.

证明: 由 $d(x+r)^m [x, y] = 0$ 知

$$d(x^m + mx^{m-1}r + C_m^2 x^{m-2}r^2 + \cdots + r^m) [x, y] = 0 \quad (6)$$

两边同乘 x^{m-1} , 再由 $dx^m [x, y] = 0$ 得到 $dx^{m-1}r^m [x, y] = 0$, 即

$$dx^{m-1} [x, y] = 0 \quad (7)$$

式(6)两边同乘 x^{m-2} , 再由 $dx^m [x, y] = 0$ 及式(7)得到 $dx^{m-2} [x, y] = 0$. 仿照上述方法继续做下去得到 $d[x, y] = 0$.

引理3 环 R 中存在中心正则元 $r, m \geq 1$ 是一固定的正整数, 如果 R 满足 $C_1(m, R), C_2(m, R), Q(m)$, 那么 R 可交换.

证明: 由假设条件可知对于任意的 $x \in R$, 式(4)即 $x^m [x, [x, y^m]] = 0$ 成立. 在式(4)中用 $x + r$ 代替 x , 再由引理2可得

$$[x, [x, y^m]] = 0 \quad (8)$$

下证 $N(R)$ 形成理想.

对任意的 $x \in N(R), y \in R$, 不妨设 $x^t = 0$. 由引理1有

$$(xy)^{mt} = x(yx)^m(yx)^{m-1} \cdots (yx)^{m-1}y =$$

$$\begin{aligned} & (yx)^m(yx)^{m-1} \cdots x(yx)^{m-1}y = \\ & (yx)^{m-1}y(yx)^m \cdots x^2(yx)^{m-1}y = \cdots = \\ & (yx)^{m-1}y(yx)^{m-1}y \cdots x'(yx)^{m-1}y = 0 \end{aligned}$$

因此 $xy \in N(R)$.

对任意的 $a \in N(R), b \in N(R)$, 不妨设 $a^t = 0, b^s = 0$, 由引理1, 有

$$(a+b)^{s+t} = \sum_{i \geq s} C_{s+t}^i a^{s+t-i} b^i + \sum_{j \geq t} C_{s+t}^j b^{s+t-j} a^j = 0 + 0 = 0,$$

即 $N(R)$ 为理想.

由引理1知 $N(R)$ 为可交换的理想, 故 $(N(R))^2 \subseteq Z(R)$, 以下证明 $N(R) \subseteq Z(R)$.

对任意的 $a \in N(R)$, 在式(8)中用 $r+a$ 代替 y 再由 $a^i \in (N(R))^2 \subseteq Z(R), i \geq 2$, 及 $Q(m)$ 得到

$$[x, [x, a]] = 0, \forall x \in R, a \in N(R) \quad (9)$$

由引理1知

$$[a, x^m] = 0, \forall x \in R, a \in N(R) \quad (10)$$

由式(9), 文[2]及式(10)得到 $mx^{m-1}[a, x] = 0$. 用 $x+r$ 代替 x , 由引理2及 $Q(m)$ 得到 $[a, x] = 0, \forall x \in R, a \in N(R)$. 因此 $N(R) \subseteq Z(R)$.

由 $C_1(m, R)$ 及文[4]知换位子理想诣零, 即 $C(R) \subseteq N(R)$. 再由 $N(R) \subseteq Z(R)$ 有

$$C(R) \subseteq N(R) \subseteq Z(R) \quad (11)$$

由式(11), 文[2]及 $C_1(R)$ 知 $mx^{m-1}[x, y^m] = [x^m, y^m] = 0, \forall x, y \in R$, 再用 $x+r$ 代替 x , 并且由引理2及 $Q(m)$ 得到 $[x, y^m] = 0, \forall x, y \in R$, 则有 $my^{m-1}[x, y] = [x, y^m] = 0$, 再由引理2及 $Q(m)$ 得到 $[x, y] = 0, \forall x, y \in R$, 即 R 可交换.

2 主要结论

定理 R 是有中心正则元 $r \notin J(R)$ 的结合环, 如果满足 $C_1(m, R \setminus J(R)), C_2(m, R \setminus J(R)), Q(m)$, m 是一固定正整数, 那么 R 可交换.

证明: 式(8)在这里也成立, 因此有

$$[u, [u, v^m]] = 0, \forall u, v \in r(R) \setminus J(R) \quad (12)$$

由 $C_1(m, R \setminus J(R))$ 知 $[u^m, v^m] = 0$, 并且由式(12)及文[2]得到, $mu^{m-1}[u, v^m] = [u^m, v^m] = 0$

再由引理2有

$$[u, v^m] = 0, \forall u, v \in r(R) \setminus J(R) \quad (13)$$

若取 $a \in N(R)$, 则有极小正整数 l 使得

$$[u, a^l] = 0, n \geq l, u \in r(R) \setminus J(R) \quad (14)$$

如果 $l > 1$, 那么 $r + ra^{l-1} \in r(R) \setminus J(R)$, 由式(13)知 $[u, (r + ra^{l-1})^m] = 0$, 再由式(14)可得 $m[u, a^{l-1}] = 0$, 因此 $[u, a^{l-1}] = 0$, 这与 l 极小矛盾, 故 $l = 1$. 这样

由式(14)可知

$$[u, a] = 0, \forall u \in r(R) \setminus J(R), a \in N(R) \quad (15)$$

令 $j_1, j_2 \in J(R)$, 显然 $r + rj_1, r + rj_2 \in r(R) \setminus J(R)$, 那么由式(13)知

$$[r + rj_1, (r + rj_2)^m] = 0, \forall j_1, j_2 \in J(R) \quad (16)$$

由文[1]知本原环满足 $C_2(m, R)$ 可交换, 因此 $R/J(R)$ 可交换, 显然 $C(R) \subseteq J(R)$.

下证 $C(R) \subseteq N(R)$. 令 $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ 是 R 中的任意元则 $c_1 = [x_1, y_1], c_2 = [x_2, y_2], c_3 = [x_3, y_3]$ 为 R 的任意换位子. 显然 $c_1, c_2, c_3 \in J(R)$, 因此由式(16)得到

$$[r + rc_3, (r + rc_1 + rc_2 + rc_1c_2)^m] = 0 \quad (17)$$

式(17)被所有 R 中的元素满足, 但是不被 Z_p 上的 2×2 阶矩阵环满足, 例如令 $c_1 = [e_{11}, e_{11} + e_{12}], c_2 = [e_{11} + e_{12}, e_{21}], c_3 = c_1$, 因此由文[6]得 $C(R) \subseteq N(R)$. 由 $C(R) \subseteq N(R)$ 及式(15)得到

$$[r + rj_2, [r + rj_1, r + rj_2]] = 0, \forall j_1, j_2 \in J(R) \quad (18)$$

由式(16), 式(18)及文[2]得到 $m(r + rj_2)^{m-1} \times [r + rj_1, r + rj_2] = 0$, 因此容易得到 $m[x_1, j_2] = 0$, 再由 $Q(m)$ 知 $[x_1, j_2] = 0, \forall j_1, j_2 \in J(R)$, 故 $J(R)$ 可交换, 因此 $(J(R))^2 \subseteq Z(R)$.

若 $m = 1$, 可以得到 $r^2[x, y] = r[r + rx, y] = r[x, r + ry] = [r + rx, r + ry]$. 由定理条件 $[x^m, y^m] = 0$ 知 $[x, y] = 0, \forall x, y \in R$, 这是因为如果 $x \in J(R)$ 那么 $r + rx \notin J(R)$, 定理成立.

若 $m > 1$, 如果 $x \in J(R), y \notin J(R)$, 则在 $R/J(R)$ 中令 $y = y_1 + x_1, x_1 \in J(R), y_1 \notin J(R)$, 那么有, $[y^m, x^m] = [x_1 + y_1]^m, x^m] = [y_1^m + d, x^m] = [y_1^m, x^m] = 0$ 其中, $d \in (J(R))^2 \subseteq Z(R)$, 同理可证 $[xy]^m + y^m x^m, x] = 0 = [yx]^m + x^m y^m, x]$.

如果 $x \notin J(R), y \notin J(R), x = x_1 + x', y = y_1 + y', x', y' \in J(R)$, 那么

$$[y^m, x^m] = [y_1 + y']^m, [x_1 + x']^m] =$$

$$[y_1^m + d_1, x_1^m + d_2] = [y_1^m, x_1^m] = 0,$$

其中, $d_1, d_2 \in (J(R))^2 \subseteq Z(R)$. 同理可证 $[xy]^m + y^m x^m, x] = 0 = [yx]^m + x^m y^m, x]$.

如果 $x, y \in J(R)$, 显然 $[y^m, x^m] = 0, [xy]^m + y^m x^m, x] = 0 = [yx]^m + x^m y^m, x]$ 成立.

综上所述由引理3知 R 可交换.

下面从例1到例4说明定理的条件缺一不可, 并且是文[1-10]尤其是文[1]的推广.

$$\text{例1} \quad R = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \alpha & \delta \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in Z_2 \right\}$$

显然 R 满足 $[x^2, y^2] = 0, (yx)^2 x^2 - x^2 (xy)^2 \in Z(R), \forall x, y \in R$. 但 R 非交换, 这就说明了 $Q(2)$ 即 $Q(m)$ 是定理必要的条件.

$$\text{例2} \quad R = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \alpha & \delta \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in Z_3 \right\}$$

显然 R 满足 $C_2(2, R), Q(2)$, 但 R 非交换, 这就说明了 $C_1(m, R \setminus J(R))$ 是定理必要的条件.

$$\text{例3} \quad R = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in Z_4 \right\}$$

显然 R 满足 $C_1(3, R), Q(3)$, 但 R 非交换, 这就说明了 $C_2(m, R \setminus J(R))$ 是定理必要的条件.

$$\text{例4} \quad R = \left\{ \begin{pmatrix} 2k & t \\ 0 & 2k \end{pmatrix} \mid k, t \text{ 为整数} \right\}$$

显然 R 为满足 $C_1(m, R), C_2(m, R), Q(m)$, 但没有单位元的结合环, 于是用文[1-10]的定理无法判断其交换性. 但由于 R 中有正则中心元, 因此可以用本文的定理判断.

参考文献:

- [1] MOHARRAM A. KHAN Jeddah. Commutativity of Rings with Constraints Involving a Subset [J]. Czechoslovak Mathematical Journal, 2003, 53(128): 545-559.
- [2] JACOBSON N. Structure of Rings. Amer [M]. Rbook Island: Math. Soc. Colloq. Publ., 1964.
- [3] KEZLAN T P. A Note on Commutativity of Semiprime PI-rings. Math [J]. Japon, 1982, 27: 267-268.
- [4] HERSTEIN I N. Power Maps in Rings [J]. J Michigan Math, 1961, 8: 29-32.
- [5] HIRANO Y, HONGON M, TOMINAGE H. Commutativity Theorems for Certain Rings [J]. Math. J. Okayama Univ., 1980, 22: 65-72.
- [6] BELL H E. Some Commutativity Results for Periodic Rings [J]. Acta Math. Acad. Sci. Hungar, 1976, 28: 279-283.
- [7] BELL H E. A Commutativity Study for Periodic Rings [J]. Pacific J. Math., 1977, 70: 29-36.
- [8] BELL H E. On Rings with Commutativity Powers [J]. Math. Japon., 1979, 24: 473-478.
- [9] ABU-KHUZARM H, YAQUB A. Commutativity of Rings Satisfying some Polynomial Constraints [J]. Acta Math. Hungar, 1995, 67: 207-217.
- [10] HERSTEIN I N. A Commutativity Theorem [J]. J. Algebra, 1976, 38: 112-118.

(编辑: 王 萍)