

一类随机积分 - 微分方程的均方渐近概周期解

姚慧丽, 王健伟

(哈尔滨理工大学 应用科学学院, 黑龙江 哈尔滨 150080)

摘 要: 随机微分方程是在解决某些具有随机现象建立起来的一类方程, 其中随机微分方程的均方渐近概周期解相比于均方概周期解应用更加广泛. 为了研究均方渐近概周期过程在随机微分方程中的应用, 利用均方渐近概周期函数的相关性质以及 Banach 不动点原理讨论了一类随机积分 - 微分方程均方渐近概周期解的存在性和唯一性.

关键词: 均方渐近概周期解; 随机积分 - 微分方程; Banach 不动点理论

中图分类号: O175 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2014)06-0118-05

Square-mean Asymptotically Almost Periodic Solutions to a class of Stochastic Integro-Differential Equations

YAO Hui-li, WANG Jian-wei

(School of Applied Sciences, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: Stochastic differential equation is established by solving some stochastic phenomenon. Square-mean asymptotically almost periodic solutions of the equations are used more widely than square-mean almost periodic solutions. In order to study the applications of square-mean asymptotically almost periodic processes in the stochastic differential equations, the existence and uniqueness of square-mean asymptotically almost periodic solutions to a class of stochastic integro-differential equations are discussed using the properties of square-mean asymptotically almost periodic functions and Banach fixed point theorem.

Key words: square-mean asymptotically almost periodic solutions; stochastic integro-differential equation; Banach fixed point theorem

概周期函数理论是丹麦数学家 H. Bohr 于 1925 - 1926 年间提出并建立的^[1-2], 全体概周期函数构成的空间是周期函数的完备化空间. 经过 BOCHNER、NEUMANN、STEPANOV 等人的研究^[3-5], 概周期函数理论发展到了一个全新的高度. 近些年有很多文献将概周期型函数理论应用到了某些微分方程中, 讨论了概周期型解的存在唯一性^[6-10]. 随机过程的概周期理论最早是由 Slutsky 在文献 [1] 中提出的. 近些年, 美国数学家 BEZANDRY 与 DIAGANA

分别对一类半线性随机泛函微分方程和双曲型随机微分方程的均方概周期解的存在性进行了研究^[12-13], 这些研究成果在诸多方面被引用和推广^[16-18]. 2010 年, BEZANDRY 和 DIAGANA 编著了《概周期随机过程》^[19]一书, 对这种过程进行了详细介绍.

文 [20] 中作者研究了一类随机积分 - 微分方程的均方概周期解, 方程如下:

收稿日期: 2014-03-05

基金项目: 黑龙江省教育厅 2011 年度科学技术研究项目(12511110).

作者简介: 姚慧丽(1970—), 女, 博士, 教授, E-mail: Huili_yao@sohu.com;

王健伟(1989—), 男, 硕士研究生.

$$dx(t) = \left(Ax(t) + a \int_{-\infty}^t e^{-b(t-s)} Ax(s) ds \right) dt + f(t, x(t)) dt + g(t, x(t)) dW(t) \quad (1)$$

本文将研究方程(1)的均方渐近概周期解的存在性和唯一性问题.

2 预备知识

本文 (Ω, F, P) 表示完备的概率空间 $(J, \|\cdot\|_J)$, $(H, \|\cdot\|)$ 表示两个可分的Banach空间, $L_2(J, H)$ 是指所有 $J \rightarrow H$ 上所有线性算子的全体并赋予范数 $\|\cdot\|_2$. 假定 $\{W(t), t \in R\}$ 是一个在 (Ω, F, P) 上的 F_t -可测 Q -Wiener过程, 其中 $F_t = \sigma\{W(s), s \leq t\}$. $L^2(\Omega, H)$ 表示一类强可测的均方可积的随机过程的全体. 易知 $L^2(\Omega, H)$ 是一个Banach空间, 其中范数定义为 $\|X\|_{L^2(\Omega, H)} = (E\|X\|^2)^{1/2}$, 这里 $E(h) = \int_{\Omega} h(\omega) dP(\omega)$.

定义1 一个连续的随机过程 $X: R \rightarrow L^2(\Omega, H)$ 被称作是均方概周期的, 是指如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在一个数 $l(\varepsilon) > 0$ 使得任意长度为 $l(\varepsilon)$ 的区间至少包含一个 τ 使得:

$$\sup_{t \in R} E\|X(t+\tau) - X(t)\|^2 < \varepsilon$$

所有均方概周期随机过程的全体记为 $AP(R, L^2(\Omega, H))$.

定义2 一个连续的随机过程 $X: R \rightarrow L^2(\Omega, H)$ 被称作是均方渐近概周期的, 是指如果对 X 能写成 $X = g + \varphi$, 其中

$$g \in AP(R, L^2(\Omega, H)), \varphi \in SMC_0$$

$SMC_0 = \{h: R \rightarrow L^2(\Omega, H) \mid h \text{ 是连续的, 且 } \lim_{t \rightarrow \infty} E\|h(t)\|^2 = 0\}$, 均方渐近概周期随机过程的全体记为 $AAP(R, L^2(\Omega, H))$.

定义3 一个联合连续函数 $f: R \times L^2(\Omega, H_1) \rightarrow L^2(\Omega, H_2)$, $(t, y) \rightarrow f(t, y)$ 关于 $t \in R$ 被称作是均方概周期的且对于 $y \in \Delta$ 一致成立(其中 $\Delta \subset L^2(\Omega, H_1)$ 是紧的), 是指如果对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在一个 $l(\varepsilon, \Delta) > 0$, 使得任意长度为 $l(\varepsilon, \Delta) > 0$ 的区间至少包含一个 τ , 满足:

$$\sup_{t \in R} E\|f(t+\tau, y) - f(t, y)\|^2 < \varepsilon$$

定义4 一个联合连续函数 $f: R \times L^2(\Omega, H_1) \rightarrow L^2(\Omega, H_2)$, $(t, y) \rightarrow f(t, y)$ 关于 $t \in R$ 被称作是均方渐近概周期的且对于 $y \in \Delta$ 一致成立(其中 $\Delta \subset L^2(\Omega, H_1)$ 是紧的), 是指如果有:

$$f = g + \varphi, g \in AP(R \times L^2(\Omega, H_1), L^2(\Omega, H_2)), \varphi \in SMC_0(R \times L^2(\Omega, H_1), L^2(\Omega, H_2)).$$

定理1 [3] 若联合连续函数 $f: R \times L^2(\Omega, H_1) \rightarrow L^2(\Omega, H_2)$, $(t, y) \rightarrow f(t, y)$ 关于 $t \in R$ 是均方概周期的且对于 $y \in \Delta$ 一致成立(其中 $\Delta \subset L^2(\Omega, H_1)$ 是紧的), 且 f 满足Lipschitz条件: $E\|f(t, y) - f(t, z)\|^2 \leq KE\|y - z\|_1^2, y, z \in L^2(\Omega, H_1), t \in R$, 常数 $K > 0$. 则对于任意均方概周期随机过程 $\theta: R \rightarrow L^2(\Omega, H_1)$, 都有 $t \rightarrow f(t, \theta(t))$ 是均方概周期随机过程.

定理2 若联合连续函数 $f: R \times L^2(\Omega, H_1) \rightarrow L^2(\Omega, H_2)$, $(t, y) \rightarrow f(t, y)$ 关于 $t \in R$ 是均方渐近概周期的且对于 $y \in \Delta$ 一致成立(其中 $\Delta \subset L^2(\Omega, H_1)$ 是紧的), 且 f 满足Lipschitz条件: $E\|f(t, y) - f(t, z)\|^2 \leq K_1 E\|y - z\|_1^2, y, z \in L^2(\Omega, H_1), t \in R$, 常数 $K_1 > 0$. 则对于任意均方渐近概周期随机过程 $\theta: R \rightarrow L^2(\Omega, H_1)$, 都有 $t \rightarrow f(t, \theta(t))$ 是均方渐近概周期随机过程.

证明: 由 $f \in AAP(R \times L^2(\Omega, H_1), L^2(\Omega, H_2))$, 有 $f = g + h$, 其中

$$g \in AP(R \times L^2(\Omega, H_1), L^2(\Omega, H_2)), h \in SMC_0(R \times L^2(\Omega, H_1), L^2(\Omega, H_2))$$

同理由 $\theta \in AAP(R, L^2(\Omega, H_1))$ 有 $\theta = \theta_1 + \theta_2$, 其中

$$\theta_1 \in AP(R, L^2(\Omega, H_1)), \theta_2 \in SMC_0(R, L^2(\Omega, H_1))$$

从而 $f(t, \theta(t))$ 可表示为

$$\begin{aligned} f(t, \theta(t)) &= g(t, \theta_1(t)) + f(t, \theta(t)) - g(t, \theta_1(t)) \\ &= g(t, \theta_1(t)) + h(t, \theta_1(t)) \\ &= g(t, \theta_1(t)) - f(t, \theta_1(t)) + h(t, \theta_1(t)) \end{aligned}$$

由定理1可知: $g(t, \theta_1(t)) \in AP(R \times L^2(\Omega, H_1), L^2(\Omega, H_2))$, 即 $g(t, \theta_1(t))$ 是均方概周期随机过程.

以下考虑 $f(t, \theta(t)) - f(t, \theta_1(t))$, 由已知条件得:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} E\|f(t, \theta(t)) - f(t, \theta_1(t))\|^2 &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} K_1 E\|\theta - \theta_1\|^2 = \\ K_1 \lim_{t \rightarrow \infty} E\|\theta_2(t)\|^2 &= 0 \end{aligned}$$

由上述可知 $f(t, \theta(t)) - f(t, \theta_1(t)) \in SMC_0(R \times L^2(\Omega, H_1), L^2(\Omega, H_2))$ 成立.

最后考虑 $h(t, \theta_1(t))$. 令 $A = \overline{\theta_1(R)}$, 则 A 是紧的, 因此对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $x_1, x_2, \dots, x_m \in A$ 使得 $\theta_1(R) \subset \bigcup_{i=1}^m (x_i, \varepsilon/2K_1)$.

考虑开集:

$$B_i = \{t \in R: \theta_1(t) \in B(x_i, \varepsilon/2K_1)\}, 1 \leq i \leq m$$

由不等式 $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ 、定理1及上述紧集性质得到:

$$\begin{aligned} E \|h(t, \theta_1(t))\|^2 &= E \|h(t, \theta_1(t)) - h(t, x_i) + \\ &\quad h(t, x_i)\|^2 \leq 2E \|h(t, \theta_1(t)) - \\ &\quad h(t, x_i)\|^2 + 2E \|h(t, x_i)\|^2 \leq \\ &\quad 2K_1 E \|\theta_1(t) - x_i\|^2 + \\ &\quad 2E \|h(t, x_i)\|^2 \end{aligned}$$

由此得: 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $E \|h(t, \theta_1(t))\|^2 \rightarrow 0$, 这就证明了 $h(t, \theta_1(t)) \in SMC_0$. 综上所述, $f(t, \theta(t)) \in AAP(R \times L^2(\Omega, H_1), L^2(\Omega, H_2))$, 即 $f(t, \theta(t))$ 是均方渐近概周期随机过程.

3 主要结论

这一部分将研究方程(1)

$$dx(t) = (Ax(t) + a \int_{-\infty}^t e^{-b(t-s)} Ax(s) ds) dt +$$

$$f(t, x(t)) dt + g(t, x(t)) dW(t), t \in R$$

的均方渐近概周期解的存在唯一性, 其中 a, b 为常数. 其中 A 是一个具有指数稳定增长的 c_0 半群 $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ 的无穷小生成元, 因此存在常数 $M > 1$, $\delta > 0$ 满足: $\|T(t)\| \leq Me^{-\delta t} (t > 0)$.

根据文 [20] 可知, 方程解的形式为

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^t T(t-s) f(s, x(s)) ds + \\ &\quad \int_{-\infty}^t T(t-s) g(s, x(s)) dW(s), t \in R \quad (2) \end{aligned}$$

定理3 若方程(1)满足以下的假设:

(H1) 联合连续函数 $f \in AAP(R \times L^2(\Omega, H_1), L^2(\Omega, H_2))$ 且满足 Lipchitz 条件:

$$E \|f(t, y) - f(t, z)\|^2 \leq K_f E \|y - z\|^2$$

对于 $y, z \in \Delta, \Delta \subset L^2(\Omega, H)$ 成立, 其中 K_f 为常数;

(H2) 联合连续函数 $g \in AAP(R \times L^2(\Omega, H_1), L^2(\Omega, H_2))$ 且满足 Lipchitz 条件:

$$E \|g(t, y) - g(t, z)\|^2 \leq K_g E \|y - z\|^2$$

对于 $y, z \in \Delta, \Delta \subset L^2(\Omega, H)$ 成立, 其中 K_g 为常数;

$$(H3) \frac{M^2(K_f + K_g)}{\delta} < 1.$$

则方程(1)存在唯一的均方渐近概周期解.

证明: 因为方程(1)解的形式为式(2), 所以只需研究式(2)定义的函数 $x(t)$ 的均方渐近概周期

性. 记

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^t T(t-s) f(s, x(s)) ds + \\ &\quad \int_{-\infty}^t T(t-s) g(s, x(s)) dW(s) = \\ &\quad (S_f x)(t) + (S_g x)(t) \quad (3) \end{aligned}$$

先证明 $(S_f x)(t)$ 是均方渐近概周期的, 根据定理2可知, 只需证明

$$F(t) = \int_{-\infty}^t T(t-s) f(s) ds$$

是均方渐近概周期的, 其中 f 是均方渐近概周期过程. 令 $f = g + \varphi$, g, φ 分别是 f 的概周期分量和 SMC_0 分量, 则有:

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_{-\infty}^t T(t-s) g(s) ds + \\ &\quad \int_{-\infty}^t T(t-s) \varphi(s) ds = F_1(t) + F_2(t) \end{aligned}$$

由文 [20] 知 $F_1(t)$ 是均方概周期随机过程. 以下证明 $F_2(t) \in SMC_0$.

应用 Holder 不等式、Fubini 定理, 得到:

$$\begin{aligned} E \|F_2(t)\|^2 &= E \left\| \int_{-\infty}^t T(t-s) \varphi(s) ds \right\|^2 \leq \\ &E \left\{ \int_{-\infty}^t \|T(t-s)\|^2 ds \int_{-\infty}^t \|\varphi(s)\|^2 ds \right\} \leq \\ &\int_{-\infty}^t \|T(t-s)\|^2 ds \left\{ \int_{-\infty}^t E \|\varphi(s)\|^2 ds \right\} \quad (4) \end{aligned}$$

因为 $\varphi \in SMC_0$, 所以对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $M > 0$, 当 $t \in R \setminus [-M, M]$, 即 $|t| > M$ 时有 $E \|\varphi(t)\|^2 < \varepsilon$ 成立.

由 $\|T(t)\| \leq Me^{-\delta t}$ 得 $\|T(t)\| \leq Me^{-\delta t} \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$. 因此对于上述的 ε , 存在 $M' > 0$, 当 $t > M'$ 时有 $\|T(t)\| \leq \varepsilon$.

令 $N = M + M'$

1) 当 $t < -N$ 时, 式(4)可化为

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^t \|T(t-s)\|^2 ds \left\{ \int_{-\infty}^t E \|\varphi(s)\|^2 ds \right\} \leq \\ &\frac{M^2}{2\delta} \int_{-\infty}^t E \|\varphi(s)\|^2 ds < \frac{M^2}{2\delta} \varepsilon \end{aligned}$$

由 ε 的任意性可知: $\lim_{t \rightarrow \infty} E \|F_2(t)\|^2 = 0$.

2) 当 $t > N$ 时, 式(4)可化为

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^t \|T(t-s)\|^2 ds \left\{ \int_{-\infty}^t E \|\varphi(s)\|^2 ds \right\} \leq \\ &\int_{-\infty}^{-M} \|T(t-s)\|^2 ds \left\{ \int_{-\infty}^{-M} E \|\varphi(s)\|^2 ds \right\} + \\ &\int_{-M}^M \|T(t-s)\|^2 ds \left\{ \int_{-M}^M E \|\varphi(s)\|^2 ds \right\} + \\ &\int_M^{\infty} \|T(t-s)\|^2 ds \left\{ \int_M^{\infty} E \|\varphi(s)\|^2 ds \right\} = \end{aligned}$$

$$I_1 + I_2 + I_3$$

易知 $I_1 < \varepsilon$ 成立, 事实上 I_1 的积分区间与式 (1) 中的积分区间类似, 两者均可保证 $E \|\varphi(t)\|^2 < \varepsilon$ 条件成立, 故易知 $I_1 < \varepsilon$.

对于 I_2 , 由于 $t > N = M + M'$, $-M < s < M$, 则由此可知 $t - s > M'$ 成立, 得到 $\|T(t - s)\| < \varepsilon$ 成立, 由此可知:

$$I_2 = \int_{-M}^M \|T(t - s)\|^2 ds \left\{ \int_{-M}^M E \|\varphi(s)\|^2 ds \right\} < \varepsilon^2 \int_{-M}^M E \|\varphi(s)\|^2 ds$$

因为 $\|\varphi(s)\|$ 是有界的, 故而 $\int_{-M}^M E \|\varphi(s)\|^2 ds$ 有界, 由此得到 $I_2 < \varepsilon$ 成立.

I_3 的积分区间完全在 $R \setminus [-M, M]$ 上, 显然 $E \|\varphi(t)\|^2 < \varepsilon$ 的, 故有: $I_3 < \varepsilon$.

综合 I_1, I_2, I_3 , 根据 ε 的任意性可知: $\lim_{t \rightarrow \infty} E \|F_2(t)\|^2 =$

0. 由以上 1)、2) 可知 $F_2 \in SMC_0(R, L^2(\Omega, H))$.

由此得到 $F(t) \in AAP(R, L^2(\Omega, H))$, 根据定理 2 知, 式 (3) 中 $(S_f x)(t)$ 分量是均方渐近概周期的, 即 $(S_f x)(t) \in AAP(R \times L^2(\Omega, H), L^2(\Omega, H))$.

其次, 给出 $(S_g x)(t)$ 是均方渐近概周期过程的证明, 只需证:

$$G(t) = \int_{-\infty}^t T(t-s) g(s) dW(s)$$

是均方渐近概周期的. 由 g 是均方渐近概周期过程, 可令 $g = g_1 + \varphi_1$, g_1, φ_1 分别是 g 的概周期分量和 SMC_0 分量. 从而可得到:

$$G(t) = \int_{-\infty}^t T(t-s) g_1(s) dW(s) + \int_{-\infty}^t T(t-s) \varphi_1(s) dW(s) = G_1(t) + G_2(t)$$

文 [20] 中已证明 $G_1(t)$ 是概周期随机过程, 因此仅需证明 $G_2(t) \in SMC_0$ 即可.

$$E \|G_2(t)\|^2 = E \left\| \int_{-\infty}^t T(t-s) \varphi_1(s) dW(s) \right\|^2 \leq E \left\{ \int_{-\infty}^t \|T(t-s)\|^2 ds \int_{-\infty}^t \|\varphi_1(s)\|^2 ds \right\} \leq \int_{-\infty}^t \|T(t-s)\|^2 ds \left\{ \int_{-\infty}^t E \|\varphi_1(s)\|^2 ds \right\}$$

类似证明 $F_2(t)$ 是 SMC_0 分量的过程, 易知 $\lim_{t \rightarrow \infty} E \|G_2(t)\|^2 = 0$, 因此有 $G(t) \in AAP(R, L^2(\Omega, H))$. 根据定理 2 知 $(S_g x)(t)$ 是均方渐近概周期随机过程.

综合上述 $(S_f x)(t), (S_g x)(t)$ 的证明, 得到式 (3) 定义的 $x(t)$ 是均方渐近概周期的, 即方程 (1) 存在均方渐近概周期解.

最后证明方程 (1) 具有唯一的均方渐近概周期解.

令 $y, z \in AAP(R, L^2(\Omega, H))$, 定义两个映射:

$$\begin{aligned} \Pi Y(t) &= \int_{-\infty}^t T(t-s) f(s, y(s)) ds + \int_{-\infty}^t T(t-s) g(s, y(s)) dW(s) = \\ &= (S_f y)(t) + (S_g y)(t) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \Pi Z(t) &= \int_{-\infty}^t T(t-s) f(s, z(s)) ds + \int_{-\infty}^t T(t-s) g(s, z(s)) dW(s) = \\ &= (S_f z)(t) + (S_g z)(t) \end{aligned} \quad (6)$$

通过 Holder 不等式, Fubini 定理和假设 (H1), 得到:

$$\begin{aligned} E \|(S_f y)(t) - (S_f z)(t)\|^2 &= E \left\| \int_{-\infty}^t T(t-s) [f(s, y(s)) - f(s, z(s))] ds \right\|^2 \leq \\ E \left\{ \int_{-\infty}^t \|T(t-s)\|^2 ds \int_{-\infty}^t \|f(s, y(s)) - f(s, z(s))\|^2 ds \right\} &\leq \left(\int_{-\infty}^t [Me^{-\delta(t-s)}]^2 ds \right) \times \\ \int_{-\infty}^t E \|f(s, y(s)) - f(s, z(s))\|^2 ds &\leq \frac{M^2}{2\delta} K_f \sup_{t \in R} E \|y - z\|^2 \end{aligned} \quad (7)$$

根据上述证明过程和假设 (H2) 有:

$$\begin{aligned} E \|(S_g y)(t) - (S_g z)(t)\|^2 &= E \left\| \int_{-\infty}^t g(t-s) [g(s, y(s)) - g(s, z(s))] dW(s) \right\|^2 \leq \\ E \left\{ \int_{-\infty}^t \|T(t-s)\|^2 ds \int_{-\infty}^t \|g(s, y(s)) - g(s, z(s))\|^2 ds \right\} &\leq \left(\int_{-\infty}^t [Me^{-\delta(t-s)}]^2 ds \right) \times \\ \int_{-\infty}^t E \|g(s, y(s)) - g(s, z(s))\|^2 ds &\leq \frac{M^2}{2\delta} K_g \sup_{t \in R} E \|y - z\|^2 \end{aligned} \quad (8)$$

利用式 (7)、(8) 和不等式 $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$

得到:

$$\begin{aligned} E \|\Pi Y(t) - \Pi Z(t)\|^2 &= E \|(S_f y)(t) + (S_g y)(t) - (S_f z)(t) - (S_g z)(t)\|^2 \leq \\ 2E \|(S_f y)(t) - (S_f z)(t)\|^2 + 2E \|(S_g y)(t) - (S_g z)(t)\|^2 &\leq \frac{M^2}{\delta} K_f \sup_{t \in R} E \|y - z\|^2 + \end{aligned}$$

$$\frac{M^2}{\delta} K_g \sup_{t \in R} E \| y - z \|^2 =$$

$$\frac{M^2}{\delta} (K_f + K_g) \sup_{t \in R} E \| y - z \|^2$$

由 (H3) 可知: $\frac{M^2 (K_f + K_g)}{\delta} < 1$, 结合式 (2) 的均

方渐近概周期性知, Π 是从 $AAP(R, L^2(\Omega, H_1))$ 到自身的一个压缩映射, 根据 Banach 不动点原理可知: Π 有唯一的不动点 $x(t) \in AAP(R, L^2(\Omega, H))$, 且满足方程 (1).

综上所述, 方程 (1) 存在唯一的均方渐近概周期解.

参 考 文 献:

- [1] BOHR H. Zur Theorie Der Fastperiodischen [J]. Acta Math, 1925, 45: 19 - 127.
- [2] BOHR. H. Almost Periodic Functions [M]. Chelsea: New York, 1951.
- [3] BOCHNER H. Abstrakte Fastperiodische Funktionen [J]. Acta Math, 1933, 61(1): 149 - 184.
- [4] BOCHNER H, NEUMANN J V. Almost Periodic Functions in Groups [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1935, 37(1): 21 - 50.
- [5] NEUMANN J V. Almost periodic Functions in a Group [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1934, 36(3): 445 - 492.
- [6] ZHANG C, YAO H. Converse Problems of Fourier Expansion and Their Applications [J]. Nonlinear Analysis, 2004, 56(5): 761 - 779.
- [7] 姚慧丽, 颜荣. 一类差分方程的遥远概周期序列解的唯一存在性 [J]. 哈尔滨理工大学学报, 2011, 16(5): 85 - 88.
- [8] 姚慧丽, 李雪鑫, 付作嫻. 一类中立型微分方程的渐近概周期温和解 [J]. 哈尔滨理工大学学报, 2012, 17(6): 65 - 67.
- [9] 姚慧丽, 宋晓秋, 李兴华. 一类半线性微分方程的渐近概自守温和解 [J]. 哈尔滨理工大学学报, 2012, 17(1): 1 - 3.
- [10] HONG Jialin, RONG Yuan. Pseudo Almost Periodic Solutions of A Singularly Perturbed Differential Equation with Piecewise Constant Argument [J]. Acta Math, 2007, 23(3): 423 - 438.
- [11] SLUTSKY. Sur les Fonctions Aleatoires Presque Periodiques et Sur la Decomposition des Fonctions Aleatoires [J]. Actualites Sceintifiques et Industrielles, 1938, 738: 33 - 35.
- [12] BEZANDRY P H, DIAGANA T. Existence of Almost Periodic Solutions to Some Stochastic Differential Equations [J]. Applicable Analysis. 2007, 86(7): 819 - 892.
- [13] BEZANDRY P H, DIAGANA T. Square-mean Almost Periodic Solutions Non-autonomous Stochastic Differential Equations [J]. Electronic Journal of Differential Equations, 2007, 2007(117): 1 - 10.
- [14] BEZANDRY P H. Existence of Quadratic-mean Almost Periodic Solutions to Some Stochastic Hyperbolic Differential Equations [J]. Electron Journal Differential Equations, 2009(111): 1 - 14.
- [15] BEZANDRY P H, DIAGANA, T. Existence of Square-mean Almost Periodic Solutions to Some Stochastic Hyperbolic Differential Equations with Infinite Delay [J]. Communications in Mathematical Analysis, 2010, 8(2): 1 - 22.
- [16] DIAGANA T. Existence of Pseudo Almost Periodic Solutions to Some Classes of Partial Hyperbolic Evolution Equations [J]. E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ., 2007, 3: 1 - 12.
- [17] CHERIF, FAROUK. Quadratic-mean Pseudo Almost Periodic Solutions to Some Stochastic Differential Equation in a Hilbert Space [J]. J Appl Math Comput. 2012, 40: 427 - 443.
- [18] CHERIF. FAROUK. A Various Types of Almost Periodic Functions on Banach Spaces [J]. Int. Math. Forum, 2011, 19(6): 921 - 952.
- [19] BEZANDRY P H, DIAGANA, T. Almost Periodic Stochastic Processes [M]. Springer, 2010: 25 - 35.
- [20] LIU W G, LUO J W. Existence of Almost Periodic Solutions to Some Semi-linear Stochastic Integro-differential Equations [J]. Ann of Diff Eqs, 2013, 29(1): 34 - 43.

(编辑: 温泽宇)