

一类分数阶随机微分方程的均方渐近概周期解

姚慧丽, 刘梦然, 王晶因
(哈尔滨理工大学 理学院, 哈尔滨 150080)

摘要:关于分数阶随机微分方程解的性质研究是近几年数学界的热门方向之一。针对 Hilbert 空间上一类线性分数阶随机微分方程, 研究其均方渐近概周期温和解的存在性和唯一性, 然后将这类线性分数阶随机微分方程的结论推广到对应的半线性分数阶随机微分方程中, 利用 Banach 不动点定理讨论这类半线性分数阶随机微分方程均方渐近概周期温和解的存在唯一性, 再利用 Schauder 不动点定理讨论这类方程在非 Lipschitz 条件下均方渐近概周期温和解的存在性。

关键词:分数阶随机微分方程; 均方渐近概周期解; Banach 不动点定理; Schauder 不动点定理

DOI:10.15938/j.jhust.2024.01.017

中图分类号: O175.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2024)01-0150-09

Square-Mean Asymptotically Almost Periodic Solutions for a Class of Fractional Stochastic Differential Equation

YAO Huili, LIU Mengran, WANG Jingnan
(College of Science, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: The study of the properties for fractional stochastic differential equation is one of the hot directions in the field of mathematics over the years. For a class of linear fractional stochastic differential equation on Hilbert space, the existence and uniqueness of its square-mean asymptotically almost periodic mild solutions are studied, and then the conclusions of this kind of linear fractional stochastic differential equation are extended to corresponding semi-linear fractional stochastic differential equation. The existence and uniqueness of square-mean asymptotically almost periodic mild solutions for this kind of semi-linear fractional stochastic differential equation are discussed by Banach fixed point theorem, and then discuss the existence of square-mean asymptotically almost periodic mild solutions by using Schauder fixed point theorem under non-Lipschitz conditions.

Keywords: fractional stochastic differential equation; square-mean asymptotically almost periodic solutions; Banach fixed point theorem; Schauder fixed point theorem

0 引言

概周期函数理论是由 Bohr H 在 1925 - 1926 年提出并建立的^[1-2], 全体概周期函数构成的空间是周期函数的完备化空间, 因此概周期函数的有关理论被广泛应用^[3-7]。1941 年 Fréchet M 在概周期函

数的基础上提出了渐近概周期函数的概念^[8], 1949 年 Eberlein W F 给出了弱概周期函数的有关概念^[9], 1992 年 Zhang C Y 教授给出了伪概周期函数的有关理论^[10]。随机微分方程是研究现实中随机过程而建立的一类方程, 随机过程的概周期函数理论最早是由 Slutsky E 在 1938 年建立的^[11], 2007 年 Bezandry P H 和 Diagana T 提出了均方概周期函数

收稿日期: 2022-10-14

基金项目: 国家自然科学基金(11801122)。

作者简介: 刘梦然(1999—), 女, 硕士研究生;

王晶因(1978—), 女, 博士, 副教授。

通信作者: 姚慧丽(1970—), 女, 博士, 教授, E-mail: 2963629242@qq.com.

的概念,并将其理论应用到随机微分方程中^[12],继而曹俊飞等在2011年给出了均方渐近概周期函数的有关概念^[13]。近年来,有关分数阶(随机)微分方程解的问题吸引了越来越多学者的关注,分数阶导数有三种不同的定义,分别为 Riemann-Liouville 定义、级数定义(Grunwald-Letnikov 定义)以及 Caputo 定义^[14],2017年 Singh V 和 Pandey D N 研究了一类脉冲型分数阶随机微分方程的加权伪概周期解的存在唯一性^[15],2020年, Ma X 和 Shu X B 等研究了一类脉冲中立型分数阶随机微分方程概周期解的存在性^[16],2021年 Sun X K 和 He P 对一类分数阶随机中立型泛函微分方程的 p -期望概周期解进行了探讨^[17]。相比之下,研究分数阶随机微分方程均方渐近概周期温和解存在唯一性的文献较少,因此研究这项内容将是一项有意义的工作。

本文将对一类线性分数阶随机微分方程

$$\left. \begin{aligned} {}^{RL}D_t^\alpha x(t) &= Ax(t) + f(t) + \gamma(t) \frac{dW(t)}{dt} \\ [{}^{RL}D_t^{\alpha-1}x(t)]_{t=0} &= x_0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

均方渐近概周期温和解的存在唯一性进行讨论。

另外,将线性分数阶随机微分方程的部分结论推广到对应的半线性分数阶随机微分方程上,研究一类半线性分数阶随机微分方程

$$\left. \begin{aligned} {}^{RL}D_t^\alpha x(t) &= Ax(t) + f(t, B_1x(a_1(t))) + \\ &\quad \gamma(t, B_2x(a_2(t))) \frac{dW(t)}{dt} \\ [{}^{RL}D_t^{\alpha-1}x(t)]_{t=0} &= x_0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

均方渐近概周期温和解的存在唯一性。

其中 ${}^{RL}D_t^\alpha x(t)$ 是对 $x(t)$ 的 Riemann-Liouville α 阶导数, $t \in \mathbb{R}^+$, $0 < \alpha < 1$ 。 H 是一个可分的 Hilbert 空间, $A: D(A) \subset L^2(P, H) \rightarrow L^2(P, H)$ 是一个稠密的闭扇形线性算子, B_i 是 $L^2(P, H) \rightarrow L^2(P, H)$ 的有界线性算子, 设 $w = \max_{i=1,2} \{ \|B_i\|_{L(H)} \} \circ (W(t))_{t \in \mathbb{R}^+}$ 是定义在过滤概率空间 (Ω, F, F_t, P) 的双边一维标准的布朗运动, $F_t = \sigma\{w(u) - w(v); u, v \leq t\}$ 是由布朗运动 $(W(t))_{t \in \mathbb{R}^+}$ 生成的自然过滤, f, γ, a_1, a_2 是满足之后一些条件的连续函数。

1 预备知识

本文 (Ω, F, P) 表示完备的概率空间, $(H, \|\cdot\|_H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ 和 $(K, \|\cdot\|_K, \langle \cdot, \cdot \rangle_K)$ 是两个可分的 Hilbert 空间, $L^2(P, H)$ 是使 $E \|x\|_H^2 = \int_\Omega \|x\|_H^2 dP$

$< \infty$ 成立的所有 H 值随机变量 x 构成的空间, 对于 $x \in L^2(P, H)$, 有 $\|x\|_2 = (\int_\Omega \|x\|_H^2 dP)^{1/2}$, 且 $L^2(P, H)$ 以 $\|\cdot\|_2$ 为范数构成 Hilbert 空间。定义 $L(K, H)$ 是 K 到 H 全体有界线性算子构成的空间, 它以 $\|\cdot\|_{L(K, H)}$ 为范数, 当 $K = H$ 时, $L(K, H)$ 由 $L(H)$ 来表示。

定义 1^[17] 设一个稠密的闭线性算子 $A: D(A) \subset L^2(P, H) \rightarrow L^2(P, H)$ 是扇形的, 是指满足以下条件: 存在常数 $\zeta \in \mathbb{R}, \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 以及 $M > 0$, 有

$$\begin{aligned} 1) S_{\theta, \zeta} &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \neq \zeta, |\arg(\lambda - \zeta)| > \theta\} \subset \rho(A); \\ 2) \text{ 对每个 } \lambda \in S_{\theta, \zeta}, &\|R(\lambda, A)\|_{L(H)} \leq \frac{M}{|\lambda - \zeta|}; \end{aligned}$$

其中 $\rho(A)$ 表示 A 的预解子集, $R(\lambda, A)$ 表示 A 的预解算子。

定义 2^[17] 函数 $f \in L^1([a, b], \mathbb{R})$ 的 α 阶 Riemann-Liouville 分数阶积分定义为

$${}_a D_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds$$

其中 $\alpha > 0, \Gamma$ 是 gamma 函数, a, b 可以取 $-\infty$ 和 $+\infty$ 。

定义 3^[18] 函数 $f \in C^{n-1}([a, b], \mathbb{R})$ 且 $f^{(n)} \in L^1([a, b], \mathbb{R})$ 的 α 阶 Riemann-Liouville 分数阶导数 $(n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N})$ 定义为

$${}_a {}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(s)}{(t-s)^{\alpha+1-n}} ds$$

定义 4^[19] 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow L^2(P, H)$ 是一个随机过程, 如果存在 $M > 0$, 使得 $E \|f(t)\|_H^2 \leq M$, 那么称 f 是随机有界的。

定义 5^[19] 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow L^2(P, H)$ 是一个随机过程, 对一切 $s \in \mathbb{R}$, 如果 $\lim_{t \rightarrow s} E \|f(t) - f(s)\|_H^2 = 0$, 那么称 f 是随机连续的。

定义 6^[20] 随机过程 $f(t) \in SMC_0(\mathbb{R}, L^2(P, H))$, 是指 $f(t) \in SBC(\mathbb{R}, L^2(P, H))$ 且 $\lim_{t \rightarrow \infty} E \|f(t)\|_H^2 = 0$ 。 $SBC(\mathbb{R}, L^2(P, H))$ 表示所有随机有界且连续过程的集合。

定义 7^[20] R 的一个子集 P 在 R 上是相对稠密的, 是指存在一个数 $l > 0$, 使得

$$[t, t+l] \cap P \neq \emptyset \quad (t \in \mathbb{R})$$

定义 8^[20] 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow L^2(P, H)$ 是一个连续的随机过程, 若对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在一个 $l(\varepsilon) > 0$, 在

任意长度为 $l(\varepsilon)$ 的区间内都至少包含一个 τ , 使得

$$E \|f(t+\tau) - f(t)\|_H^2 < \varepsilon (t \in R)$$

则称 f 是均方概周期的。均方概周期随机过程的全体构成的集合记为 $AP(R, L^2(P, H))$ 。

定义 9^[20] 一个随机连续过程 $f: R \rightarrow L^2(P, H)$ 是均方渐近概周期的, 是指它能被分解成 $f = g + \varphi$, 其中 $g \in AP(R, L^2(P, H))$, $\varphi \in SMC_0(R, L^2(P, H))$ 。所有均方渐近概周期随机过程构成的集合记为 $AAP(R, L^2(P, H))$ 。

易知 $AAP(R, L^2(P, H)) \subset SBC(R, L^2(P, H))$ 。

结合定义 6、7、8 和 9, 得到均方渐近概周期函数的一个等价定义: 设一个连续的随机过程 $f: R \rightarrow L^2(P, H)$ 是均方渐近概周期的, 是指对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 R 的一个相对稠密子集 P_ε 和有界子集 C_ε , 使得

$$E \|f(t+\tau) - f(t)\|_H^2 < \varepsilon$$

$$(\tau \in P_\varepsilon, t, t+\tau \in R \setminus C_\varepsilon)$$

引理 1^[20] $AAP(R, L^2(P, H))$ 在 $\|f\|_\infty = \sup_{t \in R} \|f(t)\|_2 = \sup_{t \in R} (E \|f(t)\|_H^2)^{1/2}$ 范数下构成 Banach 空间。

注 1 若 $f: R \rightarrow L^2(P, H)$ 是均方渐近概周期的, 则 f 在 $t \in R$ 上一致连续。

定义 10^[20] 设 Z 为 $L^2(P, H)$ 中任意紧子集, 称随机过程 $f(t, x) \in SMC_0(R \times L^2(P, H), L^2(P, H))$, 是指 $f(t, x) \in SBC(R \times L^2(P, H), L^2(P, H))$ 且一致地对 $x \in Z$ 满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} E \|f(t, x)\|_H^2 = 0$ 。 $SBC(R \times L^2(P, H), L^2(P, H))$ 表示所有随机有界且连续过程构成的集合。

定义 11^[20] 如果对于任意的 $\varepsilon > 0$ 和 $L^2(P, H)$ 的任意紧子集 Z , 存在一个 $l(\varepsilon, Z) > 0$, 在任意长度为 $l(\varepsilon, Z)$ 的区间内都至少包含一个 τ , 使得

$$E \|f(t+\tau, x) - f(t, x)\|_H^2 < \varepsilon (t \in R, x \in Z)$$

那么联合连续过程 $f: R \times L^2(P, H) \rightarrow L^2(P, H)$ 关于 $t \in R$ 一致地对 $x \in Z$ 是均方概周期的。均方概周期随机过程的全体构成的集合记为 $AP(R \times L^2(P, H), L^2(P, H))$ 。

定义 12^[20] 一个联合连续过程 $f: R \times L^2(P, H) \rightarrow L^2(P, H)$ 关于 $t \in R$ 一致 $x \in Z$ (Z 是 $L^2(P, H)$ 的任意紧子集) 对是均方渐近概周期的, 如果它能被分解成 $f = g + \varphi$, 其中 $g \in AP(R \times L^2(P, H), L^2(P, H))$, $\varphi \in SMC_0(R \times L^2(P, H), L^2(P, H))$ 。所有均方渐近概周期随机过程构成的集合记为 $AAP(R \times L^2(P, H), L^2(P, H))$ 。

易知 $AAP(R \times L^2(P, H), L^2(P, H)) \subset SBC(R \times L^2(P, H), L^2(P, H))$ 。

结合定义 10、11 和 12, 得到二元均方渐近概周期函数的一个等价定义: 设一个联合连续过程 $f: R \times L^2(P, H) \rightarrow L^2(P, H)$ 关于 $t \in R$ 一致地对 $x \in Z$ (Z 为 $L^2(P, H)$ 的任意紧子集) 是均方渐近概周期的, 是指对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 R 的一个相对稠密子集 P_ε 和有界子集 C_ε , 使得

$$E \|f(t+\tau, x) - f(t, x)\|_H^2 < \varepsilon$$

$$(\tau \in P_\varepsilon, t, t+\tau \in R \setminus C_\varepsilon, x \in Z)$$

引理 2^[20] $AAP(R \times L^2(P, H), L^2(P, H))$ 在 $\|f\|_\infty = \sup_{t \in R} \|f(t, x)\|_2 = \sup_{t \in R} (E \|f(t, x)\|_H^2)^{1/2}$ 范数下构成 Banach 空间。

注 2 若 $f: R \times L^2(P, H) \rightarrow L^2(P, H)$ 是均方渐近概周期的, 则 f 在 $R \times Z$ (Z 是 $L^2(P, H)$ 的任意紧子集) 上一致连续。

引理 3 如果 $f: R \times L^2(P, H) \rightarrow L^2(P, H)$, $(t, x) \rightarrow f(t, x)$, 关于 $t \in R$ 且一致对 $x \in Z$ (Z 为 $L^2(P, H)$ 的任意紧子集) 是均方渐近概周期的, 那么对任意 $x(t) \in AAP(R, L^2(P, H))$, $f(t, x(t))$ 是均方渐近概周期的。

证明: 由于 f 是均方渐近概周期的, 根据均方渐近概周期函数的等价定义知, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在一个相对稠密子集 $P_\varepsilon^{(1)}$ 和有界子集 $C_\varepsilon^{(1)}$, 使得

$$E \|f(t+\tau_1, x) - f(t, x)\|_H^2 < \varepsilon$$

$$(\tau_1 \in P_\varepsilon^{(1)}, t, t+\tau_1 \in R \setminus C_\varepsilon^{(1)})$$

同理 x 也是均方渐近概周期的, 于是存在一个相对稠密子集 $P_\varepsilon^{(2)}$ 和有界子集 $C_\varepsilon^{(2)}$, 使得

$$E \|x(t+\tau_2) - x(t)\|_H^2 < \varepsilon$$

$$(\tau_2 \in P_\varepsilon^{(2)}, t, t+\tau_2 \in R \setminus C_\varepsilon^{(2)})$$

又知 f 在 $R \times Z$ 上一致连续, 对上述的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta(\varepsilon) > 0$, 当 $x', x'' \in Z$ 以及 $E \|x' - x''\|_H^2 < \delta(\varepsilon)$ 时, 有 $E \|f(t, x') - f(t, x'')\|_H^2 < \varepsilon$ 成立。于是对上述的 ε 和 $\delta(\varepsilon)$, 存在一个相对稠密子集 $P_\varepsilon = P_\varepsilon^{(1)} \cap P_\varepsilon^{(2)}$ 和有界子集 $C_\varepsilon = C_\varepsilon^{(1)} \cup C_\varepsilon^{(2)}$, 当 $E \|x(t+\tau) - x(t)\|_H^2 < \delta(\varepsilon)$, 其中 $\tau \in P_\varepsilon, t, t+\tau \in R \setminus C_\varepsilon$, 有

$$E \|f(t+\tau, x(t+\tau)) - f(t, x(t))\|_H^2 =$$

$$E \|f(t+\tau, x(t+\tau)) - f(t+\tau, x(t)) +$$

$$f(t+\tau, x(t)) - f(t, x(t))\|_H^2 \leq$$

$$2E \|f(t+\tau, x(t+\tau)) - f(t+\tau, x(t))\|_H^2 +$$

$$2E \|f(t+\tau, x(t)) - f(t, x(t))\|_H^2 < 2\varepsilon + 2\varepsilon = 4\varepsilon$$

故 $f(t, x(t)) \in AAP(R, L^2(P, H))$

2 主要结果

2.1 线性分数阶随机微分方程

定义 13 如果随机过程 $(x(t))_{t \in R^+}$ 满足下列积分方程(3), 那么 $(x(t))_{t \in R^+}$ 称为线性分数阶随机微分方程(1) 的温和解。

$$x(t) = S_\alpha(t)x_0 + \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s)ds + \int_0^t S_\alpha(t-s)\gamma(s)dW(s) \quad (3)$$

其中 $S_\alpha(t) = t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(At^\alpha)$, $0 < \alpha < 1$, $E_{\alpha,\beta}(z)$ 是 Mittag-Leffler 函数, $E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$ 。

为了主要结果的证明, 给出以下假设:

(H₁) 对于 $S_\alpha(t)$, 如果 A 是关于某个 $M > 0$, $0 \leq \theta < \pi(1 - \frac{\alpha}{2})$ 的 $\omega < 0$ 型扇形算子, 那么存在 $C > 0$, 使得 $\|S_\alpha(t)\|_{L(H)} \leq \frac{CM}{1 + |\omega| t^\alpha} \leq CM$ 。

(H₂) 函数 $f: R^+ \rightarrow L^2(P, H)$ 和函数 $\gamma: R^+ \rightarrow L^2(P, H)$ 关于 $t \in R^+$ 是均方渐近概周期的。

定理 1 如果假设 (H₁)、(H₂) 成立, 那么线性分数阶随机微分方程(1) 在 R^+ 上存在唯一的均方渐近概周期温和解。

证明: 式(3) 中 $x(t)$ 是方程(1) 的温和解, 首先证明式(3) 是均方渐近概周期的。由 (H₂) 知 $f = g + \varphi$, $\gamma = \eta + \beta$, 其中 $g, \eta \in AP(R, L^2(P, H))$ 以及 $\varphi, \beta \in SMC_0(R^+, L^2(P, H))$, 有

$$\begin{aligned} x(t) &= S_\alpha(t)x_0 + \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s)ds + \int_0^t S_\alpha(t-s)\gamma(s)dW(s) = \\ &[\int_{-\infty}^t S_\alpha(t-s)g(s)ds + \int_{-\infty}^t S_\alpha(t-s)\eta(s)dW(s)] + \\ &[S_\alpha(t)x_0 + \int_0^t S_\alpha(t-s)\varphi(s)ds + \int_0^t S_\alpha(t-s)\beta(s)dW(s) - \int_{-\infty}^0 S_\alpha(t-s)g(s)ds - \int_{-\infty}^0 S_\alpha(t-s)\eta(s)dW(s)] = F(t) + \Phi(t) \end{aligned}$$

为了证明 $x(t)$ 是均方渐近概周期的, 需要证明 $F(t) \in AP(R, L^2(P, H))$ 以及 $\Phi(t) \in SMC_0(R^+, L^2(P, H))$, 以下证明将被分为两个步骤。

步骤 1: 已知 $g, \eta \in AP(R, L^2(P, H))$, 因此对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在共同的 $l(\varepsilon) > 0$, 在任意长度为

$l(\varepsilon)$ 的区间内都至少包含一个 τ , 使得 $E\|g(s+\tau) - g(s)\|_H^2 < \varepsilon$, $E\|\eta(s+\tau) - \eta(s)\|_H^2 < \varepsilon$ 成立。对于 $\int_{-\infty}^t \frac{CM}{1 + |\omega| (t-s)^\alpha} ds$, 作变量替换, 令 $t-s = \mu$, 得到 $\int_{-\infty}^t \frac{CM}{1 + |\omega| (t-s)^\alpha} ds = \int_0^{+\infty} \frac{CM}{1 + |\omega| \mu^\alpha} d\mu = \frac{CM|\omega|^{-1/\alpha}\pi}{\alpha \sin(\pi/\alpha)}$, 记积分 $\int_{-\infty}^t \frac{CM}{1 + |\omega| (t-s)^\alpha} ds = I_1$ 。 $\int_{-\infty}^t (\frac{1}{1 + |\omega| (t-s)^\alpha})^2 ds < \int_{-\infty}^t \frac{1}{1 + |\omega| (t-s)^\alpha} ds = \frac{I_1}{CM}$, 于是 $\int_{-\infty}^t (\frac{CM}{1 + |\omega| (t-s)^\alpha})^2 ds$ 也是收敛的, 记积分 $\int_{-\infty}^t (\frac{CM}{1 + |\omega| (t-s)^\alpha})^2 ds = I_2$ 。

应用 Hölder 不等式、Itô 等距性质, 注意到 W 是一个双边标准的布朗运动, 令 $\tilde{W}(\sigma) = W(\sigma + \tau) - W(\tau)$, 则 $\tilde{W}$ 也是一个双边标准的一维布朗运动, 且与 W 同分布, 作 $\sigma = s - \tau$, 并结合假设条件 (H₁), 对上述的 ε 和 τ , 得到:

$$\begin{aligned} E\|F(t+\tau) - F(t)\|_H^2 &= \\ E\|\int_{-\infty}^{t+\tau} S_\alpha(t+\tau-s)g(s)ds + \int_{-\infty}^{t+\tau} S_\alpha(t+\tau-s)\eta(s)dW(s) - \int_{-\infty}^t S_\alpha(t-s)g(s)ds - \int_{-\infty}^t S_\alpha(t-s)\eta(s)dW(s)\|_H^2 &\leq \\ 2E\|\int_{-\infty}^t S_\alpha(t-s)(g(s+\tau) - g(s))ds\|_H^2 + 2E\|\int_{-\infty}^t S_\alpha(t-s)(\eta(s+\tau) - \eta(s))d\tilde{W}(s)\|_H^2 &\leq \\ 2\int_{-\infty}^t \frac{CM}{1 + |\omega| (t-s)^\alpha} ds \int_{-\infty}^t \frac{CM}{1 + |\omega| (t-s)^\alpha} E\|g(s+\tau) - g(s)\|_H^2 ds + 2\int_{-\infty}^t (\frac{CM}{1 + |\omega| (t-s)^\alpha})^2 E\|\eta(s+\tau) - \eta(s)\|_H^2 ds &\leq 2I_1\varepsilon + 2I_2\varepsilon \end{aligned}$$

于是得

$$F(t) \in AP(R, L^2(P, H)) \quad (4)$$

步骤 2: 根据假设 (H₁) 知, 得到:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} E\|S_\alpha(t)x_0\|_H^2 \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} (\frac{CM}{1 + |\omega| t^\alpha})^2 E\|x_0\|_H^2 = 0$$

因此有

$$S_\alpha(t)x_0 \in SMC_0(R^+, L^2(P, H)) \quad (5)$$

由假设 (H₂) 知, $\varphi \in SMC_0(R^+, L^2(P, H))$, 因此对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_1 > 0$, 当 $t > N_1$ 时, 有 $E\|\varphi(t)\|_H^2 < \varepsilon$ 。由 $\|S_\alpha(t)\|_{L(H)} \leq \frac{CM}{1 + |\omega| t^\alpha} \rightarrow$

$0(t \rightarrow +\infty)$, 存在 $N_2 > 0$, 当 $t > N_2$ 时, $\|S_\alpha(t)\|_{L(H)} \leq \varepsilon$ 。又因为 $\varphi(t)$ 有界, 设 $\sup_{t \in R^+} E \|\varphi(t)\|_H^2 \leq L_1$ 成立。

另外 $\int_{N_1}^t \frac{CM}{1+|\omega|(t-s)^\alpha} ds \leq \int_{-\infty}^t \frac{CM}{1+|\omega|(t-s)^\alpha} ds = I_1$ 。

应用假设条件 (H_1) 、 (H_2) 和 Hölder 不等式, 对上述的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N_1 + N_2 > 0$, 当 $t > N$, 得到:

$$\begin{aligned} E \left\| \int_0^t S_\alpha(t-s) \varphi(s) ds \right\|_H^2 &\leq \\ 2E \left\| \int_0^{N_1} S_\alpha(t-s) \varphi(s) ds \right\|_H^2 + \\ 2E \left\| \int_{N_1}^t S_\alpha(t-s) \varphi(s) ds \right\|_H^2 &\leq \\ 2 \int_0^{N_1} \frac{CM}{1+|\omega|(t-s)^\alpha} ds \int_0^{N_1} \frac{CM}{1+|\omega|(t-s)^\alpha} E \|\varphi(s)\|_H^2 ds + \\ 2 \int_{N_1}^t \frac{CM}{1+|\omega|(t-s)^\alpha} ds \int_{N_1}^t \frac{CM}{1+|\omega|(t-s)^\alpha} E \|\varphi(s)\|_H^2 ds &\leq \\ 2N_1^2 \varepsilon^2 L_1 + 2I_1^2 \varepsilon \end{aligned}$$

于是 $\lim_{t \rightarrow +\infty} E \left\| \int_0^t S_\alpha(t-s) \varphi(s) ds \right\|_H^2 = 0$, 可得

$$\int_0^t S_\alpha(t-s) \varphi(s) ds \in SMC_0(R^+, L^2(P, H)) \quad (6)$$

以下证明 $\int_0^t S_\alpha(t-s) \beta(s) dW(s) \in SMC_0(R^+, L^2(P, H))$ 。由假设 (H_2) 知, $\beta \in SMC_0(R^+, L^2(P, H))$, 因此对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_3 > 0$, 当 $t > N_3$ 时, $E \|\beta(t)\|_H^2 < \varepsilon$ 。因为 $\beta(t)$ 有界, 设 $\sup_{t \in R^+} E \|\beta(t)\|_H^2 \leq L_2$ 。另外 $\int_{N_3}^t \left(\frac{CM}{1+|\omega|(t-s)^\alpha} \right)^2 ds < \int_{-\infty}^t \left(\frac{CM}{1+|\omega|(t-s)^\alpha} \right)^2 ds = I_2$ 。

结合 $\|S_\alpha(t)\|_{L(H)}$ 分析过程, 应用假设条件 (H_1) 、 (H_2) 和 Itô 等距性质, 对上述的 $\varepsilon > 0$, 存在 $T = N_2 + N_3 > 0$, 当 $t > T$ 时, 有

$$\begin{aligned} E \left\| \int_0^t S_\alpha(t-s) \beta(s) dW(s) \right\|_H^2 &\leq \\ 2E \left\| \int_0^{N_3} S_\alpha(t-s) \beta(s) dW(s) \right\|_H^2 + \\ 2E \left\| \int_{N_3}^t S_\alpha(t-s) \beta(s) dW(s) \right\|_H^2 &\leq \\ 2 \int_0^{N_3} \left(\frac{CM}{1+|\omega|(t-s)^\alpha} \right)^2 E \|\beta(s)\|_H^2 ds + \\ 2 \int_{N_3}^t \left(\frac{CM}{1+|\omega|(t-s)^\alpha} \right)^2 E \|\beta(s)\|_H^2 ds &\leq \\ 2N_3 \varepsilon^2 L_2 + 2I_2 \varepsilon \end{aligned}$$

于是 $\lim_{t \rightarrow +\infty} E \left\| \int_0^t S_\alpha(t-s) \beta(s) dW(s) \right\|_H^2 = 0$, 得

$$\int_0^t S_\alpha(t-s) \beta(s) dW(s) \in SMC_0(R^+, L^2(P, H)) \quad (7)$$

现在证明 $\int_{-\infty}^0 S_\alpha(t-s) g(s) ds \in SMC_0(R^+, L^2(P, H))$, $\int_{-\infty}^0 \frac{CM}{1+|\omega|(t-s)^\alpha} ds \leq \int_{-\infty}^t \frac{CM}{1+|\omega|(t-s)^\alpha} ds = I_1$, 于是 $\int_{-\infty}^0 \frac{CM}{1+|\omega|(t-s)^\alpha} ds$ 是收敛的, 根据收敛的定义, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $G_1 > 0$, 当 $N_4 > G_1$ 时, 有 $\int_{-\infty}^{-N_4} \frac{CM}{1+|\omega|(t-s)^\alpha} ds < \varepsilon$, 又因为 $g(t)$ 有界, 可设 $\sup_{t \in R} E \|g(t)\|_H^2 \leq L_3$ 成立, 结合 $\|S_\alpha(t)\|_{L(H)}$ 分析过程, 对上述的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_2 > 0$, 当 $t > N_2$ 时, 可得:

$$\begin{aligned} E \left\| \int_{-\infty}^0 S_\alpha(t-s) g(s) ds \right\|_H^2 &\leq \\ 2E \left\| \int_{-\infty}^{-N_4} S_\alpha(t-s) g(s) ds \right\|_H^2 + \\ 2E \left\| \int_{-N_4}^0 S_\alpha(t-s) g(s) ds \right\|_H^2 &\leq \\ 2 \int_{-\infty}^{-N_4} \frac{CM}{1+|\omega|(t-s)^\alpha} ds \int_{-\infty}^{-N_4} \frac{CM}{1+|\omega|(t-s)^\alpha} E \|g(s)\|_H^2 ds + \\ 2 \int_{-N_4}^0 \frac{CM}{1+|\omega|(t-s)^\alpha} ds \int_{-N_4}^0 \frac{CM}{1+|\omega|(t-s)^\alpha} E \|g(s)\|_H^2 ds &\leq 2\varepsilon^2 L_3 + 2N_4^2 \varepsilon^2 L_3 \end{aligned}$$

于是得

$$\int_{-\infty}^0 S_\alpha(t-s) g(s) ds \in SMC_0(R^+, L^2(P, H)) \quad (8)$$

最后证明 $\int_{-\infty}^0 S_\alpha(t-s) \eta(s) dW(s) \in SMC_0(R^+, L^2(P, H))$, 对于积分 $\int_{-\infty}^0 \left(\frac{CM}{1+|\omega|(t-s)^\alpha} \right)^2 ds$, 有 $\int_{-\infty}^0 \left(\frac{CM}{1+|\omega|(t-s)^\alpha} \right)^2 ds \leq \int_{-\infty}^t \left(\frac{CM}{1+|\omega|(t-s)^\alpha} \right)^2 ds = I_2$, 于是 $\int_{-\infty}^0 \left(\frac{CM}{1+|\omega|(t-s)^\alpha} \right)^2 ds$ 收敛, 根据收敛的定义, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $G_2 > 0$, 当 $N_5 > G_2$ 时, 有 $\int_{-\infty}^{-N_5} \left(\frac{CM}{1+|\omega|(t-s)^\alpha} \right)^2 ds < \varepsilon$, 另外存在 $N_2 > 0$, 当 $t > N_2$ 时, 有 $\|S_\alpha(t)\|_{L(H)} \leq \varepsilon$ 。又因为 $\eta(t)$ 有界, 设 $\sup_{t \in R} E \|\eta(t)\|_H^2 \leq L_4$ 成立, 那么应用假设条件 (H_1) 、 (H_2) 和 Itô 等距性质, 对上述的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_2 > 0$, 当 $t > N_2$ 时, 可以得到:

$$E \left\| \int_{-\infty}^0 S_\alpha(t-s) \eta(s) dW(s) \right\|_H^2 \leq$$

$$\begin{aligned}
& 2E \left\| \int_{-\infty}^{-N_5} S_{\alpha}(t-s) \eta(s) dW(s) \right\|_H^2 + \\
& 2E \left\| \int_{-N_5}^0 S_{\alpha}(t-s) \eta(s) dW(s) \right\|_H^2 \leq \\
& 2 \int_{-\infty}^{-N_5} \left(\frac{CM}{1+|\omega|(t-s)^{\alpha}} \right)^2 E \left\| \eta(s) \right\|_H^2 ds + \\
& 2 \int_{-N_5}^0 \left(\frac{CM}{1+|\omega|(t-s)^{\alpha}} \right)^2 E \left\| \eta(s) \right\|_H^2 ds \leq \\
& 2\varepsilon L_4 + 2N_5 \varepsilon^2 L_4
\end{aligned}$$

于是得

$$\int_{-\infty}^0 S_{\alpha}(t-s) \eta(s) dW(s) \in SMC_0(R^+, L^2(P, H)) \quad (9)$$

结合式(5)、(6)、(7)、(8)、(9)可得到 $\Phi(t) \in SMC_0(R^+, L^2(P, H))$, 再结合文中式(4), 得 $F(t) + \Phi(t) \in AAP(R^+, L^2(P, H))$, 由温和解的定义知 $x(t)$ 是线性分数阶随机微分方程(1)的均方渐近概周期温和解。

再证唯一性, 假设 $y(t)$ 是方程(1)另一个均方渐近概周期温和解, 令 $z(t) = x(t) - y(t)$, 当 $t = 0$ 时, 有 $z(0) = x(0) - y(0)$, 满足 ${}^RL_t^{\alpha} z(t) = Az(t)$, 根据温和解定义及假设 (H_1) 知, $z(t) = S_{\alpha}(t)z(0)$, 有 $\|z(t)\|_H \leq \frac{CM}{1+|\omega|t^{\alpha}} \|z(0)\|_H$, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $z(t) \equiv 0$ 使上述不等式成立, 于是有 $x(t) = y(t)$, 证明了线性分数阶随机微分方程(1)存在唯一的均方渐近概周期温和解。

2.2 半线性分数阶随机微分方程

接下来, 将线性分数阶随机微分方程的结论推广到对应的半线性分数阶随机微分方程上, 类比方程(1)的温和解, 方程(2)的温和解可以表示为

$$\begin{aligned}
x(t) = & S_{\alpha}(t)x_0 + \int_0^t S_{\alpha}(t-s)f(s, B_1x(a_1(s)))ds + \\
& \int_0^t S_{\alpha}(t-s)\gamma(s, B_2x(a_2(s)))dW(s) \quad (10)
\end{aligned}$$

对于方程(2), 假设以下条件成立:

(H_3) 函数 $f: R^+ \times L^2(P, H) \rightarrow L^2(P, H)$ 和函数 $\gamma: R^+ \times L^2(P, H) \rightarrow L^2(P, H)$ 关于 $t \in R^+$ 一致地对 $x \in Z$ (Z 是 $L^2(P, H)$ 的任意紧子集) 是均方渐近概周期的。

(H_4) 函数 f 和 γ 关于 $x \in Z$ (Z 是 $L^2(P, H)$ 任意紧子集) 一致地对 $t \in R^+$ 满足 Lipschitz 条件, 存在正数 L_f, L_{γ} , 满足 $E \|f(t, x) - f(t, y)\|_H^2 \leq L_f E \|x - y\|_H^2$ 及 $E \|\gamma(t, x) - \gamma(t, y)\|_H^2 \leq L_{\gamma} E \|x - y\|_H^2$ 。

(H_5) 函数 $a_1(R^+) = R^+, a_2(R^+) = R^+$ 且 $a_1:$

$R^+ \rightarrow L^2(P, H)$ 和 $a_2: R^+ \rightarrow L^2(P, H)$ 关于 $t \in R^+$ 是均方渐近概周期的。

(H_6) 设有界集 $K \subseteq L^2(P, H)$, 函数 f 和 γ 在 K 上关于 x 一致对 $t \in R^+$ 一致连续。

作算子 $P: x(t) \rightarrow Px(t)$, 令

$$\begin{aligned}
Px(t) = & S_{\alpha}(t)x_0 + \int_0^t S_{\alpha}(t-s)f(s, B_1x(a_1(s)))ds + \\
& \int_0^t S_{\alpha}(t-s)\gamma(s, B_2x(a_2(s)))dW(s)
\end{aligned}$$

首先利用 Banach 不动点定理在 Lipschitz 条件下证明方程(2)存在唯一的均方渐近概周期温和解。

定理 2 如果 (H_1) 、 (H_3) 、 (H_4) 、 (H_5) 成立, 当 $2w^2(I_1^2 L_f + I_2^2 L_{\gamma}) < 1$ 时, 那么半线性分数阶随机微分方程(2)在 R^+ 上存在唯一的均方渐近概周期温和解。

证明: 先证 $f(t, B_1x(a_1(t)))$ 与 $\gamma(t, B_2x(a_2(t)))$ 是均方渐近概周期的。任取 $x(t) \in AAP(R^+, L^2(P, H))$, 由 x 的一致连续性可知, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta(\varepsilon) > 0$, 当 $t_1, t_2 \in R^+, E \|t_1 - t_2\|_H^2 < \delta(\varepsilon)$ 时, 使得 $E \|x(t_1) - x(t_2)\|_H^2 < \varepsilon$ 。

已知 a_1 是均方渐近概周期的, 于是存在一个相对稠密子集 P'_{ε} 和有界子集 C'_{ε} , 使得

$$\begin{aligned}
& E \|a_1(t + \tau) - a_1(t)\|_H^2 < \varepsilon \\
& (\tau \in P'_{\varepsilon}, t, t + \tau \in R^+ \setminus C'_{\varepsilon})
\end{aligned}$$

由假设 (H_5) 知, 对上述的 $\delta(\varepsilon)$ 、 P'_{ε} 和 C'_{ε} , 当 $E \|a_1(t + \tau) - a_1(t)\|_H^2 < \delta(\varepsilon)$, $\tau \in P'_{\varepsilon}, t, t + \tau \in R^+ \setminus C'_{\varepsilon}$, 有 $E \|x(a_1(t + \tau)) - x(a_1(t))\|_H^2 < \varepsilon$, 故 $x(a_1(t)) \in AAP(R^+, L^2(P, H))$, 同理也可得 $x(a_2(t)) \in AAP(R^+, L^2(P, H))$ 。

易知 $B_1x(a_1(t))$ 与 $B_2x(a_2(t))$ 也是均方渐近概周期的。根据引理 3 和假设 (H_3) , $f(t, B_1x(a_1(t)))$ 与 $\gamma(t, B_2x(a_2(t)))$ 是均方渐近概周期的, 可得 $Px(t)$ 是均方渐近概周期的, 则算子 P 是定义在 $AAP(R^+, L^2(P, H))$ 到 $AAP(R^+, L^2(P, H))$ 的自映射。

下面证明 P 是一个压缩映射。事实上, 对任意的 $x(t), y(t) \in AAP(R^+, L^2(P, H))$, 得到:

$$\begin{aligned}
& E \|Px(t) - Py(t)\|_H^2 \leq \\
& 2E \left\| \int_0^t S_{\alpha}(t-s)[f(s, B_1x(a_1(s))) - \right. \\
& \left. f(s, B_1y(a_1(s)))]ds \right\|_H^2 + 2E \left\| \int_0^t S_{\alpha}(t-s) \right. \\
& \left. [\gamma(s, B_2x(a_2(s))) - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \gamma(s, B_2 y(a_2(s)))] dW(s) \|_H^2 \\
& \text{应用假设 } (H_1) 、(H_4) \text{ 和 Hölder 不等式, 其中} \\
& \int_0^t \frac{CM}{1 + |\omega|(t-s)^\alpha} ds \leq \int_{-\infty}^t \frac{CM}{1 + |\omega|(t-s)^\alpha} ds = I_1 \circ \\
& 2E \| \int_0^t S_\alpha(t-s) [f(s, B_1 x(a_1(s))) - \\
& f(s, B_1 y(a_1(s)))] ds \|_H^2 \leq \\
& 2 \int_0^t \frac{CM}{1 + |\omega|(t-s)^\alpha} ds \int_0^t \frac{CM}{1 + |\omega|(t-s)^\alpha} \times \\
& E \| f(s, B_1 x(a_1(s))) - f(s, B_1 y(a_1(s))) \|_H^2 ds \leq \\
& 2 \int_0^t \frac{CM}{1 + |\omega|(t-s)^\alpha} ds \int_0^t \frac{CM}{1 + |\omega|(t-s)^\alpha} L_f \times \\
& E \| B_1 x(a_1(s)) - B_1 y(a_1(s)) \|_H^2 ds \leq \\
& 2w^2 L_f I_1^2 E \| x(a_1(s)) - y(a_1(s)) \|_H^2 \leq \\
& 2w^2 L_f I_1^2 \sup_{t \in R^+} E \| x(t) - y(t) \|_H^2
\end{aligned}$$

应用假设 (H_1) 、 (H_4) 和 Itô 等距性质, 其中

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \left(\frac{CM}{1 + |\omega|(t-s)^\alpha} \right)^2 ds < \int_{-\infty}^t \left(\frac{CM}{1 + |\omega|(t-s)^\alpha} \right)^2 ds = I_2 \circ \\
& 2E \| \int_0^t S_\alpha(t-s) [\gamma(s, B_2 x(a_2(s))) - \\
& \gamma(s, B_2 y(a_2(s)))] dW(s) \|_H^2 \leq \\
& 2 \int_0^t \left(\frac{CM}{1 + |\omega|(t-s)^\alpha} \right)^2 E \| \gamma(s, B_2 x(a_2(s))) - \\
& \gamma(s, B_2 y(a_2(s))) \|_H^2 ds \leq \\
& 2 \int_0^t \left(\frac{CM}{1 + |\omega|(t-s)^\alpha} \right)^2 L_\gamma E \| B_2 x(a_2(s)) - \\
& B_2 y(a_2(s)) \|_H^2 ds \leq \\
& 2w^2 I_2 L_\gamma E \| x(a_2(s)) - y(a_2(s)) \|_H^2 \leq \\
& 2w^2 I_2 L_\gamma \sup_{t \in R^+} E \| x(t) - y(t) \|_H^2
\end{aligned}$$

令 $L_0 = 2w^2(L_f I_1^2 + I_2 L_\gamma)$, 因此有 $\|Px(t) - Py(t)\|_2^2 \leq L_0 \sup_{t \in R^+} \|x(t) - y(t)\|_2^2$, $\sup_{t \in R^+} \|x(t) - y(t)\|_2^2 \leq (\sup_{t \in R^+} \|x(t) - y(t)\|_2)^2$, 可得 $\|Px(t) - Py(t)\|_2 \leq \sqrt{L_0} \sup_{t \in R^+} \|x(t) - y(t)\|_2$, 从而得 $\|Px(t) - Py(t)\|_\infty \leq \sqrt{L_0} \|x(t) - y(t)\|_\infty$ 。由 $L_0 < 1$, 知 $\sqrt{L_0} < 1$, 因此 P 是一个压缩映射, 根据 Banach 不动点理, 可知存在唯一的不动点 x , 使得 $Px = x$ 。即

$$\begin{aligned}
x(t) &= S_\alpha(t)x_0 + \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s, B_1 x(a_1(s))) ds + \\
& \int_0^t S_\alpha(t-s)\gamma(s, B_2 x(a_2(s))) dW(s)
\end{aligned}$$

是半线性分数阶随机微分方程(2) 的唯一均方渐近概周期温和解。

尽管 Banach 不动点证明了方程(2) 均方渐近概周期温和解的唯一性, 但是其中的 Lipschitz 条件和 $2w^2(I_1^2 L_f + I_2 L_\gamma) < 1$ 的条件较难实现, 因此下面结合 Schauder 不动点定理^[21], 在非 Lipschitz 条件下讨论方程(2) 均方渐近概周期温和解的存在性。

定理 3 假设 (H_1) 、 (H_3) 、 (H_5) 、 (H_6) 成立, 则半线性分数阶随机微分方程(2) 在 R^+ 上(至少) 存在一个均方渐近概周期温和解。

证明: 根据引理 3 和假设 (H_3) 、 (H_5) 知, $f(t, B_1 x(a_1(t)))$ 与 $\gamma(t, B_2 x(a_2(t)))$ 是均方渐近概周期的, 可知 $Px(t)$ 是均方渐近概周期的, 则算子 P 是定义在 $AAP(R^+, L^2(P, H))$ 到 $AAP(R^+, L^2(P, H))$ 的自映射。

先证 P 是连续的, 即 $(Px)(t)$ 在 $AAP(R^+, L^2(P, H))$ 上关于 x 是连续的。

设序列 $\{x_n\} \subseteq AAP(R^+, L^2(P, H))$ 在 R^+ 上是一致收敛的, 得到 $\|x_n - x\|_\infty \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, $x \in AAP(R^+, L^2(P, H))$ 且 $\|B_1 x_n - B_1 x\|_\infty \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 存在有界子集 $K \subset AAP(R^+, L^2(P, H))$, 使得 $B_1 x_n(t), B_1 x(t) \subset K$ 。由 (H_6) 知 f 是在 K 上是一致连续的, 因此对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta(\varepsilon) > 0$, 对任意 $x, y \in K$, 当 $E \|x - y\|_H^2 < \delta(\varepsilon)$ 时, 有 $E \|f(t, x) - f(t, y)\|_H^2 < \varepsilon$ 。对上述 $\delta(\varepsilon)$, 存在 $N' > 0$, 当 $n > N'$ 且 $E \|B_1 x_n(a_1(t)) - B_1 x(a_1(t))\|_H^2 < \delta(\varepsilon)$ 时, 有 $E \|f(t, B_1 x_n(a_1(t))) - f(t, B_1 x(a_1(t)))\|_H^2 < \varepsilon$ 成立, 对函数 $\gamma(s, B_2 x(a_2(s)))$ 的分析同理, 可得

$$\begin{aligned}
& E \| (Px_n)(t) - (Px)(t) \|_H^2 = \\
& E \left\| \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s, B_1 x_n(a_1(s))) ds - \right. \\
& \left. \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s, B_1 x(a_1(s))) ds + \right. \\
& \left. \int_0^t S_\alpha(t-s)\gamma(s, B_2 x_n(a_2(s))) dW(s) - \right. \\
& \left. \int_0^t S_\alpha(t-s)\gamma(s, B_2 x(a_2(s))) dW(s) \right\|_H^2 \leq \\
& 2E \left\| \int_0^t S_\alpha(t-s)(f(s, B_1 x_n(a_1(s))) - \right. \\
& \left. f(s, B_1 x(a_1(s)))) ds \right\|_H^2 + \\
& 2E \left\| \int_0^t S_\alpha(t-s)(\gamma(s, B_2 x_n(a_2(s))) - \right. \\
& \left. \gamma(s, B_2 x(a_2(s)))) dW(s) \right\|_H^2 \leq \\
& 2 \int_0^t \frac{CM}{1 + |\omega|(t-s)^\alpha} ds \int_0^t \frac{CM}{1 + |\omega|(t-s)^\alpha} \times \\
& E \| f(s, B_1 x_n(a_1(s))) - f(s, B_1 x(a_1(s))) \|_H^2 ds + \\
& 2 \int_0^t \left(\frac{CM}{1 + |\omega|(t-s)^\alpha} \right)^2 E \| \gamma(s, B_2 x_n(a_2(s))) - \\
& \gamma(s, B_2 x(a_2(s))) \|_H^2 ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \gamma(s, B_2 x(a_2(s))) ds \|^2_H \leq \\ & 2I_1^2 E \|f(s, B_1 x(a_1(s))) - f(s, B_1 x(a_1(s)))\|^2_H + \\ & 2I_2 E \|\gamma(s, B_2 x(a_2(s))) - \gamma(s, B_2 x(a_2(s)))\|^2_H \leq \\ & 2I_1^2 \varepsilon + 2I_2 \varepsilon \end{aligned}$$

所以算子 P 是连续的。

接下来设 $\sup_{t \in R^+} f(t, B_1 x(a_1(t))) = M_f$ 以及 $\sup_{t \in R^+} \gamma(t, B_2 x(a_2(t))) = M_\gamma$, 令 $B_\xi = \{x \in AAP(R^+, L^2(P, H)) : \|x\|_\infty \leq \xi\}$, 其中 $\xi = 3(CM)^2 E \|x_0\|^2_H + 3I_1^2 M_f + 3I_2 M_\gamma < +\infty$, 显然 B_ξ 是 $AAP(R^+, L^2(P, H))$ 上的有界闭凸集, 为了证明有界集经算子 P 作用之后的像集是有界集, 只需证明 $P(B_\xi) \subseteq B_\xi$, 具体过程如下:

$$\begin{aligned} & E \| (Px)(t) \|^2_H = \\ & E \| S_\alpha(t)x_0 + \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s, B_1 x(a_1(s))) ds + \\ & \int_0^t S_\alpha(t-s)\gamma(s, B_2 x(a_2(s))) dW(s) \|^2_H \leq \\ & 3E \| S_\alpha(t)x_0 \|^2_H + 3E \left\| \int_0^t S_\alpha(t-s) \right. \\ & \left. f(s, B_1 x(a_1(s))) ds \right\|^2_H + \\ & 3E \left\| \int_0^t S_\alpha(t-s)\gamma(s, B_2 x(a_2(s))) dW(s) \right\|^2_H \leq \\ & 3 \left(\frac{CM}{1+|\omega|(t-s)} \right)^2 E \|x_0\|^2_H + 3 \int_0^t \frac{CM}{1+|\omega|(t-s)} ds \times \\ & \int_0^t \frac{CM}{1+|\omega|(t-s)} E \|f(s, B_1 x(a_1(s)))\|^2_H ds + \\ & 3 \int_0^t \left(\frac{CM}{1+|\omega|(t-s)} \right)^2 E \|\gamma(s, B_2 x(a_2(s)))\|^2_H ds \leq \\ & 3(CM)^2 E \|x_0\|^2_H + 3I_1^2 M_f + 3I_2 M_\gamma = \xi \end{aligned}$$

故包含关系 $P(B_\xi) \subseteq B_\xi$ 成立, 由此结果也可得知 $\{Px : x \in B_\xi\}$ 是范数一致有界的。

根据 Arzela-Ascoli 定理^[22], 现在还需证明 $\{Px : x \in B_\xi\}$ 是等度连续的。对任意的 $t_1, t_2 \geq 0$, 假设 $t_1 < t_2$, 那么

$$\begin{aligned} & E \| (Px)(t_2) - (Px)(t_1) \|^2_H = \\ & E \| S_\alpha(t_2)x_0 + \int_0^{t_2} S_\alpha(t_2-s)f(s, B_1 x(a_1(s))) ds + \\ & \int_0^{t_2} S_\alpha(t_2-s)\gamma(s, B_2 x(a_2(s))) dW(s) - \\ & S_\alpha(t_1)x_0 - \int_0^{t_1} S_\alpha(t_1-s)f(s, B_1 x(a_1(s))) ds - \\ & \int_0^{t_1} S_\alpha(t_1-s)\gamma(s, B_2 x(a_2(s))) dW(s) \|^2_H \end{aligned}$$

其中第一项为

$$\begin{aligned} & 3E \| S_\alpha(t_2)x_0 - S_\alpha(t_1)x_0 \|^2_H \leq \\ & 3E \| t_2^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(At_2^\alpha) - t_1^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(At_1^\alpha) \|^2_H E \|x_0\|^2_H = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 3t_2^{2\alpha-2} E \| E_{\alpha,\alpha}(At_2^\alpha) - \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(At_1^\alpha) \|^2_H E \|x_0\|^2_H \leq \\ & 3t_2^{2\alpha-2} E \| E_{\alpha,\alpha}(At_2^\alpha) - E_{\alpha,\alpha}(At_1^\alpha) \|^2_H E \|x_0\|^2_H \leq \\ & 3t_2^{2\alpha-2} E \| AE'_{\alpha,\alpha}(At_2^\alpha) \|^2_H (t_2^\alpha - t_1^\alpha)^2 E \|x_0\|^2_H \end{aligned}$$

第二项分析如下:

$$\begin{aligned} & 3E \left\| \int_0^{t_2} S_\alpha(t_2-s)f(s, B_1 x(a_1(s))) ds - \right. \\ & \left. \int_0^{t_1} S_\alpha(t_1-s)f(s, B_1 x(a_1(s))) ds \right\|^2_H = \\ & 3E \left\| \int_0^{t_2} S_\alpha(s)f(t_2-s, B_1 x(a_1(t_2-s))) ds - \right. \\ & \left. \int_0^{t_1} S_\alpha(s)f(t_1-s, B_1 x(a_1(t_1-s))) ds \right\|^2_H \leq \\ & 6E \left\| \int_0^{t_1} S_\alpha(s) [f(t_2-s, B_1 x(a_1(t_2-s))) - \right. \\ & \left. f(t_1-s, B_1 x(a_1(t_1-s)))] ds \right\|^2_H + \\ & 6E \left\| \int_{t_1}^{t_2} S_\alpha(s)f(t_2-s, B_1 x(a_1(t_2-s))) ds \right\|^2_H \end{aligned}$$

最后一项为

$$\begin{aligned} & 3E \left\| \int_0^{t_2} S_\alpha(t_2-s)\gamma(s, B_2 x(a_2(s))) dW(s) - \right. \\ & \left. \int_0^{t_1} S_\alpha(t_1-s)\gamma(s, B_2 x(a_2(s))) dW(s) \right\|^2_H \leq \\ & 3E \left\| \int_0^{t_2} S_\alpha(s)\gamma(t_2-s, B_2 x(a_2(t_2-s))) dW(s) - \right. \\ & \left. \int_0^{t_1} S_\alpha(s)\gamma(t_1-s, B_2 x(a_2(t_1-s))) dW(s) \right\|^2_H \leq \\ & 6E \left\| \int_0^{t_1} S_\alpha(s) [\gamma(t_2-s, B_2 x(a_2(t_2-s))) - \right. \\ & \left. \gamma(t_1-s, B_2 x(a_2(t_1-s)))] dW(s) \right\|^2_H + \\ & 6E \left\| \int_{t_1}^{t_2} S_\alpha(s)\gamma(t_2-s, B_2 x(a_2(t_2-s))) ds \right\|^2_H \end{aligned}$$

当 $t_2 \rightarrow t_1$, $E \| (Px)(t_2) - (Px)(t_1) \|^2_H \rightarrow 0$, 于是 $\{Px : x \in B_\xi\}$ 关于 t 右等度连续, 同理可以证明 $\{Px : x \in B_\xi\}$ 关于 t 左等度连续, 得到 $\{Px : x \in B_\xi\}$ 关于 t 等度连续。综上, P 是一个全连续算子。

根据 Schauder 不动点定理, (至少) 存在一个不动点 x , 使得 $Px = x$ 。即

$$\begin{aligned} x(t) = & S_\alpha(t)x_0 + \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s, B_1 x(a_1(s))) ds + \\ & \int_0^t S_\alpha(t-s)\gamma(s, B_2 x(a_2(s))) dW(s) \end{aligned}$$

是半线性分数阶随机微分方程(2)的均方渐近概周期温和解。

参考文献:

- [1] BOHR H. Zur Theorie Der Fastperiodischen Funktionen I [J]. Acta Mathematica, 1925, 45(1): 29.

- [2] BOHR H. Zur Theorie Der Fastperiodischen Funktionen II[J]. Acta Mathematica, 1925, 46(1/2): 101.
- [3] CAO Junfei, YANG Qigui, HUANG Zaitang. On Almost Periodic Mild Solutions for Stochastic Functional Differential Equations[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2011, 13(1): 275.
- [4] LI Yong, LIU Zhenxin, WANG Wenhe. Almost Periodic Solutions and Stable Solutions for Stochastic Differential Equations[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B, 2019, 24(11): 5927.
- [5] MIRAoui M. Measure Pseudo Almost Periodic Solutions for Differential Equations with Reflection[J]. Applicable Analysis, 2020, 101(3): 1.
- [6] 姚慧丽, 孙影. 一类具有可变延迟 Lasota-Ważewska 模型的渐近概周期解[J]. 哈尔滨理工大学学报, 2021, 26(5): 152.
YAO Huili, SUN Ying. Asymptotically Almost Periodic Solutions for a Class of Lasota-Ważewska Models with Variable Delay[J]. Journal of Harbin University of Science and Technology, 2021, 26(5): 152.
- [7] BU C. Existence and Uniqueness of Almost Periodic Solution for a Mathematical Model of Tumor Growth[J]. Journal of Applied Mathematics and Physics, 2022, 10(4): 6.
- [8] FRÉCHET M. Les Fonctions Asymptotiquement Presque Périodiques Continues [J]. C. R Acad. Sci. Paris, 1941, 213: 520.
- [9] EBERLEIN W F. Abstract Ergodic Theorems and Weak Almost Periodic Functions[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1949, 67(1): 217.
- [10] ZHANG Chuanyi. Pseudo Almost Periodic Functions and Their Applications [D]. Ontario London: University of Western Ontario, Ph. D. Thesis, 1992: 2.
- [11] SLUTSKY E. Sur Les Fonctions Aléatoires Presque Périodiques et Sur La Decomposition Des Fonctions Aléatoires[J]. Actualités Sceintifiques et Industrielles, 1938, 738: 33.
- [12] BEZANDRY P H, DIAGANA T. Existence of Almost Periodic Solutions to Some Stochastic Differential Equations [J]. Applicable Analysis, 2007, 86(7): 819.
- [13] CAO Junfei, YANG Qigui, HUANG Zaitang, et al. Asymptotically Almost Periodic Solutions of Stochastic Functional Differential Equations [J]. Applied Mathematics and Computation, 2011, 218(5): 1499.
- [14] 林孔容. 关于分数阶导数的几种不同定义的分析与比较[J]. 闽江学院学报, 2003(5): 3.
- LIN Kongrong. Analysis and Comparison of Different Definition about Fractional Integrals and Derivatives [J]. Journal of Minjiang University, 2003(5): 3.
- [15] SINGH V, PANDEY D N. Weighted Pseudo Almost Periodic Solutions for Fractional Order Stochastic Impulsive Differential Equations [J]. Cubo (Temuco), 2017, 19(1): 89.
- [16] MA Xiao, SHU Xiaobao, MAO Jianzhong. Existence of Almost Periodic Solutions for Fractional Impulsive Neutral Stochastic Differential Equations with Infinite Delay[J]. Stochastics and Dynamics, 2020, 20(1): 1.
- [17] SUN Xiaoke, HE Ping. Existence of p-Mean Almost Periodic Mild Solution for Fractional Stochastic Neutral Functional Differential Equation [J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2021, 37(3): 645.
- [18] 祝奔石. 分数阶微积分及其应用 [J]. 黄冈师范学院学报, 2011, 31(6): 1.
ZHU Benshi. Fractional Calculus and Its Applications [J]. Journal of Huanggang Normal University, 2011, 31(6): 1.
- [19] SAKTHIVEL R, REVATHI P, ANTHONI S M. Existence of Pseudo Almost Automorphic Mild Solutions to Stochastic Fractional Differential Equations [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2012, 75(7): 3339.
- [20] 姚慧丽, 张悦娇. 一类随机微分方程的均方渐近概周期温和解 [J]. 哈尔滨理工大学学报, 2019, 24(4): 143.
YAO Huili, ZHANG Yuejiao. Square-Mean Asymptotically Almost Periodic Mild Solutions for a Class of Stochastic Differential Equations [J]. Journal of Harbin University of Science and Technology, 2019, 24(4): 143.
- [21] 裴明鹤. Banach 空间上的两个不动点定理的新证法 [J]. 北华大学学报 (自然科学版), 2022, 23(6): 718.
PEI Minghe. New Proofs of Two Fixed Point Theorems on Banach Space [J]. Journal of Beihua University (Natural Science), 2022, 23(6): 718.
- [22] ABDULRAZAQ N A, MOHAMMED H S, HOUSEN N L. Existence and Uniqueness Solutions for Nonlinear Fractional Differential Equations with Fractional Integral Boundary Conditions [J]. Journal of Interdisciplinary Mathematics, 2021, 24(7): 1831.

(编辑:温泽宇)