

一类具有非线性接触率的 SEIR 传染病模型

李冬梅, 徐亚静, 韩春晶

(哈尔滨理工大学 应用科学学院, 黑龙江 哈尔滨 150080)

摘要: 考虑了染病者的非线性接触率及潜伏者存在因素的影响, 建立了一类 SEIR 传染病模型. 利用 Lasalle 不变性原理, 自治收敛定理证明了无病平衡点及地方病平衡点的全局渐近稳定性, 给出了模型分支存在充分条件, 并通过数值模拟验证了结论的正确性.

关键词: 非线性接触率; 分支; 全局稳定

DOI: 10.15938/j.jhust.2015.02.022

中图分类号: O175 文献标志码: A 文章编号: 1007-2683(2015)02-0115-06

A Class of SEIR Epidemic Model with Nonlinear Contact Rate

LI Dong-mei, XU Ya-jing, HAN Chun-jing

(School of Applied Sciences, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: Considering the infection of the nonlinear contact rate and latent period, a class of SEIR epidemic model is studied. Using the theory of Lasalle and autonomous convergence theorem, the global stability of the disease-free equilibrium and the endemic equilibrium are proved. The sufficient conditions of bifurcation are obtained, and the accuracy of the model's conclusion are proved by numerical simulation.

Keywords: nonlinear contact rate; bifurcation; global stability

0 引言

传染病一直与人类的健康和社会发展息息相关, 应用传染病动力学模型研究疾病传播规律一直是人们关注课题. 传染病模型是根据发病机理建立起来的诸如 SIR, SEIR, SEIRS 等模型, 其中接触率多被描述成双线性接触率 βSI 形式^[1-4]. 随着对疾病传播方式的深入了解及流行病学者的统计分析, 疾病传播方式采用非线性接触率的研究疾病变化规律更符合实际问题, 模型的结果更有一般性. 根据传染特征不同非线性接触率有多种形式, 如

$\beta S^p I^q$, 饱和发生率. CAPASSO 等提出了某些烈性疾病(如霍乱, 狂犬病)的发生率与生存环境等因素有关, 用非线性接触率描述疾病传播过程更符合实际的^[5]. 文[6-9]研究了具有非线性接触率的传染病模型的全局动力学性质, 给出无病平衡点与地方病平衡点全局稳定性充分条件, 讨论了模型的分支问题. 许多传染病具有潜伏期(如乙肝, 肺结核), 在此期间感染者症状不明显, 不能忽略这类人群对疾病的传播效应, 文[10-11]研究带有非线性接触率的 SEIS, SEIV 传染病模型的稳定性问题, 通过分析无病平衡点与地方病平衡点的全局渐近稳定性的充分条件, 给出了易感者及染病者最终变化趋势. 本文兼顾

收稿日期: 2014-05-25

基金项目: 黑龙江省自然科学基金(A200502); 黑龙江省教育厅科学技术研究项目(12521099).

作者简介: 李冬梅(1962—), 女, 教授, 硕士研究生导师, E-mail: dmli_2013@126.com;

徐亚静(1990—), 女, 硕士研究生;

韩春晶(1986—), 女, 硕士研究生.

了两方面的特征,在已有的具有双线性发生率 SIR 模型基础上,建立了具有非线性接触率 $\beta SI(1+\alpha I)$ 和潜伏期的 SEIR 传染病模型,研究模型的动力学性质.

1 模型的建立

KOROBENIKOV 研究了带有非线性发生率 $f(S, I)$ 的 SIR, SIRS 传染病模型,没有考虑潜伏者人群对疾病的影响,给出模型基本再生数和全局渐近稳定的条件.在此模型基础上,考虑人口为常数输入,有因病死亡因素,潜伏者存在,非线性接触率具有形式 $\beta SI(1+\alpha I)$ 的,建立了如下 SEIR 传染病模型

$$\left\{ \begin{array}{l} S'(t) = \Lambda - \beta SI(1+\alpha I) - \mu S, \\ E'(t) = \beta SI(1+\alpha I) - (\theta + \mu) E, \\ I'(t) = \theta E - (\delta + \mu + d) I, \\ R'(t) = \delta I - \mu R, \end{array} \right. \quad (1)$$

其中: $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$, $R(t)$ 分别表示 t 时刻的易感者、潜伏者、染病者、康复者; Λ 表示人口的输入率; β 表示接触率; μ 表示自然死亡率; θ 表示从潜伏者到染病者的染病率 ($1/\theta$ 表示潜伏期); δ 表示从染病者到康复者的治愈率; d 表示因病死亡率; 并且假设 $\Lambda, \alpha, \beta, \mu, \theta, \delta, d$ 都是正常数. $N = S + E + I + R$ 表示总人口数.

由生态意义模型 (1) 将在 R_+^4 中研究. 将模型 (1) 4 个方程相加得

$$N' = \Lambda - \mu N - dI \leq \Lambda - \mu N,$$

则得到

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} N \leq \frac{\Lambda}{\mu}.$$

由于模型 (1) 的前 3 个方程与 $R(t)$ 无关,因此可以考虑如下模型

$$\left\{ \begin{array}{l} S'(t) = \Lambda - \beta SI(1+\alpha I) - \mu S = f_1, \\ E'(t) = \beta SI(1+\alpha I) - (\theta + \mu) E = f_2, \\ I'(t) = \theta E - (\delta + \mu + d) I = f_3, \end{array} \right. \quad (2)$$

模型 (2) 的可行域为

$$D = \left\{ (S, E, I) \in R_+^3 : 0 \leq S + E + I \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}$$

是模型 (2) 的不变集.

2 主要结果

2.1 平衡点存在性

模型 (2) 的平衡点满足下列方程

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = \Lambda - \beta SI(1+\alpha I) - \mu S = 0, \\ f_2 = \beta SI(1+\alpha I) - (\theta + \mu) E = 0, \\ f_3 = \theta E - (\delta + \mu + d) I = 0, \end{array} \right. \quad (3)$$

由式 (3) 的第 3 个方程得 $E = \frac{(\delta + \mu + d)}{\theta} I$, 将其

代入式 (3) 的第 2 个方程得

$$I \left[\beta S(1+\alpha I) - \frac{(\theta + \mu)(\delta + \mu + d)}{\theta} \right] = 0. \quad (4)$$

当 $I = 0$ 时, 由式 (3) 解得无病平衡点

$$P_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right).$$

当 $I \neq 0$ 时, 令 $R_0 = \frac{\Lambda \beta \theta}{\mu(\theta + \mu)(\delta + \mu + d)}$, 由式

$$(4) \text{ 得 } S = \frac{(\theta + \mu)(\delta + \mu + d)}{\beta \theta(1+\alpha I)},$$

将其代入式 (3) 的第一个方程, 解得如下关于 I 的一元二次方程

$$-\frac{\alpha \beta}{\mu} I^2 + \alpha \left(R_0 - \frac{\beta}{\alpha \mu} \right) I + (R_0 - 1) = 0, \quad (5)$$

当 $R_0 > 1$ 时, 式 (5) 存在唯一正根

$$I^* = \frac{\mu}{\alpha \beta} \left[\alpha \left(R_0 - \frac{\beta}{\alpha \mu} \right) + \sqrt{\Delta} \right], \quad (6)$$

其中 $\Delta = \left(R_0 - \frac{\beta}{\alpha \mu} \right)^2 + \frac{\alpha \beta}{\mu} (R_0 - 1) > 0$.

进而得到 $E^* = \frac{(\delta + \mu + d)}{\theta} I^*$, $S^* =$

$\frac{(\theta + \mu)(\delta + \mu + d)}{\beta \theta(1+\alpha I^*)}$, 即模型 (2) 存在地方病平衡点

$P_* = (S^*, E^*, I^*)$, 则有如下定理 1.

定理 1 当 $R_0 \leq 1$ 时, 模型 (2) 的无病平衡点

$P_0 \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right)$, $R_0 > 1$ 模型 (2) 存在地方病平衡点 P_* .

2.2 无病平衡点稳定性分析

定理 2 当 $R_0 < 1$ 时, 模型 (2) 的 P_0 是局部稳定的; 当 $R_0 > 1$ 时, P_0 是不稳定的.

证明: 模型 (2) 在 P_0 点处的雅可比矩阵如下

$$J(P_0, \beta) = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & -\beta \frac{\Lambda}{\mu} \\ 0 & -(\theta + \mu) & \beta \frac{\Lambda}{\mu} \\ 0 & \theta & -(\delta + \mu + d) \end{bmatrix},$$

矩阵 $J(P_0, \beta)$ 对应的特征方程为

$$(-\mu - \lambda) [\lambda^2 + (\theta + 2\mu + \sigma + d)\lambda + (\theta + \mu)(\sigma + \mu + d)(1 - R_0)] = 0, \quad (7)$$

由一元二次方程根的性质知, 当 $R_0 < 1$ 时, 式

(7) 特征根均为负,则 P_0 是局部稳定的. 当 $R_0 > 1$ 时,式(7)有一个正特征根,故 P_0 是不稳定的. 证毕.

定理3 当 $R_0 \left(1 + \frac{\alpha\Lambda}{\mu}\right) = 1$ 时,无病平衡点 P_0 是全局渐近稳定的.

证明: 设 $L = \theta E + (\theta + \mu)I$, 将 L 沿模型(2)求导得

$$\begin{aligned} L' &= [\theta\beta S(1 + \alpha I) - (\theta + \mu)(\delta + \mu + d)]I \leq \\ & \left[\theta\beta \frac{\Lambda}{\mu} \left(1 + \frac{\alpha\Lambda}{\mu}\right) - (\theta + \mu)(\delta + \mu + d) \right]I = \\ & (\theta + \mu)(\delta + \mu + d) \left[R_0 \left(1 + \frac{\alpha\Lambda}{\mu}\right) - 1 \right]I, \end{aligned}$$

所以当 $R_0 \left(1 + \frac{\alpha\Lambda}{\mu}\right) \leq 1$ 时, $L' \leq 0$; 若 $I = 0$, 有 $L' = 0$;

若 $R_0 \left(1 + \frac{\alpha\Lambda}{\mu}\right) = 1$, 有 $R_0 < 1$, 即 $I = 0$, 因此, 由 La-salle 不变性原理知, P_0 点是全局渐近稳定. 证毕.

2.3 分支存在分析

微分方程

$$x' = f(x, \beta), \quad (8)$$

其中 $f: R^n \times R \rightarrow R^n$, $f \in C^2(R^n \times R)$, $f(0, \beta) = 0$, $A = D_x f(0, \beta)$.

引理1 [2] 若方程(8)的雅可比矩阵有一个零特征根,其余特征根都有负实部且满足下列条件,则

1) 当 $a > 0, b > 0$ 时,若 $\beta < 0$ 并且 $|\beta| \ll 1, x = 0$ 是方程(8)局部渐近稳定平衡点; 若 $0 < \beta \ll 1, x = 0$ 是方程(8)不稳定平衡点.

2) 当 $a < 0, b < 0$ 时,若 $\beta < 0$ 并且 $|\beta| \ll 1, x = 0$ 是方程(8)不稳定平衡点; 若 $0 < \beta \ll 1, x = 0$ 是方程(8)局部渐近稳定平衡点.

3) 当 $a > 0, b < 0$ 时,若 $\beta < 0$ 并且 $|\beta| \ll 1, x = 0$ 是方程(8)不稳定平衡点; 若 $0 < \beta \ll 1, x = 0$ 是方程(8)局部渐近稳定平衡点.

4) 当 $a < 0, b > 0$ 时,若 $\beta < 0$ 并且 $|\beta| \ll 1, x = 0$ 是方程(8)局部渐近稳定平衡点; 若 $0 < \beta \ll 1, x = 0$ 是方程(8)不稳定平衡点.

其中

$$\begin{aligned} a &= \sum_{k, i, j=1}^n v_k w_i w_j \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(0, \beta), \\ b &= \sum_{k, i=1}^n v_k w_i \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial \beta}(0, \beta). \end{aligned}$$

其中: f_k 表示方程(8)中第 k 个函数, $W = (w_1, w_2, w_3)^T$, $V = (v_1, v_2, v_3)$ 分别为矩阵 A 的零特征根对应的右特征向量和左特征向量,那么方程(8)在平衡

点 $x = 0$ 处的动力系统性质由 a, b 决定.

当 $a < 0, b > 0$ 时,在 $x = 0$ 处出现的分支称为前向分支; 当 $a > 0, b > 0$ 时,在 $x = 0$ 处出现的分支称为后向分支.

定理4 当 $\mu > \beta^*$ 时,模型(2)在 P_0 处产生后向分支; 当 $\mu < \beta^*$ 时,模型(2)在 P_0 处产生前向分支. 其中 $\beta^* = \frac{\mu(\theta + \mu)(\delta + \mu + d)}{\Lambda\theta}$.

证明: 当 $R_0 = 1$ 时,有 $\beta^* = \frac{\mu(\theta + \mu)(\delta + \mu + d)}{\Lambda\theta}$.

由式(7)可解得模型(2)在 P_0 点处雅可比矩阵 $J(P_0, \beta^*)$ 对应特征方程的特征值为

$$\lambda_1 = -\mu, \lambda_2 = -\theta - \delta - 2\mu - d, \lambda_3 = 0.$$

设 $W = (w_1, w_2, w_3)^T$ 是矩阵 $J(P_0, \beta^*)$ 的右特征向量,满足 $J(P_0, \beta^*)W = 0$, 即有

$$\begin{bmatrix} -\mu & 0 & -\frac{(\theta + \mu)(\delta + \mu + d)}{\theta} \\ 0 & -(\theta + \mu) & \frac{(\theta + \mu)(\delta + \mu + d)}{\theta} \\ 0 & \theta & -(\delta + \mu + d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = 0$$

解得

$$W = \left[-\frac{(\theta + \mu)}{\mu}, 1, \frac{\theta}{\delta + \mu + d} \right]^T. \quad (9)$$

设 $V = [v_1, v_2, v_3]$ 是矩阵 $J(P_0, \beta^*)$ 的左特征向量,满足 $VJ(P_0, \beta^*) = 0$, 同理可解得

$$V = \left[0, \frac{\delta + \mu + d}{\delta + \theta + 2\mu + d}, \frac{(\theta + \mu)(\delta + \mu + d)}{\theta(\delta + \theta + 2\mu + d)} \right]. \quad (10)$$

由式(3)可计算模型(2)在无病平衡点 P_0 处的二次偏导数

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 f_1}{\partial S \partial I} &= -\beta^*; \frac{\partial^2 f_1}{\partial I^2} = -2\alpha\beta^* \frac{\Lambda}{\mu}; \frac{\partial^2 f_2}{\partial S \partial I} = \beta^*, \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial I^2} &= 2\alpha\beta^* \frac{\Lambda}{\mu}; \frac{\partial^2 f_2}{\partial I \partial \beta^*} = -\frac{\Lambda}{\mu}; \frac{\partial^2 f_2}{\partial I \partial \beta^*} = \frac{\Lambda}{\mu}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

其它的二次偏导数均为零.

由式(9)、式(10)及式(11)可以计算

$$\begin{aligned} a &= 2v_1 w_1 w_3 \frac{\partial^2 f_1}{\partial S \partial I} + v_1 w_3^2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial I^2} + 2v_2 w_1 w_3 \frac{\partial^2 f_2}{\partial S \partial I} + v_2 w_3^2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial I^2} = \\ & \frac{2(\theta + \mu)}{\mu(\theta + \delta + 2\mu + d)} \left(\frac{\mu}{\beta^*} - 1 \right), \\ b &= 2v_1 w_3 \frac{\partial^2 f_1}{\partial I \partial \beta^*}(P_0, \beta^*) + 2v_2 w_3 \frac{\partial^2 f_2}{\partial I \partial \beta^*}(P_0, \beta^*) = \\ & \frac{2\Lambda(\delta + \mu + d)}{\mu(\theta + \delta + 2\mu + d)}. \end{aligned}$$

显然 b 恒为正值; 由引理 1 可知, 当 $\mu < \beta^*$ 时, 有 $a < 0$, 在 P_0 处产生前向分支; 当 $\mu > \beta^*$ 时, 有 $a > 0$, 在 P_0 处产生后向分支. 证毕.

2.4 地方病平衡点全局稳定性的分析

考虑微分方程

$$x' = f(x). \quad (12)$$

其中 $f \in C^1(D)$, $D \subset R^n$. 设 $x(t, x_0)$ 是方程 (12) 满足条件 x_0 的解.

设 $x \rightarrow H(x)$ 是一个 $\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}$ 矩阵函数, 且对 $x \in D$ 它是 C^1 函数. 假设 $H^{-1}(x)$ 存在且在 $x \in K$ 上是连续的, K 是一个紧的吸引集. 令

$$A = H_f H^{-1} + H J^{\otimes} H^{-1}, \mu(A) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\|I + hA\| - 1}{h}$$

其中 H_f 是把矩阵 H 的每一个元素 H_{ij} 沿 f 的方向导

数 $\frac{\partial H_{ij}}{\partial x} f = \frac{dH_{ij}}{dt} \Big|_{(9)}$ 取代得到的矩阵. $\mu(A)$ 是矩阵 Lozinskiĭ 测度.

定义 $q = \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{x_0 \in K} \frac{1}{t} \int_0^t \mu(A(x(s, x_0))) ds$.

引理 2 [3] 若 D 是单连通区域, 且有如下假设

(H_1) 方程 (12) 在 D 内存在一个紧吸引集 $K \subset D$;

(H_2) 方程 (12) 在 D 内存在唯一正平衡点 $x^* \in D$.

当 $q < 0$ 时, 则方程 (12) 的唯一平衡点 x^* 在 D 内是全局渐近稳定的.

定理 5 当 $R_0 > 1$ 时, 模型 (2) 是一致持久的.

证明: 由于 D 是模型 (2) 的正向不变子集. 并且在 D 的边界 ∂D 上总存在唯一的无病平衡点 $P_0 (\frac{A}{\mu}, 0, 0)$. 当 $R_0 > 1$ 时, 由定理 2 知, P_0 是不稳定的, P_0 成为 ∂D 上的唯一最大的不变集 $\{N_\alpha\}_{\alpha \in A} = \{P_0\}$, 从而

$$W^+(N_\alpha) \cap \{D: x \in D, d(x, \partial D) \leq \varepsilon\} \cap \dot{D} = \emptyset$$

满足文 [3] 引理 3.6.3 的全部条件, 故模型 (2) 是一致持久的. 证毕.

定理 6 当 $R_0 > 1$ 时, 模型 (2) 的地方病平衡点 P_* 在 D 的内部是全局渐近稳定的充分条件是 $\theta <$

$$\mu, \beta \frac{A}{\mu} \left(1 + \frac{2\alpha A}{\mu}\right) + \delta + d \leq \beta c(1 + \alpha c) + \mu + \theta.$$

证明: 当 $R_0 > 1$ 时, 由定理 1 及定理 5 知, 模型 (2) 存在唯一的地方病平衡点 P_* 及一个紧的吸引集 $K \subset \dot{D}$, 因此满足引理 2 中的假设 (H_1), (H_2).

模型 (2) 的雅可比矩阵为

$$J(P, \beta) =$$

$$\begin{pmatrix} -\mu - \beta I(1 + \alpha I) & 0 & -\beta S(1 + 2\alpha I) \\ \beta I(1 + \alpha I) & -(\theta + \mu) & \beta S(1 + 2\alpha I) \\ 0 & \theta & -(\delta + \mu + d) \end{pmatrix},$$

其中 $P = (S, E, I)$.

矩阵 $J(P, \beta)$ 的二次复合矩阵为

$$J^{\otimes} =$$

$$\begin{pmatrix} -\mu - \beta I(1 + \alpha I) - (\theta + \mu) & \beta S(1 + 2\alpha I) & \beta S(1 + 2\alpha I) \\ \theta & -\mu - \beta I(1 + \alpha I) - (\delta + \mu + d) & 0 \\ 0 & \beta I(1 + \alpha I) & -(\theta + \mu) - (\delta + \mu + d) \end{pmatrix}$$

选取下列函数

$$H(P) = H(S, E, I) = \text{diag}\left\{\frac{E}{I}, \frac{E}{I}, \frac{E}{I}\right\},$$

$$H_f H^{-1} = \text{diag}\left\{\frac{E'}{E} - \frac{I'}{I}, \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I}, \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I}\right\},$$

$$H J^{\otimes} H^{-1} = J^{\otimes},$$

有

$$A = H_f H^{-1} + H J^{\otimes} H^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

其中

$$A_{11} = \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} - \beta I(1 + \alpha I) - \theta - 2\mu,$$

$$A_{12} = [\beta I(1 + 2\alpha I), \beta S(1 + 2\alpha I)], A_{21} = [\theta, 0]^T,$$

$$A_{22} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} - \mu - \beta I(1 + \alpha I) - (\delta + \mu + d) & 0 \\ \beta I(1 + \alpha I) & \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} - (\theta + \mu) - (\delta + \mu + d) \end{pmatrix},$$

令 (u, v, w) 代表 R^3 中的向量, 其范数定义为

$$\|(u, v, w)\| = \max\{|u|, |v|, |w|\}.$$

利用 [3] 中的估值方法可计算得 $\mu(A)$

$$\mu(A) \leq \sup\{g_1, g_2\}, \quad (13)$$

其中 $g_1 = \mu_1(A_{11}) + |A_{12}|$, $g_2 = \mu_1(A_{22}) + |A_{21}|$.

$|A_{12}|$ 和 $|A_{21}|$ 是相应于 l_1 向量范数的矩阵范数, μ_1 是相应于 l_1 范数的 Lozinskiĭ 测度, 有

$$\mu_1(A_{11}) = \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} - \beta I(1 + \alpha I) - \theta - 2\mu,$$

$$|A_{12}| = \beta S(1 + 2\alpha I), |A_{21}| = \theta.$$

下面计算 $\mu_1(A_{22})$. 把 A_{22} 的每一列非对角线元素取绝对值, 然后加到相应列的对角线元素上得

$$A'_{22} = \begin{pmatrix} \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} - 2\mu - \delta - d & 0 \\ \beta I(1 + \alpha I) & \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} - 2\mu - \delta - d - \theta \end{pmatrix},$$

取 A'_{22} 的两个对角线元素的最大值得 $\mu(A_{22})$, 则

$$\mu_1(A_{22}) = \max \left\{ \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} - 2\mu - \delta - d, \right. \\ \left. \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} - 2\mu - \delta - d - \theta \right\} = \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} - 2\mu - \delta - d,$$

从而由式(13)可得

$$g_1 = \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} - \beta I(1 + \alpha I) - \theta - 2\mu + \beta S(1 + 2\alpha I), \quad (14)$$

$$g_2 = \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} - 2\mu - \delta - d + \theta. \quad (15)$$

由模型(2)得

$$\frac{I'}{I} = \frac{E}{I} \theta - (\delta + \mu + d). \quad (16)$$

由定理5及式(13)、式(14)、式(15)可知

$$g_1 \leq \frac{E'}{E} - \mu - \theta - \beta c(1 + \alpha c) + \delta + d + \beta \frac{\Lambda}{\mu} \left(1 + \frac{2\alpha\Lambda}{\mu} \right), \quad (17)$$

$$g_2 = \frac{E'}{E} - \frac{E}{I} \theta + (\delta + \mu + d) - 2\mu - \delta - d + \theta \leq \frac{E'}{E} - \mu + \theta. \quad (18)$$

由式(13)得

$$\mu(A) \leq \frac{E'}{E} - \omega, \quad (19)$$

其中

$$\omega = \min \{ \mu - \theta, \theta + \mu + \beta c(1 + \alpha c) - \delta - d - \beta \frac{\Lambda}{\mu} \left(1 + \frac{2\alpha\Lambda}{\mu} \right) \}.$$

则模型(2)的解 $(S(t), E(t), I(t))$ 对于初值 $(S(0), E(0), I(0)) \in D$ 有

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mu(B) ds \leq \frac{1}{t} \ln \frac{E(t)}{E(0)} - \omega,$$

当 $\theta < \mu$ 和 $\beta \frac{\Lambda}{\mu} \left(1 + \frac{2\alpha\Lambda}{\mu} \right) + \delta + d \leq \beta c(1 + \alpha c) + \mu + \theta$ 时,则

$$q = \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{x_0 \in K} \frac{1}{t} \int_0^t \mu(B(x(s, x_0))) ds \leq -\omega \leq 0,$$

由引理2知,模型(2)的唯一地方病平衡点 P_* 在 D 内是全局稳定点. 证毕.

3 数值模拟

取模型(1)中的参数为 $\beta = 0.18, \mu = 0.35, d = 0.45, \theta = 0.01, \delta = 0.2, \Lambda = 0.5, \alpha = 0.1$. 初值为 $S = 2, E = 3, I = 1, R = 2$ 时,可计算出 $R_0 = 0.06 < 1, R_0 \left(1 + \alpha \frac{\Lambda}{\mu} \right) = 0.25 < 1$. 由定理3知,无病平衡点 P_0

$(15.7, 0, 0, 0)$ 是全局稳定的,模拟图见图1.

取模型(1)中的参数为 $\Lambda = 20, \alpha = 10, \mu = 0.1, d = 0.2, \delta = 0.3, \theta = 0.05$,初值为 $S = 0.05, E = 0.02, I = 0.03$,可计算出 $R_0 = 1, \beta^* = 0.9, a = 35996 > 0, b = 36000 > 0$,且有 $\mu > \beta^*$,由定理4知,模型(2)在 $P_0(200, 0, 0)$ 处产生后向分支,模拟图见图2. 取模型(2)中 $\alpha = 100$,其它参数取如图2中的参数, $a = -\frac{32}{9} < 0, b = 320 > 0$,且有 $\mu < \beta^*$,由定理4知,模型(2)在 $P_0(200, 0, 0)$ 处产生前向分支,模拟图见图3. 其中实线表示平衡点 P_* ,虚线表示平衡点 P .

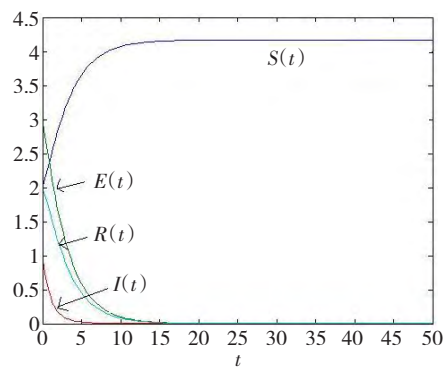


图1 无病平衡点 P_0 的全局稳定性图

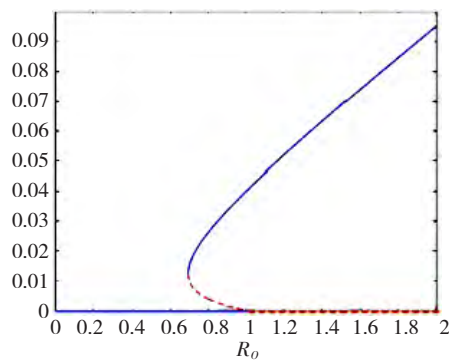


图2 后向分支图

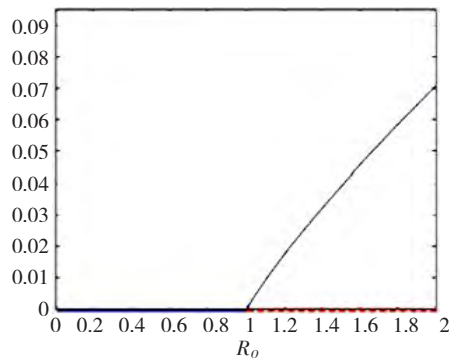


图3 前向分支图

取模型(1)中的参数为 $\Lambda = 0.7, \beta = 1, \alpha = 0.8, \mu = 0.2, d = 0.3, \theta = 0.1, \delta = 0.5$, 初值为 $S = 2, E = 1, I = 3, R = 2$. 计算 $R_0 = 1.3 > 1$, 由定理5知, 模型(1)是持久的, 模拟图见4.

取模型(1)中的参数为 $\Lambda = 1.5, \beta = 1, \alpha = 0.01, \mu = 0.2, d = 0.3, \theta = 0.1, \delta = 0.5$, 初值为 $S = 2, E = 1, I = 3, R = 2$. 计算满足定理6条件 $R_0 = 2.8 > 1$,

$$\theta < \mu, \beta \frac{\Lambda}{\mu} \left(1 + \frac{2\alpha\Lambda}{\mu} \right) + \delta + d < \beta c(1 + \alpha c) + \mu + \theta$$

可知地方病平衡点 $P_* = (9.2, 4.6, 8.3, 7.9)$ 是全局渐近稳定的, 模拟图见图5.

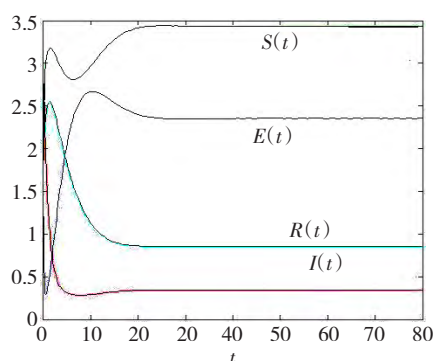


图4 模型(1)的持久性

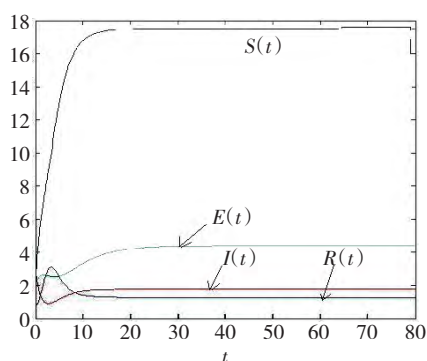


图5 地方病平衡点 P_* 的全局稳定性

参考文献:

- [1] WANG Liancheng. Global Dynamics of a SEIR Model with Varying Total Population Size [J]. Mathematical Biosciences, 1999, 160(2): 191-213.
- [2] WANG Jianjun, ZHANG Jinzhu, JIN Zhen. Analysis of an SIR Model with Bilinear Incidence Rate [J]. Nonlinear Analysis, 2010, 36: 2390-2402.
- [3] ZHANG Tailei, TENG Zhidong. On a Nonautonomous SEIRS Model in Epidemiology [J]. Bulletin of Mathematical Biology, 2007, 69: 2537-2559.
- [4] 杨建雅, 张凤琴. 一类具有垂直传染的 SIR 传染病模型 [J]. 生物数学学报, 2006, 21(3): 341-344.
- [5] CAPASSO V. Mathematical Structures of Epidemic Systems [M]. Berlin: Springer, 1993: 97.
- [6] JIN YU, WANG WENDI, XIAN SHIWU. A SIRS Model with a Nonlinear Incidence Rate [J]. Chaos Solitons and Fractals, 2007, 34: 1482-1497.
- [7] CARCOSA Stillo-chvez, SONG Baojun. Dynamical Models of Tuberculosis and Their Applications [J]. Mathematical Biosciences, 2004, 1(2): 361-404.
- [8] KOROBEINIKOV Andrei. Global Properties of Infectious Disease Model with Nonlinear Incidence [J]. Bulletin of Mathematical Biology, 2007(69): 1871-1886.
- [9] 杨洪, 魏俊杰. 一类带有非线性接触率的 SIR 传染病模型的稳定 [J]. 高校应用数学学报, 2014, 29(1): 11-16.
- [10] 王稳地, 苟清明. 一类具有饱和接触率的 SEIS 模型的稳定性 [J]. 生物数学学报, 2008, 23(2): 265-272.
- [11] ZHOU Xueyong, CUI Jingan. Analysis of Stability and Bifurcation for an SEIV Epidemic Model with Vaccination and Nonlinear Incidence Rate [J]. Nonlinear Dynamics, 2011, 63: 639-653.
- [12] CARCOSA Stillo-chvez, SONG Baojun. Dynamical Models of Tuberculosis and Their Applications [J]. Mathematical Biosciences, 2004, 1(2): 361-404.
- [13] 马之恩. 传染病动力学的数学建模与研究 [M]. 北京: 科学出版社, 2004, 92: 70-83.
- [14] 刘华, 吴承强. 具有非线性传染率的 SEIS 传染病模型的分析 [J]. 福州大学学报: 自然科学版, 2010, 38(6): 803-807.
- [15] 王拉娣. 具有非线性传染率的两类传染病模型的全局分析 [J]. 工程数学学报, 2005, 22(4): 640-644.
- [16] 郭树敏, 李学志, 蔡礼明. 具有非线性传染率的疱疹动力学模型分析 [J]. 数学的实践与认识, 2012, 42(20): 147-151.
- [17] 张丹, 宋燕, 郝晓溪, 等. 一类具有常数输入及饱和传染率的传染病模型 [J]. 渤海大学学报: 自然科学版, 2013, 34(1): 8-11, 84.
- [18] 杨秀香. 一类具有潜伏期和非线性传染率的 SEIR 模型的全局稳定性 [J]. 渭南师范学院学报, 2012, 27(2): 33-36.
- [19] SUN Faguo, LI Haiyun, ZHANG Hong. Global Analysis of a SEIR Epidemic Model with Nonlinear Incidence Rate [J]. Basic Science Journal of Textile Universities, 2012, 25(3): 309-313.
- [20] 郭金生, 祝进业, 唐玉玲. 一类具有非线性传染率的 SEIS 传染病模型的定性分析 [J]. 贵州大学学报: 自然科学版, 2013, 30(5): 4-8.

(编辑: 温泽宇)