

赋 Orlicz 范数的 Musielak-Orlicz 序列空间的 k - β 点

左明霞, 刘红娇

(哈尔滨理工大学 理学院, 黑龙江 哈尔滨 150080)

摘 要: Musielak-Orlicz 空间是经典 Orlicz 空间的推广, 研究了赋 Orlicz 范数的 Musielak-Orlicz 序列空间的 k - β 点的刻画问题. 首先在 Banach 空间中引入了 k - β 点的定义, 然后给出了赋 Orlicz 范数的 Musielak-Orlicz 序列空间中 k - β 点的判别条件, 从而得出了该空间具有局部 k - β 性质的等价条件.

关键词: Musielak-Orlicz 序列空间; Orlicz 范数; k - β 点; 局部 k - β 性质

DOI: 10.15938/j.jhust.2019.01.020

中图分类号: O177.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2019)01-0118-06

On the (k - β) Points of Musielak-Orlicz Sequence Spaces Equipped with the Orlicz Norm

ZUO Ming-xia, LIU Hong-jiao

(School of Applied Sciences, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: Musielak-Orlicz spaces is the generalization of classical Orlicz spaces. In this paper, we investigated the problem of characterization of the (k - β) points in Musielak-Orlicz sequence spaces equipped with the Orlicz norm. Firstly, the definition of (k - β) point is introduced. Afterward a criteria for (k - β) points in Musielak-Orlicz sequence spaces equipped with the Orlicz norm was given, and then we got the equivalent condition for local property (k - β) of these spaces.

Keywords: Musielak-Orlicz sequence spaces; Orlicz norm; (k - β) points; local property (k - β)

1 引言及预备知识

β 点是 Banach 空间中一个重要的点态性质, 它与一致凸点、紧局部一致凸点以及 H 点有着密切的联系^[1]. Banach 空间 X 单位球面 $S(X)$ 上的一点 x 称为 β 点是指对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$, 使得对于任意的序列 $(x_n) \subset S(X)$ 满足 $\text{sep}(x_n) = \inf\{\|x_n - x_m\| : n \neq m\} \geq \varepsilon$, 都存在正整数 n , 使得不

等式 $\left\|\frac{x + x_n}{2}\right\| < 1 - \delta$ 成立^[2]. 在经典 Orlicz 空间中, β 点的判别准则已经由文献^[3]给出. 本文对 β 点的概念进行推广, 引入 k - β 点的定义. 设 k 为一个正整数, Banach 空间 X 单位球面 $S(X)$ 上的一点 x 称为 k - β 点是指对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$, 使得对于任意的序列 $(x_n) \subset S(X)$ 满足 $\text{sep}(x_n) = \inf\{\|x_n - x_m\| : n \neq m\} \geq \varepsilon$, 存在 k 个正整数 $n_1, n_2, \dots$,

收稿日期: 2018-07-14

基金项目: 国家自然科学基金(11871181); 国家自然科学基金专项基金(11226127); 黑龙江省自然科学基金(2018006).

作者简介: 刘红娇(1993—), 女, 硕士研究生.

通信作者: 左明霞(1979—), 女, 博士, 副教授, 硕士研究生导师, E-mail: zuomxhust@163.com.

n_k , 使得不等式 $\| \frac{1}{1+k} (x_{n_1} + x_{n_2} + \cdots + x_{n_k} + x) \| < 1 - \delta$ 成立。显然, 当 $k=1$ 时, k - β 点就是 β 点。如果单位球面 $S(X)$ 上每一点都为 k - β 点, 则称该 Banach 空间 X 具有局部 k - β 性质。Musiela-Orlicz 空间是经典 Orlicz 空间的推广, 近几年, 对 Musielak-Orlicz 空间几何性质及点态几何性质的研究已经取得了一些成果^[2-4]。本文将在赋 Orlicz 范数的 Musielak-Orlicz 序列空间中讨论 k - β 点的刻画问题, 并进一步得到该空间具有局部 k - β 性质的等价条件。

设 X 为 Banach 空间, $B(X)$ 和 $S(X)$ 分别表示 X 的闭单位球和单位球面。 $\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{R}$ 分别表示正整数集和实数集。

下面给出 Musielak-Orlicz 序列空间的定义以及一些相关结果^[5-8]。

定义 1 函数序列 $M = (M_i)_{i=1}^{\infty}$ 称为一个 Musielak-Orlicz 函数是指对每一个 $i \in \mathbb{N}$, 有:

1) $M_i: (-\infty, +\infty) \rightarrow [0, +\infty]$ 是偶的、凸函数, 并且在 $u=0$ 处连续;

$$2) M_i(0) = 0 \text{ 且 } \lim_{u \rightarrow 0} \frac{M_i(u)}{u} = 0.$$

称函数 $N_i(v) = \sup_{u \geq 0} \{u|v| - M_i(u)\}$ 为 $M_i(u)$ 的余函数。显然, $N = (N_i)_{i=1}^{\infty}$ 也是一个 Musielak-Orlicz 函数。用 $p_i(u)$ 和 $p_i^-(u)$ (或 $q_i(v)$ 和 $q_i^-(v)$) 分别表示 M_i (或 N_i) 的右导数和左导数。

不失一般性, 下面假设 $M_i(1) = 1 (i \in \mathbb{N})$ 。对每一个 $i \in \mathbb{N}$, 定义

$$\tilde{b}(i) = \sup\{v \geq 0: N_i(v) < \infty\}$$

定义 2 称 Musielak-Orlicz 函数 $M = (M_i)_{i=1}^{\infty}$ 满足 δ_2 -条件 (记为 $M \in \delta_2$) 是指存在常数 $a > 0, K > 0$ 以及 $c_i > 0 (i=1, 2, \cdots)$ 满足 $\sum_{i=1}^{\infty} c_i < \infty$, 使得

$$M_i(2u) \leq KM_i(u) + c_i (i \in \mathbb{N}, M_i(u) \leq a)$$

定义 3 设 $\varepsilon > 0$, 称 Musielak-Orlicz 函数 $M = (M_i)_{i=1}^{\infty}$ 满足 δ_2^ε -条件 (记为 $M \in \delta_2^\varepsilon$) 是指存在常数 $a > 0, K > 0$ 以及 $c_i \geq 0 (i=1, 2, \cdots)$ 满足 $\sum_{i=1}^{\infty} c_i \leq \varepsilon$, 使得

$$M_i(2u) \leq KM_i(u) + c_i (i \in \mathbb{N}, M_i(u) \leq a)$$

已经证明, 若对任意的 $i \in \mathbb{N}, u \neq 0$, 有 $M_i(u) > 0$, 则 $M \in \delta_2$ 的充分必要条件为对任意的 $\varepsilon > 0, M \in \delta_2^\varepsilon$ ^[9]。

定义 4 设 $x = (x(i))_{i=1}^{\infty}$ 是一个实数列, x 关于

Musiela-Orlicz 函数 $M = (M_i)_{i=1}^{\infty}$ 的模定义为:

$$\rho_M(x) = \sum_{i=1}^{\infty} M_i(x(i))$$

线性集

$\{x = (x(i)): \text{存在 } \lambda > 0, \text{使得 } \rho_M(\lambda x) < \infty\}$

关于 Luxemburg 范数

$$\|x\| = \|x\|_M = \inf\left\{\lambda > 0: \rho_M\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq 1\right\}$$

或 Orlicz 范数

$$\begin{aligned} \|x\|^o &= \|x\|_M^o = \sup\left\{\sum_{i=1}^{\infty} x(i)y(i): \rho_N(y) \leq 1\right\} \\ &= \inf_{k>0} \frac{1}{k} (1 + \rho_M(kx)) \end{aligned}$$

皆为 Banach 空间, 分别记为 l_M 和 l_M^o , 称为 Musielak-Orlicz 序列空间。 h_M 和 h_M^o 是指集合

$\{x = (x(i)): \text{对任意的 } \lambda > 0, \rho_M(\lambda x) < \infty\}$

继承同一范数形成的 l_M 和 l_M^o 的子空间。

文 [7] 中已经证明 $l_M = h_M$ 或 $l_M^o = h_M^o$ 的充分必要条件是 $M \in \delta_2$ 。

对任意的 $x \in l_M^o$, 令

$$\begin{aligned} \text{supp } x &= \{i \in \mathbb{N}: x(i) \neq 0\}, \\ k_x^* &= \inf\{k > 0: \rho_N(p(k|x|)) \geq 1\}, \\ k_x^{**} &= \sup\{k > 0: \rho_N(p(k|x|)) \leq 1\}, \\ K(x) &= \begin{cases} [k_x^*, k_x^{**}], & k_x^{**} < \infty \\ [k_x^*, \infty], & k_x^* < \infty, k_x^{**} = \infty, \\ \emptyset, & k_x^* = \infty \end{cases} \end{aligned}$$

$$\theta_M(x) = \inf\left\{\lambda > 0: \text{存在 } i_0 \in \mathbb{N}, \sum_{i>i_0} M_i\left(\frac{x(i)}{\lambda}\right) < \infty\right\}.$$

引理 1^[7] $(h_M)^* = l_N^o$ 且 $(h_M^o)^* = l_N$ 。

引理 2^[8] 设 $x \in l_M^o \setminus \{0\}$, 则 $K(x) \neq \emptyset$ 的充分必要条件是 $\sum_{i \in \text{supp } x} N_i(\tilde{b}(i)) > 1$ 或 $\sum_{i \in \text{supp } x} N_i(\tilde{b}(i)) = 1$

$$\text{且 } \sup_{i \in \text{supp } x} \frac{q_i^-(\tilde{b}(i))}{|x(i)|} < \infty.$$

引理 3 若 $N \in \delta_2$, 则对任意的 $\eta \in (0, 1)$, 存在 $\gamma = \gamma(\eta) \in (0, 1)$ 及正数序列 (h_i) 满足 $\sum_{i=1}^{\infty} M_i(h_i) < \infty$, 使得对任意的 $\alpha \in (0, \eta]$, 有

$$M_i(\alpha u) \leq (1 - \gamma) \alpha M_i(u)$$

其中 $i \in \mathbb{N}, h_i \leq u \leq M_i^{-1}(1)$ 。

证明: 令

$$M_i^*(u) = \begin{cases} M_i(u), & |u| \leq 1 \\ u^2, & |u| > 1 \end{cases}$$

用 $N_i^*(v)$ 表示 $M_i^*(u)$ 的余函数, 即 $N_i^*(v) = \sup\{u|v| - M_i^*(u)\}$ 。

对每一个 $i \in \mathbb{N}$, 由于 $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{M_i(u)}{u} = 0$, 所以当 $u \neq 0$ 时, $N_i(u) > 0$. 因为 $N \in \delta_2$, 所以对任意的 $\varepsilon > 0$, 有 $N \in \delta_2^\varepsilon$. 从而由文 [10] 中引理 3 的证明过程可知, 存在 $K, a > 0$ 与正数序列 (b_i) 和 (d_i) 满足 $N_i(d_i) = a (i \in \mathbb{N})$, $\sum_{i=1}^{\infty} N_i(b_i) < \varepsilon$ 且 $b_i < d_i \leq 1$, 使得

$$N_i(2u) \leq \left(K \vee \frac{16}{a} \right) N_i(u) \quad (i \in \mathbb{N}, u \geq b_i)$$

对任意的 $\eta \in (0, 1)$, 取 $K' > \max \left\{ K, \frac{16}{a}, \frac{1}{\eta} \right\}$, $\xi = \frac{2-K'}{1-K'} - \frac{1}{(1-K')\eta}$, 则 $0 < \xi - 1 < 1$, 并且 $N_i(2u) \leq K' N_i(u) (u \geq b_i)$. 当 $u \geq b_i$ 时, 有

$$N_i(\xi u) = N_i \left[(1 - (\xi - 1))u + (\xi - 1)2u \right] \leq (1 - (\xi - 1))N_i(u) + (\xi - 1)N_i(2u) \leq \frac{1}{\eta} N_i(u)$$

从而有

$$N_i(\xi u) \leq \frac{\xi}{\eta} N_i(u) + \frac{\xi}{\eta} N_i(b_i) \quad (u \in \mathbb{R})$$

由此可得 $N_i(u) \geq \frac{\eta}{\xi} N_i(\xi u) - N_i(b_i) (u \in \mathbb{R})$. 因此,

$$M_i(\eta u) = \sup_{v \geq 0} \{ |\eta u|v - N_i(v) \} \leq \sup_{v \geq 0} \left\{ \frac{\eta |u|}{\xi} \xi v - \frac{\eta}{\xi} N_i(\xi v) \right\} + N_i(b_i) = \frac{\eta}{\xi} M_i(u) + N_i(b_i) \quad (u \in \mathbb{R})$$

取 $h_i > 0$, 使得 $N_i\left(\frac{\xi}{\eta(\sqrt{\xi}-1)}b_i\right) = M_i(h_i)$. 当

$u \geq h_i$ 时, 有 $M_i(\eta u) \leq \frac{\eta}{\sqrt{\xi}} M_i(u)$. 取 $\gamma = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\xi}}\right)$,

则 $\gamma \in (0, 1)$, 并且

$$M_i(\eta u) \leq \eta(1 - \gamma) M_i(u) \quad (u \geq h_i)$$

由于 $\frac{\xi}{\eta(\sqrt{\xi}-1)} > 1$, 则存在 $n_0 \in \mathbb{N}$, 使得

$$\frac{\xi}{2^{n_0}\eta(\sqrt{\xi}-1)} \leq 1 < \frac{\xi}{2^{n_0-1}\eta(\sqrt{\xi}-1)}, \text{ 由此可得 } \sum_{i=1}^{\infty} M_i(h_i) \leq \left(K \vee \frac{16}{a}\right) \sum_{i=1}^{\infty} N_i(b_i) < \infty.$$

当 $h_i \leq u \leq M_i^{-1}(1)$ 时, $M_i(u) = M_i(u)$, 所以 $M_i(\eta u) \leq \eta(1 - \gamma) M_i(u) (h_i \leq u \leq M_i^{-1}(1))$. 对任意的 $\alpha \in (0, \eta]$, 由于 $\frac{M_i(u)}{u}$ 在 $(0, \infty)$ 上递增, 所以当

$u > 0$ 时, 有 $\frac{M_i(\alpha u)}{\alpha u} \leq \frac{M_i(\eta u)}{\eta u}$. 从而对任意的 $i \in \mathbb{N}$, 有

$$M_i(\alpha u) \leq \frac{\alpha}{\eta} M_i(\eta u) \leq \frac{\alpha}{\eta} (1 - \gamma) \eta M_i(u) = (1 - \gamma) \alpha M_i(u)$$

其中 $h_i \leq u \leq M_i^{-1}(1)$.

引理 4^[11] $k_M \triangleq \sup_{\|x\|_M=1} \{k > 0: \|x\|_M^o = \frac{1}{k} (1 + \rho_M(kx))\} < \infty$ 的充分必要条件是:

1) $N \in \delta_2$;

2) 对任意的 $a > 0$, 存在 $\lambda > 1$, 使得当 $N_i(p_i(u)) \geq a$ 时, 有 $N_i(p_i(\lambda u)) > 1 (i = 1, 2, \dots)$.

引理 5^[11] 若 $M \in \delta_2$, 则对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$, 使得对任意的 $x \in l_M^o$, 当 $\|x\|_M^o \geq \varepsilon$ 时, 有 $\rho_M(x) \geq \sigma$.

2 主要结果及证明

定理 1 设 k 为正整数, 并且对任意的 $a > 0$, 存在 $\lambda > 1$, 使得当 $N_i(p_i(u)) \geq a$ 时, 有 $N_i(p_i(\lambda u)) > 1 (i = 1, 2, \dots)$. $x \in S(l_M^o)$ 是 k - β 点的充分必要条件是:

1) $M \in \delta_2$;

2) $N \in \delta_2$.

证明: 必要性. 为了方便, 对任意的实数序列 $x = (x(i))$, 当 $m, n \in \mathbb{N}, m > n$ 时, 记

$$[x]_n^m = (0, \dots, 0, x(n+1), x(n+2), \dots, x(m), 0, \dots)$$

假设条件 (1) 不成立, 则 $M \notin \delta_2$. 此时 $l_M^o \neq h_M^o$, 考虑以下两种情况:

(I) $x \notin h_M^o$.

此时, 对每一个 $n \in \mathbb{N}$, 有 $\|[x]_n^\infty\|^o \geq \text{dist}(x, h_M^o) = d > 0$.

记 $i_0 = 0$.

因为 $\|[x]_{i_0}^\infty\|^o > \frac{d}{2}$, 所以存在 $i_1 > i_0$, 使得

$\|[x]_{i_0}^{i_1}\|^o > \frac{d}{2}$; 因为 $\|[x]_{i_1}^\infty\|^o > \frac{d}{2}$, 所以存在 i_2

$> i_1$, 使得 $\|[x]_{i_1}^{i_2}\|^o > \frac{d}{2}$; 如此进行下去, 可以得到

序列 $i_0 < i_1 < i_2 < \dots$, 使得 $\|[x]_{i_{n-1}}^{i_n}\|^o > \frac{d}{2} (n = 1, 2, \dots)$. 令

$$x_n = [x]_0^{i_n} (n = 1, 2, \dots)$$

则有 $\|x_n\|^o = \|[x]_0^{i_n}\|^o \rightarrow \|x\|^o = 1$, 并且对任意

的 $m, n \in \mathbb{N}, m > n$, 有 $\|x_n - x_m\|^o \geq \| [k]_{i_n}^{i_{n+1}} \|^o > \frac{d}{2}$ 。但是

$\|x + x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+k}\|^o \geq (k+1) \|x_n\|^o \rightarrow k+1$, 这与 x 为 k - β 点矛盾。

(II) $x \in h_M^o$ 。

取 $z \in S(l_M^o \setminus h_M^o)$, 使得 $\rho_M(z) < \infty$ 并且 $\text{dist}(z, h_M^o) = d > 0$ 。用与情形 (I) 同样的方法, 可得到一个序列 $i_0 < i_1 < i_2 < \cdots$, 使得 $\| [k]_{i_{n-1}}^{i_n} \|^o > \frac{d}{2} (n=1, 2, \cdots)$ 。由文 [1] 中定理 2 可知, 对任意的 $y \in l_M^o \setminus \{0\}$, $K(y) \neq \emptyset$ 。取 $g \in K(x)$, 则 $\|x\|^o = \frac{1}{g} (1 + \rho_M(gx))$ 。对每一个 $n \in \mathbb{N}$, 令

$$x_n = \left(x(1), \cdots, x(i_{n-1}), \frac{z(i_{n-1}+1)}{g}, \cdots, \frac{z(i_n)}{g}, x(i_n+1), x(i_n+2), \cdots \right)$$

则

$$\|x_n\|^o \geq \| [k]_0^{i_{n-1}} \|^o \rightarrow \|x\|^o = 1$$

并且

$$\|x_n\|^o \leq \frac{1}{g} (1 + \rho_M(gx) + \sum_{i=i_{n-1}+1}^{i_n} M_i(z(i))) \rightarrow \|x\|^o = 1,$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|^o = \|x\|^o = 1$ 。因为 $x \in h_M^o$, 所以存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N$ 时, 有 $\| [k]_{i_{n-1}}^{i_n} \|^o < \frac{d}{4g}$ 。从而, 当 $m > n > N$ 时, 有

$$\|x_n - x_m\|^o \geq \frac{1}{k} \| [k]_{i_{n-1}}^{i_n} \|^o - \| [k]_{i_{n-1}}^{i_n} \|^o \geq \frac{d}{2g} - \frac{d}{4g} = \frac{d}{4g}$$

但是

$$\|x + x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+k}\|^o \geq (k+1) \| [k]_0^{i_n} \|^o \rightarrow k+1,$$

这与 x 为 k - β 点矛盾。

综合以上两种情况可知, 条件 (1) 是必要的。

下面证明条件 (2) 的必要性。假设 $N \notin \delta_2$, 则用与文 [2] 中定理 1 同样的方法, 可以找到序列 $(y_n) \subset S(l_N)$, 使得对每个 $n \in \mathbb{N}$, 有 $\rho_N\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)y_n\right) = \infty, N_i\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)y_n(i)\right) < \infty (i=1, 2, \cdots)$ 且 $\rho_N(y_n) \leq 1$ 。

因为 $\rho_N(y_1) \leq 1, x \in h_M^o$, 所以存在 $i_1 \in \mathbb{N}$, 使得 ρ_N

$([y_1]_{i_1}^\infty) \leq \frac{1}{k}$ 且 $\| [k]_{i_1}^\infty \|^o \leq 1$ 。又因为 $\lim_{j \rightarrow \infty} \| [y_1]_{i_1}^{j_1} \| = \| [y_1]_{i_1}^\infty \| \geq \theta_N(y_1) \geq \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$, 所以存在 $j_1 \in \mathbb{N}$, 使得 $\| [y_1]_{i_1}^{i_1+j_1} \| \geq \frac{1}{3}$ 。

因为 $\rho_N(y_2) \leq 1, x \in h_M^o$, 所以存在 $i_2 \in \mathbb{N}, i_2 > i_1 + j_1$, 使得 $\rho_N([y_2]_{i_2}^\infty) \leq \frac{1}{2k}$ 且 $\| [k]_{i_2}^\infty \|^o \leq \frac{1}{2}$ 。因为 $\lim_{j \rightarrow \infty} \| [y_2]_{i_2}^{j_2} \| = \| [y_2]_{i_2}^\infty \| \geq \theta_N(y_2) \geq \frac{2}{3} > \frac{2}{4}$, 所以存在 $j_2 \in \mathbb{N}$, 使得 $\| [y_2]_{i_2}^{i_2+j_2} \| \geq \frac{2}{4}$ 。

如此进行下去, 存在序列 $i_1 < i_1 + j_1 < i_2 < i_2 + j_2 < \cdots < i_n < i_n + j_n < i_{n+1} < \cdots$, 使得 $\rho_N([y_n]_{i_n}^\infty) \leq \frac{1}{nk}$, $\| [k]_{i_n}^\infty \|^o \leq \frac{1}{n}$ 且 $\| [y_n]_{i_n}^{i_n+j_n} \| \geq \frac{n}{n+2} (n=1, 2, \cdots)$ 。

令 $z_n = [y_n]_{i_n}^{i_n+j_n} (n=1, 2, \cdots)$, 则 $\rho_N(z_n) \leq \frac{1}{nk}$,

$$\frac{n}{n+2} \leq \| [y_n]_{i_n}^{i_n+j_n} \| = \| z_n \| \leq \| y_n \|, \text{ 并且}$$

$$\| [k]_{i_n}^{i_n+j_n} \|^o \leq \| [k]_{i_n}^\infty \|^o \leq \frac{1}{n} (n=1, 2, \cdots)。$$

对每一个 $n \in \mathbb{N}$, 由于 $z_n \in h_N$, 所以由 Hahn-Banach 定理, 存在 $x_n \in S(l_M^o)$, 使得 $\langle x_n, z_n \rangle = \sum_{i=1}^\infty z_n(i) x_n(i) = \|z_n\|$, 并且 $\text{supp} x_n \subseteq \text{supp} z_n$ 。由于 $x \in h_M^o$, 可以取 $y \in S(l_N)$, 使得 $\langle y, x \rangle = \sum_{i=1}^\infty x(i) y(i) = \|x\|^o$ 。对每一个 $n \in \mathbb{N}$, 令

$$w_n = \frac{n}{n+1} \left(y - \sum_{m=n+1}^{n+k} [y]_{i_m}^{i_m+j_m} + \sum_{m=n+1}^{n+k} z_m \right)$$

则

$$\rho_N(w_n) \leq \frac{n}{n+1} (\rho_N(y) + \rho_N(z_{n+1}) + \rho_N(z_{n+2}) + \cdots + \rho_N(z_{n+k})) \leq \frac{n}{n+1} \left(1 + k \cdot \frac{1}{nk} \right) = 1$$

从而

$$\begin{aligned} & \|x + x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+k}\|^o \geq \\ & \langle w_n, x + x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+k} \rangle = \\ & \frac{n}{n+1} \left(\sum_{m=n+1}^{n+k} \langle x_m, z_m \rangle + \langle y, x \rangle - \sum_{m=n+1}^{n+k} \langle y - z_m, [y]_{i_m}^{i_m+j_m} \rangle \right) \geq \\ & \frac{n}{n+1} \left(\sum_{m=n+1}^{n+k} \|z_m\| + 1 - \sum_{m=n+1}^{n+k} (\| [y]_{i_m}^{i_m+j_m} \|^o (\|y\| + \|z_m\|)) \right) \geq \end{aligned}$$

$$\frac{n}{n+1} \left(k \frac{n+1}{n+3} + 1 - k \frac{2}{n+1} \right) \rightarrow k+1.$$

但是显然有 $\|x_n - x_m\|^o \geq \|x_n\|^o = 1$ ($m, n \in \mathbb{N}, m \neq n$), 这与 x 为 k - β 点矛盾, 故 $N \in \delta_2$ 。

充分性。对任意的 $\varepsilon > 0$, 设 $(x_n) \subset S(l_M^o)$ 满足 $\text{sep}(x_n) \geq \varepsilon$ 。由引理 4 可知, $g_M = \sup_{\|x\|^o=1} \{g > 0: \|x\|^o = \frac{1}{g}(1 + \rho_M(gx))\} < \infty$ 。取实数 $g_n \geq 1$ 与 $g \geq 1$, 使得

$$\begin{aligned} \|x_n\|^o &= \frac{1}{g_n}(1 + \rho_M(g_n x_n)) \quad (n=1, 2, \dots) \\ \|x\|^o &= \frac{1}{g}(1 + \rho_M(gx)) \end{aligned}$$

取 $\eta = \frac{g_M}{\frac{1}{2} + g_M}$, 由引理 3 知, 存在 $\gamma \in (0, 1)$ 与正数

序列 (h_i) 满足 $\sum_{i=1}^{\infty} M_i(h_i) < \infty$, 使得对任意的 $\alpha \in (0, \eta]$, $i \in \mathbb{N}$, $h_i \leq u \leq M_i^{-1}(1)$, 有

$$M_i(\alpha u) \leq (1 - \gamma) \alpha M_i(u)$$

因为 $M \in \delta_2$, 所以由引理 1.5 知, 存在 $\sigma = \sigma(\frac{\varepsilon}{3}) > 0$, 使得对任意的 $y \in l_M^o$, 当 $\|y\|^o \geq \frac{\varepsilon}{3}$ 时, $\rho_M(y) \geq \sigma$ 。再利用 $M \in \delta_2$, 存在 $i_0 \in \mathbb{N}$, 使得

$$\sum_{i=i_0+1}^{\infty} M_i(2gx(i)) < \frac{g\gamma\sigma}{2g_M}$$

不失一般性 (否则可取子列), 假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(i) = a_i$ ($i=1, 2, \dots$)。因此存在 $N_1 \in \mathbb{N}$, 使得当 $m, n > N_1$ 时, 有 $\| [x_n]_{i_0}^{i_0} - [x_m]_{i_0}^{i_0} \|^o < \frac{\varepsilon}{3}$ 。从而, 对任意的 $m, n > N_1$, 有

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq \|x_n - x_m\|^o \leq \| [x_n]_{i_0}^{i_0} - [x_m]_{i_0}^{i_0} \|^o + \\ &\| [x_n]_{i_0}^{\infty} \|^o + \| [x_m]_{i_0}^{\infty} \|^o < \frac{\varepsilon}{3} + \| [x_n]_{i_0}^{\infty} \|^o + \\ &\| [x_m]_{i_0}^{\infty} \|^o \end{aligned}$$

因此, 存在 $n_1 > N_1$, 使得 $\| [x_{n_1}]_{i_0}^{\infty} \|^o > \frac{\varepsilon}{3}$ 。因为 $\| [x_{n_1}]_{i_0}^{\infty} \|^o = \lim_{i \rightarrow \infty} \| [x_{n_1}]_{i_0}^i \|^o$, 所以存在 $i_1 > i_0$, 使得 $\| [x_{n_1}]_{i_0}^{i_1} \|^o > \frac{\varepsilon}{3}$ 。

再利用 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(i) = a_i$ ($i=1, 2, \dots$), 存在 $N_2 \in \mathbb{N}$, $N_2 > n_1$, 使得当 $m, n > N_2$ 时, 有 $\| [x_n]_{i_0}^{i_1} - [x_m]_{i_0}^{i_1} \|^o < \frac{\varepsilon}{3}$ 。因此, 对任意的 $m, n > N_2$, 有

$$\varepsilon \leq \|x_n - x_m\|^o \leq \| [x_n]_{i_0}^{i_1} - [x_m]_{i_0}^{i_1} \|^o + \| [x_n]_{i_1}^{\infty} \|^o$$

$$+ \| [x_m]_{i_1}^{\infty} \|^o < \frac{\varepsilon}{3} + \| [x_n]_{i_1}^{\infty} \|^o + \| [x_m]_{i_1}^{\infty} \|^o$$

因此存在 $n_2 > N_2$, 使得 $\| [x_{n_2}]_{i_1}^{\infty} \|^o > \frac{\varepsilon}{3}$ 。进而存在

$$i_2 > i_1, \text{使得 } \| [x_{n_2}]_{i_1}^{i_2} \|^o > \frac{\varepsilon}{3}.$$

如此进行下去, 可以得到 (x_n) 的一个子列 (x_{n_m})

及一个序列 $i_0 < i_1 < i_2 < \dots$, 使得 $\| [x_{n_m}]_{i_{m-1}}^{i_m} \|^o > \frac{\varepsilon}{3}$ ($m=1, 2, \dots$), 从而 $\rho_M([x_{n_m}]_{i_{m-1}}^{i_m}) \geq \sigma$ ($m=1, 2, \dots$)。为了方便, 对每一个 $m \in \mathbb{N}$, 记 $x_{n_m} = x_m$, 则有 $\rho_M([x_m]_{i_{m-1}}^{i_m}) \geq \sigma$ ($m=1, 2, \dots$)。对每一个 $m \in \mathbb{N}$, 令

$$A_m = \{i \in \mathbb{N} : i_{m-1} < i \leq i_m\}$$

和

$$A'_m = \{i \in A_m : |x_m(i)| \geq h_i\}$$

可以证明存在 $m_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $\rho_M(x_{m_0} \chi_{A_{m_0}}) \geq \frac{\sigma}{2}$ 。事实

上, 假设对所有的 $m \in \mathbb{N}$, 有 $\rho_M(x_m \chi_{A'_m}) < \frac{\sigma}{2}$ 。由于

$\sum_{i=1}^{\infty} M_i(h_i) < \infty$, 所以

$$\rho_M(x_m \chi_{A_m \setminus A'_m}) \leq \sum_{i \in A_m \setminus A'_m} M_i(h_i) \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty)$$

取 m 充分大, 使 $\rho_M(x_m \chi_{A_m \setminus A'_m}) < \frac{\sigma}{2}$ 。从而 ρ_M

$([x_m]_{i_{m-1}}^{i_m}) \leq \rho_M(x_m \chi_{A'_m}) + \rho_M(x_m \chi_{A_m \setminus A'_m}) < \sigma$, 这与 $\rho_M([x_m]_{i_{m-1}}^{i_m}) \geq \sigma$ ($m=1, 2, \dots$) 矛盾。在序列 (x_n) 中任取 $k-1$ 个元素, 记为 $x_{m_1}, x_{m_2}, \dots, x_{m_{k-1}}$, 于是

$$\begin{aligned} \|x_{m_0} + x_{m_1} + x_{m_2} + \dots + x_{m_{k-1}} + x\|^o &\leq \\ \|x_{m_0} + x\|^o + \|x_{m_1}\|^o + \|x_{m_2}\|^o + \dots + \|x_{m_{k-1}}\|^o &\leq \end{aligned}$$

$$\frac{g + g_{m_0}}{g \cdot g_{m_0}} \left\{ 1 + \rho_M \left(\frac{g \cdot g_{m_0}}{g + g_{m_0}} (x + x_{m_0}) \right) \right\} + (k-1) =$$

$$\frac{g + g_{m_0}}{g \cdot g_{m_0}} + \frac{g + g_{m_0}}{g \cdot g_{m_0}} \left\{ \rho_M \left(\frac{g \cdot g_{m_0}}{g + g_{m_0}} (x + x_{m_0}) \chi_{A_{m_0}} \right) + \right. \\ \left. \rho_M \left(\frac{g \cdot g_{m_0}}{g + g_{m_0}} (x + x_{m_0}) \chi_{\mathbb{N} \setminus A_{m_0}} \right) \right\} +$$

$$(k-1) \leq \frac{\frac{g_{m_0}}{2} + g}{g_{m_0} g} \sum_{i \in A_{m_0}} M_i \left(\frac{g}{\frac{g_{m_0}}{2} + g} g_{m_0} x_{m_0}(i) \right) +$$

$$\frac{1}{2g_{i \in A_{m_0}}} \sum M_i(2gx(i)) + \frac{1}{g} \rho_M(gx \chi_{\mathbb{N} \setminus A_{m_0}}) +$$

$$\frac{1}{g_{m_0}} \rho_M(g_{m_0} x_{m_0} \chi_{\mathbb{N} \setminus A_{m_0}}) + (k-1) \leq$$

$$\frac{1}{g_{m_0}} (1 - \gamma) \sum_{i \in A_{m_0}} M_i(g_{m_0} x_{m_0}(i)) + \frac{1}{2g_{i=i_0+1}^{\infty}} \sum M_i(2gx(i)) +$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{g} \rho_M(g \chi_{\mathbb{N} \setminus A_{m_0}}) + \frac{1}{g_{m_0}} \rho_M(g_{m_0} x_{m_0} \chi_{\mathbb{N} \setminus A_{m_0}}) + (k-1) \leq \\ & \frac{1}{g_{m_0}} \sum_{i \in A_{m_0}} M_i(g_{m_0} x_{m_0}(i)) - \frac{\gamma \sigma}{4g_M} + \frac{1}{g} \rho_M(g \chi_{\mathbb{N} \setminus A_{m_0}}) + \\ & \frac{1}{g_{m_0}} \rho_M(g_{m_0} x_{m_0} \chi_{\mathbb{N} \setminus A_{m_0}}) + (k-1) \leq \\ & \|x_{m_0}\|^o + \|x\|^o - \frac{\gamma \sigma}{4g_M} + (k-1) = \\ & (k+1) - \frac{\gamma \sigma}{4g_M} \end{aligned}$$

故 x 为一个 k - β 点。

推论 1 设 k 为正整数, 并且对任意的 $a > 0$, 存在 $\lambda > 1$, 使得当 $N_i(p_i(u)) \geq a$ 时, $N_i(p_i(\lambda u)) > 1$ ($i = 1, 2, \dots$)。赋 Orlicz 范数的 Musielak-Orlicz 序列空间 l_M^o 具有局部 k - β 性质的充分必要条件是:

- 1) $M \in \delta_2$;
- 2) $N \in \delta_2$ 。

参考文献:

- [1] WANG T F, CUI Y A, MENG C H. Local Property (β) in Orlicz Spaces [J]. Mathematical Balkanica, 2000, 14 (1-2): 101.
- [2] SUN L H. Compactly and Weakly Compactly Strongly Exposed Properties in Musielak-Orlicz Sequence Spaces Equipped with the Orlicz Norm [J]. Communications in Computer & Information Science, 2014, 472: 416.
- [3] YAO H L, WANG T F. Maluta's Coefficient of Musielak-Orlicz Sequence Spaces [J]. Acta Mathematica Sinica, 2005, 21 (4): 699.
- [4] WANG J M, LIU X B, CUI Y A. Local Uniform Rotundity in Musielak-Orlicz Sequence Space Equipped with the Luxemburg Norm [J]. Comment. math. prace Mat, 2017, 46 (1): 131.
- [5] CHEN S T. Geometry of Orlicz Spaces [M]. Warszawa: Dissertations Math, 1996.
- [6] 左明霞. Banach 空间和 Orlicz 空间的若干几何性质 [D]. 长春: 东北师范大学, 2010.
- [7] HUDZIK H, YE Y N. Support Functionals and Smoothness of Musielak-Orlicz Sequence Spaces Equipped with Luxemburg Norm [J]. Comment Math Univ. Carolina, 1990, 31 (4): 661.
- [8] 曹连英, 王廷辅. Musielak-Orlicz 空间 $K(x) \neq \emptyset$ 的问题 [J]. 哈尔滨师范大学学报(自然科学版), 2000, 16 (4): 1.
- [9] DENKER M, HUDZIK H. Uniformly non- $l_n^{(1)}$ in Musielak-Orlicz Sequence Spaces [J]. Proceedings of the Indian Academy of Science Mathematical Science, 1991, 101 (2): 71.
- [10] CAO L, WANG T. Criteria for $k_M < \infty$ in Musielak-Orlicz Spaces [J]. Commentationes Mathematicae Universitatis Carolina, 2001, 42 (2): 259.
- [11] CUI Y A. Some Convexities of Musielak-Orlicz Sequence Spaces [J]. J. math, 1995, 15 (3): 291.
- [12] KAMINSKA A. Flat Orlicz-Musielak Sequence Spaces [J]. Bull. acad. polon. sci. sér. sci. math, 1982, 30 (7-8): 347.
- [13] HUDZIK H, KAMINSKA A. On Uniformly Convexifiable and B-convex Musielak-Orlicz Spaces [J]. 1985, 25 (1): 59.

(编辑: 关毅)