

q -积三角模上的 Fuzzy 概率积分及其应用模型

王 月, 赵 辉, 乌伦华
(哈尔滨理工大学 理学院, 哈尔滨 150080)

摘要:针对新设计的一对 q -Fuzzy 和算子, 及 q -Fuzzy 积算子, 证明满足 T 三角模与 S 三角模条件, 接着定义一种 k -模糊测度, 并在 k -模糊测度空间下定义 q -Fuzzy 和概率积分; 最后将 q -Fuzzy 和概率积分应用到医疗头盔性能优化上; 对医疗头盔性能优化过程中采用优序图法和改进的反熵权法计算权重; 其次应用模糊概率积分和结合最大概率原则对医疗头盔性能优化状态进行评估, 并对评估结果进行排序; 最后用模糊概率值得出的结果与模糊综合评价法得到的结果进行对比, 结果是完全一致, 验证了提出的 q -Fuzzy 和概率积分法更加精炼准确, 克服了模糊综合评价结果的模糊性和辨识性。

关键词: q -Fuzzy 和算子; q -Fuzzy 和概率积分; 医疗头盔; 反熵权法; 综合评判

DOI: 10.15938/j.jhust.2023.02.017

中图分类号: TH122 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2023)02-0145-10

Q-Fuzzy Probability Integration on Triangular Modulus and Its Application Model

WANG Yue, ZHAO Hui, WU Lunhua

(College of Science, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: For the newly designed pair of q -Fuzzy sum operators and q -Fuzzy product operators, it is proved that they meet the conditions of T triangular modulus and S triangular modulus, and then a k -fuzzy measure is defined, and q -Fuzzy and probability integral are defined under the k -fuzzy Measure space; finally, q -Fuzzy and probability integral are applied to the performance optimization of medical helmets; the optimal sequence diagram method and improved anti-entropy weight method are used to calculate the weights in the process of optimizing the performance of medical helmets. Subsequently, fuzzy probability integrals combined with the principle of maximum probability are used to evaluate the performance optimization state of the medical helmet, and rank the evaluation results. Finally, the results obtained by fuzzy probability value are compared with the result obtained by the fuzzy comprehensive evaluation method, and the results are completely consistent. This validates the proposed q -Fuzzy and the probability integral method are more refined and accurate, overcoming the fuzziness and identification of the fuzzy comprehensive evaluation results.

Keywords: q -Fuzzy sum operator; q -Fuzzy sum probability Integral; medical helmet; anti-entropy method; comprehensive evaluation

0 引言

模糊测度相比较经典测度仅仅摒弃了可加性, 保留了其单调性和连续性。1974年, SUGENO 在他

的博士论文中首次提出了模糊测度和模糊积分的概念^[1]; 1981年赵怀汝等人将 Sugeno 模糊测度中的“ $\wedge$ ”代替为普通乘法“ $\cdot$ ”, 并由此给出了 (N) 模糊积分的定义, 减少了信息的丢失^[2]; 此后, 张修文给出了 (T) 模糊积分即用三角模“ T ”代替“ $\wedge$ ”; 1990

收稿日期: 2021-10-21

基金项目: 四川省科技计划项目(2016JZ0014-1); 黑龙江省自然科学基金项目(A201214)。

作者简介: 赵 辉(1963—), 男, 教授, 硕士研究生导师;

乌伦华(1998—), 女, 硕士研究生。

通信作者: 王 月(1996—), 女, 硕士研究生, E-mail: 1932592772@qq.com。

年外国学者伯纳德·德·贝茨说明了三角形规范^[3];2018年,张慧等^[4]提出了具有三角函数型的加法生成子生成一类具有特殊形式的连续的阿基米德 t 模与 s 模,并在多决策过程中得到应用。2014年高淑环等^[5]研究了模糊积分发展现状;2017年曹周斌等^[6]引进了模糊集上的广义模糊积分的概念,讨论了该积分的一些基本性质扩大了模糊积分的研究范围;2019年张春琴等^[7]提出 Sugeno 测度定义证明了在 Sugeno 空间下一些收敛理论之间的关系;2020年一些外国学者定义了通用 Choquet 积分,证明了伪(N)模糊积分,伪(S)模糊积分等之间的联系^[8];2021年赵辉等^[9]提出在可信测度空间下的以积算子在模糊概率积分上的研究,扩大了模糊概率积分的应用领域。

头盔最先用于军用,并在 60 年代中期到 70 年代研制成功了第一代军用头盔 GK80 型钢盔^[10],对于头盔的性能、设计方面根据不同的情况具有不同的要求,这样可以极大发挥头盔的作用,提高头盔的性能;2002年,Y. Ha 等^[11]在视空间下对头盔的性能做出了分析并表明在改进的视空间下对头盔性能分析更加准确;2011年,张亚君等^[12]研制出了分布式可控制医疗制冷头盔,解决了一些由于温度产生的影响因素;2017年,王彦杰等^[13]研制的芳纶针织增强体头盔,表明耐热性,阻燃性能更好;2020年,文胡安等^[14]提出了头盔疗法在位置头部畸形的治疗疗法;同年,康永洪等^[15]并对人体开发头盔模具进行了设计;2018年,张征等^[16]提出了头盔式的吸氧高压氧治疗法,并且在临床显示应用效果显著,2017年,胡一河等^[17]对一些慢性病的死亡率进行了综合分析,结果表明一部分病人是由于慢性病导致死亡率升高的;因此我们希望在未来有更多的慢性疾病的患者将接受药物治疗,并解决在使用医疗头盔时用自动代替手动旋转旋钮的困难,这样不仅能提高了治疗速度,还能降低了成本,因此具有重要的研究意义。

本文在已有的模糊测度、模糊算子及积分的有关结论下,再构造出一对优化的三角模,即 q -Fuzzy 积算子、 q -Fuzzy 和算子,定义了一种 k -模糊测度,并在此条件下定义一种 q -Fuzzy 积概率积分,并对其相关的性质、定理给出相应的结论与证明。最后,将定义的概率积分应用到医疗头盔性能优化问题中,通过对模糊综合评价^[18-20]和权重方法的学习^[21-22],为克服传统模糊综合评价的缺陷,提出一种更优的计算权重方法,优序图法和改进的反熵权法的组合

赋权法^[23-24],来提高最终的性能优化评估精度,使得医疗头盔的性能优化问题在其他领域中更具有研究价值。

1 预备知识

定义 1^[4] 映射 $T: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$,若 $\forall a,b,c,d \in [0,1]$ 满足下列条件:

- 1) 交换律: $T(a,b) = T(b,a)$;
- 2) 结合律: $T(a,T(b,c)) = T(T(a,b),c)$;
- 3) 单调性: 若 $a \leq c, b \leq d \Rightarrow T(a,b) \leq T(c,d)$;
- 4) 边界条件: $T(a,1) = a$ 。

则称 T 为 T 三角模,也称为 T 范数。

定义 2^[4] 映射 $S: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$,若 $\forall a,b,c,d \in [0,1]$ 满足下列条件:

- 1) 交换律: $S(a,b) = S(b,a)$;
- 2) 结合律: $S(a,S(b,c)) = S(S(a,b),c)$;
- 3) 单调性: 若 $a \leq c, b \leq d \Rightarrow S(a,b) \leq S(c,d)$;
- 4) 边界条件: $S(a,0) = a$ 。

则称 S 为 S 三角模,也称为 S 范数。

定理 1 三角范算子 T 和 S 是对偶算子,即 $\forall a, b \in [0,1] S(a,b) = 1 - T(1-a, 1-b)$ 。

定义 3^[3] X 为一非空集合, F 是由 X 子集构成的 σ -代数, 集函数 $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty)$ 为 $(X, \mathcal{F})$ 上的一个模糊测度当且仅当满足:

(I) $\phi \in \mathcal{F}$ 则 $\mu(\phi) = 0$;

(II) (单调性)

$A, B \in \mathcal{F}, A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$;

(III) (上连续性)

如果 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots, A_n \in \mathcal{F}, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}, n = 1, 2, \cdots$, 且 $\exists n_0$, 使得 $\mu(A_{n_0}) < \infty$ 则

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)。$$

(IV) (下连续性)

如果 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots, A_n \in \mathcal{F}, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}, n = 1, 2, \cdots$ 则 $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)。$

因此,当满足(I),(II),(III)时,则 μ 称为上半连续模糊测度;当满足(I),(II),(IV)时,则 μ 称为下半连续模糊测度。

称 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 为模糊测度空间, μ 是可测空间 $(X, \mathcal{F})$ 上的模糊测度。

定义 4^[5] 设 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 是一模糊测度空间, $A \in \mathcal{F}, f$ 为可测函数, μ 为模糊测度, f 在 A 上关于 μ

的 Sugeno 模糊积分 $\int_A f d\mu$ 定义为

$$(S) \int_A f d\mu = \sup_{\alpha \in [0, \infty)} [\alpha \wedge \mu(\mathcal{F}_\alpha \cap A)].$$

定理 2 设 $A, f, f_1, f_2 \in \mathcal{F}$, 则 Sugeno 积分满足的性质如下:

- 1) 如果 $\mu(A) = 0$, 则对 $\forall f \in F$, 有 $(S) \int_A f d\mu = 0$;
- 2) 如果 $(S) \int_A f d\mu = 0$, 则有 $\mu(A \cap \{x | f(x) > 0\}) = 0$;
- 3) 如果 $f_1 \leq f_2$, 则有 $(S) \int_A f_1 d\mu \leq (S) \int_A f_2 d\mu$;
- 4) 如果 $A \subset B$, 则有 $(S) \int_A f d\mu \leq (S) \int_B f d\mu$;
- 5) $(S) \int_{A \cap B} f d\mu \leq (S) \int_A f d\mu \wedge (S) \int_B f d\mu$;
- 6) $(S) \int_{A \cup B} f d\mu \geq (S) \int_A f d\mu \vee (S) \int_B f d\mu$;
- 7) $\forall a \in [0, \infty)$, $(S) \int_A f d\mu = a \wedge \mu(A)$;
- 8) $\forall a \in [0, \infty)$, $(S) \int_A (f+a) d\mu \leq (S) \int_A f d\mu + (S) \int_A a d\mu$;
- 9) $(S) \int_A f d\mu = (S) \int_A f \chi_A d\mu$, 其中 χ_A 是 A 的特征函数;
- 10) $(S) \int_A (f_1 \wedge f_2) d\mu \leq (S) \int_A f_1 d\mu \wedge (S) \int_A f_2 d\mu$;
- 11) $(S) \int_A (f_1 \vee f_2) d\mu \geq (S) \int_A f_1 d\mu \vee (S) \int_A f_2 d\mu$.

2 主要结论及证明

下面根据预备知识中 T 三角模和 S 三角模定义, 定义一种 q -Fuzzy 和算子及其对偶算子

定义 5 设映射 $S: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, 对于 $\forall a, b \in [0, 1], q \in (-1, 0]$, 记 $S(a, b) = \frac{a+b-ab}{1-qab}$, 称 S 为 q -Fuzzy 和算子, 简记为 $a \oplus b$ 即 $S(a, b) = a \oplus b$.

$$\text{注: } 0 \leq \frac{a+b-ab}{1-qab} \leq 1.$$

定理 3 $S(a, b) = a \oplus b = \frac{a+b-ab}{1-qab}$ 是 $[0, 1]$ 上的 S 模。其中 $a, b \in [0, 1], q \in (-1, 0]$ 。 $\forall a, b, c, d \in [0, 1]$, 须满足 S 模中的 4 个基本条件:

证明: 因为 S 模需要满足交换律、结合律、单调性、边界性, 所以证明如下:

1) $\forall a, b \in [0, 1]$, 有

$$a \oplus b = \frac{a+b-ab}{1-qab} = \frac{b+a-ba}{1-qba} = b \oplus a,$$

即 $a \oplus b = b \oplus a$; 所以 $S(a, b) = S(b, a)$ 。

$$2) (a \oplus b) \oplus c = \frac{a \oplus b + c - (a \oplus b)c}{1 - q(a \oplus b)c} =$$

$$\frac{a+b+c-(ab+bc+ac)(1-q)abc}{1-q(ab+ac+bc)+qabc} = a \oplus (b \oplus c),$$

即 $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$;

则 $S(S(a, b), c) = S(a, S(b, c))$ 。

3) $\forall a_1, b_1, a_2, b_2 \in [0, 1], q \in (-1, 0], a_1 \leq a_2, b_1 \leq b_2$, 则 $a_1 b_1 \leq a_2 b_2, a_1 + b_1 \leq a_2 + b_2$,

$$\text{故: } \frac{a_1+b_1-a_1b_1}{1-qa_1b_1} - \frac{a_2+b_2-a_2b_2}{1-qa_2b_2} = \frac{(a_1-a_2)(1+qb_1b_2) + (1+qa_1a_2)(b_1-b_2)}{(1-qa_1b_1)(1-qa_2b_2)} \leq$$

0, 故有

$$\frac{a_1+b_1-a_1b_1}{1-qa_1b_1} \leq \frac{a_2+b_2-a_2b_2}{1-qa_2b_2},$$

即 $a_1 \oplus b_1 \leq a_2 \oplus b_2, S(a, b) \leq S(c, d)$ 。

$$4) \forall a \in [0, 1], a \oplus 0 = \frac{a+0}{1+0} = a,$$

则 $S(a, 0) = a$ 。

因此 $\oplus$ 满足 S 模 4 个条件, 故定义 1 构造的 q -Fuzzy 和算子 $a \oplus b = \frac{a+b-ab}{1-qab}$ 为 S 模。

下面根据 S 算子的对偶性给出 T 算子的定义。

定义 6 设映射 $T: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, 对 $\forall a, b \in [0, 1], q \in (-1, 0]$, 记 $T(a, b) = \frac{ab-q(1-a-b+ab)}{1-q(1-a-b+ab)}$ 称 T 为 q -Fuzzy 积算子, 简记为 $a \otimes b$, 即 $T(a, b) = a \otimes b$ 。

$$\text{注: } 0 \leq \frac{ab-q(1-a-b+ab)}{1-q(1-a-b+ab)} \leq 1.$$

定理 4 $T(a, b) = a \otimes b = \frac{ab-q(1-a-b+ab)}{1-q(1-a-b+ab)}$ 是 $[0, 1]$ 上的 T 模。其中 $a, b \in [0, 1], q \in (-1, 0]$ 。

$\forall a, b, c, d \in [0, 1]$, 须满足 T 模中的 4 个基本条件:

证明: 因为 T 模需要满足交换律、结合律、单调性、边界性。证明类似于定理 3。

注: $q=0$ 时 $S(a, b) = a+b-ab, T(a, b) = ab$ 。此时, 算子退化为普通的数乘与加法运算。因此, 对于上述构造的 q -Fuzzy 积算子和 q -Fuzzy 和算子更具灵活性, 泛化能力较强。

下面根据文[7]和本文的需要,定义一种新的模糊测度 k -模糊测度。

定义 7 设 X 是非空集合, $\mathcal{F}$ 由 X 的若干个经典子集组成的 σ -代数, 集函数 $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ 称为 $(X, \mathcal{F})$ 的一个 k -模糊测度, 当且仅当满足下列条件:

- 1) ϕ 处为零, $\mu(\phi) = 0$;
- 2) $\forall A, B \in \mathcal{F}, A \cap B = \phi$; 有

$$\mu(A \cup B) = \frac{\mu(A) + \mu(B) - k\mu(A)\mu(B) - \frac{1}{2}\mu(A)\mu(B)}{1 + k\mu(A)\mu(B) + \frac{1}{2}\mu(A)\mu(B)},$$

$$k \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right];$$

- 3) 上连续性

如果 $\{A_n\} \subset \mathcal{F}, A_n \supset A_{n+1}, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$, 且 $\exists n_0$ 使得 $\mu(A_{n_0}) < +\infty$, 则

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n);$$

- 4) 下连续性

如果 $\{A_n\} \subset \mathcal{F}, A_n \subset A_{n+1}, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$, 则

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

因此, 当满足条件 1), 2), 3) 时, 则 μ 称为 k -上半连续模糊测度; 当满足条件 1), 2), 4) 时, 则 μ 称为 k -下半连续模糊测度。

称 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 为 k -模糊测度空间, μ 是可测空间 $(X, \mathcal{F})$ 上 k -模糊测度。

注: 当 $k = -\frac{1}{2}$ 时, $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ 满足可加性, 再根据连续性可得可列可加性成立, 故当 $k = -\frac{1}{2}$ 时, k -模糊测度是概率测度。

定理 5 若 μ 为 k -下半连续模糊测度, 且满足 $\mu(A) + \mu(A^c) = 1$, 则 μ 为 k -上半连续模糊测度。

下面只需证明 μ 满足上连续性即可。

由 $\forall \{A_n\} \subset \mathcal{F}, A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots, n = 1, 2, \cdots$, 可知 $A_1^c \subset A_2^c \subset \cdots \subset A_n^c \subset \cdots, n = 1, 2, \cdots$, 又 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n^c) = \mu(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^c) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c)$ 且 $\mu(A) + \mu(A^c) = 1$, 故有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n^c) = 1 - \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) = 1 - \mu\left(\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c\right) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

若 μ 为 k -上半连续模糊测度, 证明 μ 满足下连续性即可方法类似。

定理 6 设 μ 为 $\mathcal{F}$ 上的 k -模糊测度, 则 μ 满足单调性。

证明: 若 $A, B \in \mathcal{F}$, 且 $A \subset B$, 则有

$$B = A \cup (B - A) \text{ 且 } A \cap (B - A) = \phi.$$

由定义 5 可知

$$\mu(B) = \mu(A \cup (B - A)),$$

则

$$\mu(B) = \frac{\mu(A) + \mu(B - A) - k\mu(A)\mu(B - A) - \frac{1}{2}\mu(A)\mu(B - A)}{1 + k\mu(A)\mu(B - A) + \frac{1}{2}\mu(A)\mu(B - A)},$$

$$\mu(A) = \frac{\mu(A) \left[1 + k\mu(A)\mu(B - A) + \frac{1}{2}\mu(A)\mu(B - A) \right]}{1 + k\mu(A)\mu(B - A) + \frac{1}{2}\mu(A)\mu(B - A)},$$

$$\mu(B) - \mu(A) =$$

$$\frac{\mu(A) + \mu(B - A) - k\mu(A)\mu(B - A) - \frac{1}{2}\mu(A)\mu(B - A)}{1 + k\mu(A)\mu(B - A) + \frac{1}{2}\mu(A)\mu(B - A)} -$$

$$\frac{\mu(A) \left[1 + k\mu(A)\mu(B - A) + \frac{1}{2}\mu(A)\mu(B - A) \right]}{1 + k\mu(A)\mu(B - A) + \frac{1}{2}\mu(A)\mu(B - A)} =$$

$$\frac{\mu(B - A) \left[1 - \left(k + \frac{1}{2}\right)(\mu(A) + \mu^2(A)) \right]}{1 + \left(k + \frac{1}{2}\right)\mu(A)\mu(B - A)},$$

由于 $\mu(B - A) \left[1 - \left(k + \frac{1}{2}\right)(\mu(A) + \mu^2(A)) \right] \geq 0$, $1 + \left(k + \frac{1}{2}\right)\mu(A)\mu(B - A) \geq 0$, 故 $\mu(B) - \mu(A) \geq 0$, 则 μ 满足单调性。

接下来, 将 q -Fuzzy 和算子应用到 k -模糊测度空间上定义一种 q -Fuzzy 和概率积分, 并在 k -模糊测度空间下对 q -Fuzzy 和概率积分的部分性质进行证明。

定义 8 设 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 为模糊测度空间, $A, f \in \mathcal{F}, f: X \rightarrow [0, 1]$ 是非负可测函数, μ 为 k -模糊测度, $A \in \mathcal{F}, \oplus$ 为 q -Fuzzy 和算子, 则有:

$$\int_A f d\mu = \sup_{\alpha \in [0, 1]} [\alpha \oplus \mu(N_\alpha(f) \cap A)]$$

称 $\int_A f d\mu$ 为 f 在 A 上关于 μ 的 q -Fuzzy 和概率积分。

记 $N_\alpha(f) = \{x \mid f(x) \geq \alpha, x \in X\} (\alpha \in [0, 1])$, 当积分存在时, 则称 f 在 A 上可积。

注: 根据 q 取 $-0.5, -0.4, \cdots$, 不同值时, 对应的 q -Fuzzy 和概率积分值也发生变化, 表明新定义的

q -Fuzzy 和概率积分泛化能力强,优化了 Sugeno 模糊积分。

由此,得出关于 q -Fuzzy 和概率积分的性质,此类性质类似于预备知识中的定理 2,下面只列出部分性质。

性质 1 设 $A, D \in \mathcal{F}, f: X \rightarrow [0, 1]$ 是非负可测函数,如果 $A \subset D$,则 $\int_A f d\mu \leq \int_D f d\mu$;

性质 2 设 $A \in \mathcal{F}, f: X \rightarrow [0, 1]$ 是非负可测函数, $a \in [0, 1]$, 则 $\int_A (f + a) d\mu \leq \int_A f d\mu + \int_A a d\mu$ 。

性质 3 设 f_1, f_2 是 $X \rightarrow [0, 1]$ 非负可测函, $A \in \mathcal{F}$, 如果 $f_1 \leq f_2$, 则 $\int_A f_1 d\mu \leq \int_A f_2 d\mu$;

性质 4 设 f_1, f_2 是 $X \rightarrow [0, 1]$ 非负可测函, $A \in \mathcal{F}$, $\int_A (f_1 \wedge f_2) d\mu \leq \int_A f_1 d\mu \wedge \int_A f_2 d\mu$;

性质 5 设 f_1, f_2 是 $X \rightarrow [0, 1]$ 非负可测函, $A \in \mathcal{F}$, $\int_A (f_1 \vee f_2) d\mu \geq \int_A f_1 d\mu \vee \int_A f_2 d\mu$;

性质 6 设 $A, D \in \mathcal{F}, f: X \rightarrow [0, 1]$ 是非负可测函数, 则 $\int_{A \cap D} f d\mu \leq \int_A f d\mu \wedge \int_D f d\mu$;

性质 7 设 $A, D \in \mathcal{F}, f: X \rightarrow [0, 1]$ 是非负可测函数, 则 $\int_{A \cup D} f d\mu \geq \int_A f d\mu \vee \int_D f d\mu$ 。

证明: 由于 $A \subset D$, 则由定义 8 得 $A \cap N_\alpha(f) \subset D \cap N_\alpha(f)$ 根据 μ 的单调性则 $\mu(A \cap N_\alpha(f)) \leq \mu(D \cap N_\alpha(f))$,

故有 $\int_A f d\mu \leq \int_D f d\mu$ 成立。

以上给出在 k -模糊测度空间下的 q -Fuzzy 和概率积分的部分性质,其余性质比较简单不再陈述。

3 医疗头盔性能优化算法的实施步骤

基于第 2 节得到的理论结果,并结合机械研究室的工作,应用于医疗头盔性能优化全过程,具体分析如下:

3.1 样本确定

影响医疗头盔性能状态的指标因素很多,因此通过查阅资料和学习,主要选取定位销轨道长度、圈梁可伸缩长度、弹簧弹力、旋钮转速、电流大小 5 个指标因素作为医疗头盔的性能优化状态评估。

3.2 数据选取

由于同一种类型的医疗头盔在生产过程中会根

据不同因素影响而产生一些误差,这样会导致在实际过程中医疗头盔的参数值会在标准值附近浮动。因此为检测这种型号医疗头盔的性能优良状态,下面随机选取 8 个医疗头盔作为研究对象。根据阅读参考文[13]得到的启发和在工科实验室做大量的实验得到下列几种影响医疗头盔性能指标因素数据,具体数据如表 1 所示。

表 1 医疗头盔性能指标因素数据
Tab. 1 Data on performance index factors of Medical helmet

评判 对象	定位销 轨道 长度 $L1/\text{mm}$	圈梁可 伸缩 长度 $\Delta L2/\text{mm}$	弹簧 弹力 F/N	旋钮 转速 $V/(\text{r/s})$	电流 大小 I/A
医疗头盔 1	106.26	177.5	316.28	0.714 4	0.340 9
医疗头盔 2	101.97	183.1	309.86	0.928 6	0.318 2
医疗头盔 3	107.69	174.7	312.98	1.000 0	0.295 5
医疗头盔 4	104.83	169.1	310.00	0.600 2	0.421 8
医疗头盔 5	100.54	180.3	313.14	0.785 8	0.363 7
医疗头盔 6	103.40	171.9	322.56	0.857 2	0.272 7
医疗头盔 7	110.55	185.9	319.42	0.643 0	0.386 4
医疗头盔 8	109.12	186.7	312.58	0.571 6	0.409 1

注:旋钮转速是用每秒钟旋转圈数定义。

3.3 隶属函数的确立和隶属度的计算

计算隶属度时有偏大型和偏小型隶属度函数。具体表达式如下:

偏大型隶属度函数表达式:

$$\mu(t_{ij}) = \frac{t_{ij} - (t_{ij})_{\min}}{(t_{ij})_{\max} - (t_{ij})_{\min}}, i = 1, 2 \cdots, n; j = 1, 2 \cdots, m$$

偏小型隶属度函数表达式:

$$\mu(t_{ij}) = \frac{(t_{ij})_{\max} - t_{ij}}{(t_{ij})_{\max} - (t_{ij})_{\min}}, i = 1, 2 \cdots, n; j = 1, 2 \cdots, m$$

由于影响医疗头盔性能状态的指标因素都为偏大型,因此下面计算隶属度的过程中均选用偏大型隶属函数进行计算。

取上式偏大型隶属函数表达式中的 $n = 8, m = 5, \mu(t_{ij})$ 是第 i 个医疗头盔的第 j 个指标因素的隶属度, t_{ij} 是第 i 个医疗头盔的第 j 个指标因素的数据

值, $(t_{ij})_{max}$ 和 $(t_{ij})_{min}$ 分别表示为第 i 个医疗头盔的第 j 指标因素的最大值与最小值。

以医疗头盔 1 的第一个指标因素定位销轨道长度为例, 结合查找表 1 数据其最大值为 110.55, 最小值为 100.54, 由偏大型隶属函数表达式计算出医疗头盔 1 的第一个指标因素的隶属度:

$$\mu(t_{11}) = \frac{106.26 - 100.54}{110.55 - 100.54} = 0.571\ 4,$$

同理可以计算 $\mu(t_{12})$ 、 $\mu(t_{13})$ 、 $\mu(t_{14})$ 、 $\mu(t_{15})$ 的值, 利用 Excel 计算方法求出其他指标因素的隶属度, 具体数据表 2 所示:

表 2 医疗头盔性能指标隶属度

Tab. 2 Membership degree of performance index of Medical helmet

评判对象	定位销	圈梁可	弹簧	旋钮	电流
	轨道	伸缩			
	长度	长度			
	L1/mm	$\Delta L2/mm$			
医疗头盔 1	0.571 4	0.477 3	0.505 5	0.333 3	0.457 4
医疗头盔 2	0.142 9	0.795 5	0.000 0	0.833 3	0.350 2
医疗头盔 3	0.714 3	0.318 2	0.245 7	1.000 0	0.152 9
医疗头盔 4	0.428 6	0.000 0	0.011 0	0.066 8	1.000 0
医疗头盔 5	0.000 0	0.636 4	0.258 3	0.500 0	0.610 3
医疗头盔 6	0.285 7	0.159 1	1.000 0	0.666 7	0.000 0
医疗头盔 7	1.000 0	0.954 5	0.752 8	0.166 7	0.762 6
医疗头盔 8	0.857 1	1.000 0	0.214 2	0.000 0	0.914 8

3.4 确定权重集

计算权重的方法有很多种, 本文选择主客观赋权法确定权重; 组合赋权法可以避免仅利用单一赋权法而导致的信息丢失; 运用此方法能提高最终的性能优化结果的精准性。

3.4.1 主观赋权法

优序图法是指多个专家对性能指标的平均值进行两两对比评分, 相对于平均值大时计为 1 分, 相对于平均值小时计为 0 分, 等于平均值时计为 0.5 分; 平均值越大意味着重要性越高, 权重也会越高。具体步骤如下:

1) 棋盘图法

利用棋盘图法请多个专家根据平均值的大小对

医疗头盔性能指标两两进行对比打分, 已知各性能指标数据的平均值分别为 105.55、178.65、314.60、0.763 0、0.315 0 得到表 3。

表 3 医疗头盔性能评分表

Tab. 3 performance score sheet of Medical helmet

关系	定位销	圈梁可	弹簧	旋钮	电流
	轨道	伸缩			
	长度	长度			
	L1/mm	$\Delta L2/mm$			
定位销轨道长度 L1/mm	0.5	1	1	0	0
圈梁可伸缩长度 $\Delta L2/mm$	0	0.5	1	0	0
弹簧弹力 F/N	0	0	0.5	0	0
旋钮转速 V/(r/s)	1	1	1	0.5	0
电流大小 I/A	1	1	1	1	0.5

2) 计算权重

每行得分总和根据公式进行归一化处理:

$$\omega_j = \frac{A_j}{\sum_{j=1}^5 A_j}$$

已知 A_j 表示每行相加的总和, $j = 1 \cdots 5$, 其中 $\sum_{j=1}^5 A_j = 12.5$ 则得到 $\omega_1 = \frac{2.5}{12.5} = 0.200\ 0$ 。

同理得到其他权重值, 最后利用优序图法得到主观权重为:

$$\omega^0 = (0.200\ 0, 0.120\ 0, 0.040\ 0, 0.280\ 0, 0.360\ 0)$$

3.4.2 客观赋权法

熵是表示整个系统无序性程度的一个度量值。

熵权法指某个指标因素的无序程度越大熵值越小, 其指标因素对最后的性能优化结果影响越大, 权重就越大。但无序性越大就会导致权重过大, 为了避免这种情况, 结合影响医疗头盔性能因素实际情况, 本文采用改进的反熵权法进行计算权重。具体步骤如下:

1) 标准化指标数据

根据各个指标因素量化程度的不同,和文[22],则需要对各个指标数值进行标准化处理。根据标准化公式:

$$b_{ij} = \begin{cases} \text{正向指标} & \frac{t_{ij} - \min\{t_{1j}, \dots, t_{nj}\}}{\max\{t_{1j}, \dots, t_{nj}\} - \min\{t_{1j}, \dots, t_{nj}\}} \\ & i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m \\ \text{负向指标} & \frac{\max\{t_{1j}, \dots, t_{nj}\} - t_{ij}}{\max\{t_{1j}, \dots, t_{nj}\} - \min\{t_{1j}, \dots, t_{nj}\}} \\ & i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

其中: b_{ij} 为第 i 个医疗头盔的第 j 个指标因素标准化的结果; t_{ij} 为第 i 个医疗头盔的第 j 个性能指标因素的值; $\max\{t_{1j}, \dots, t_{nj}\}$ 和 $\min\{t_{1j}, \dots, t_{nj}\}$ 分别为 n 个医疗头盔中第 j 个性能指标的最大值及最小值。

2) 熵权值的计算

① 根据传统的熵权法计算熵值 H_j :

$$H_j^a = -\frac{1}{\ln n} \sum_{i=1}^n p_{ij} \ln p_{ij}, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$$

其中 $p_{ij} = \frac{b_{ij}}{\sum_{i=1}^n b_{ij}}$, 如果 $p_{ij} = 0$, 那么 $p_{ij} \ln p_{ij} = 0$ 。

计算权重

$$\omega_j^a = \frac{1 - H_j^a}{m - \sum_{j=1}^m H_j^a}, j = 1, 2, \dots, m$$

熵权值对于不同指标之间数据的无序性变化程度很大,为了克服缺陷,根据熵权法表示形式和参考文献[19]重新定义一种全新的反熵权法。

② 反熵权法求反熵值

$$H_j^b = -\frac{1}{\ln n} \sum_{i=1}^n (1 - p_{ij}) \ln (1 - p_{ij}), i = 1, 2, \dots, n, j =$$

1, 2, $\dots, m$ 计算权重

$$\omega_j^b = \frac{H_j^b}{\sum_{j=1}^m H_j^b}, j = 1, 2, \dots, m$$

定义的反熵权虽然克服了熵权法的指标无序性变化程度过大而导致的权重过大,但其精确度不高,下面对反熵权法再次进行改进。

③ 改进的反熵权法

$$\omega_j^c = \frac{H_j^b}{\sum_{j=1}^m (1 - H_j^b)}, j = 1, 2, \dots, m$$

3) 计算各指标的权重

$$\omega^a = (0.1711, 0.1647, 0.2775, 0.2248, 0.1619)$$

$$\omega^b = (0.2016, 0.2020, 0.1954, 0.1989, 0.2021)$$

$$\omega^c = (0.1529, 0.1532, 0.1482, 0.1509, 0.1533)$$

4) 熵权值对比图

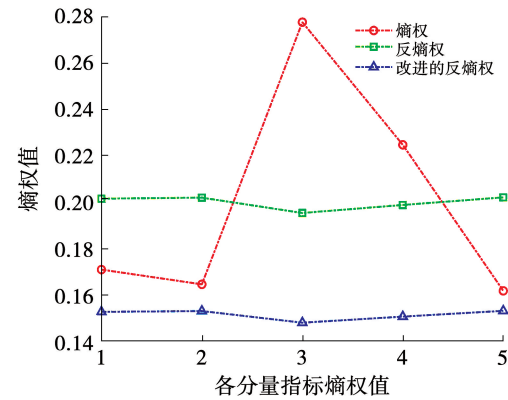


图1 熵权对比图

Fig. 1 Entropy weight comparison chart

由图1的熵权对比图知,改进的反熵权波动幅度与反熵权相比,波动幅度小;反熵权和改进的反熵权与熵权相比,改进的反熵权更接近熵权值,因此改进的反熵权更加合理、精确、客观。

3.4.3 组合赋权

优序图法得到的权重主观性太强,将改进的反熵权法和优序图法进行组合赋权,利用公式 $w = \frac{\omega^0 + \omega^c}{\sum \omega^0 + \omega^c}$ 计算组合权重,结果如下:

$$w = (0.2007, 0.1554, 0.1070, 0.2450, 0.2919)$$

3.5 医疗头盔性能指标的模糊概率值

根据上文设计的 q -Fuzzy 和概率积分的定义得出医疗头盔性能状态的模糊概率值为

$$P(A_i) = \int_A f d\mu = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \oplus \mu(A \cap N_\alpha(f))],$$

其中各个医疗头盔性能指标对应的概率值为

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(t_i) P_i,$$

根据医疗头盔的实际问题分析可知,令 $\alpha = w_j$, $\mu(A \cap N_\alpha(f)) = \mu(t_{ij})$, 上式改写为

$$P(A_i) = \sup [w_j \oplus \mu(t_{ij})] = \sup \left[\frac{w_j + \mu(t_{ij}) - w_j \mu(t_{ij})}{1 - q w_j \mu(t_{ij})} \right],$$

其中: $P(A_i)$ 为各医疗头盔性能状态的模糊概率值; w_j 为各医疗头盔性能指标所属权重; $\mu(t_{ij})$ 为第 i 个医疗头盔第 j 个性能指标值的隶属度; 根据 $P(A)$ 取值范围属于 $[0, 1]$, 且在实际问题中对 q 的取值, 及大量的计算, 因此本文取 $q = -0.5$; 将表2性能指标隶属度的数据, 及综合权重 w 代入改写后的模糊概率值计算公式, 并计算得到第1个医疗头盔模糊概率值为

$$P(A_i) = \sup \left[\frac{w_j + \mu(t_{ij}) - w_j \mu(t_{ij})}{1 + 0.5w_j \mu(t_{ij})} \right] = 0.6001,$$

同理利用 Excel 计算方法求得其他指标因素的模糊概率值,得到表 4

表 4 医疗头盔性能状态的模糊概率值
Tab.4 Fuzzy probability value of performance
state of Medical helmet

医疗头盔	$P(A)$	排序
1	0.6001	8
2	0.7721	6
3	0.8775	4
4	0.8541	5
5	0.6434	7
6	0.9465	1
7	0.8997	3
8	0.9223	2

通过对表 4 的 $P(A)$ 进行高到低排序得到结果:医疗头盔 6、医疗头盔 8、医疗头盔 7、医疗头盔 3、医疗头盔 4、医疗头盔 2、医疗头盔 5、医疗头盔 8。说明用模糊概率值计算方法得到的结果更加合理。

3.6 综合评价

3.6.1 因素集和评语集指标因素的选取

因素集: {定位销轨道长度、圈梁可伸缩长度、弹簧弹力、旋钮速度、电流大小};

评语集: {优、良、差}。

3.6.2 评判矩阵的建立

通过在工科实验室的学习,并进行多次单个医疗头盔实验,邀请到数位专家对各个医疗头盔性能指标进行 10 次实验打分;随机抽取一个医疗头盔性能指标打分情况,建立相应的评判矩阵;以医疗头盔 2 为例,建立表 5 评价。

表 5 医疗头盔 2 的数据评价
Tab.5 Dataevaluation of Medical helmet 2

评价因素	评价等级		
	优	良	差
定位销轨道长度 $L1/mm$	4	5	2
圈梁可伸缩长度 $\Delta L2/mm$	6	4	3
弹簧弹力 F/N	4	5	4
旋钮转速 $V/(r/s)$	5	4	0
电流大小 I/A	5	7	2

由表 5 可知,10 次实验过程中医疗头盔 2 的定位销轨道长度有 4 次实验专家评分结果是优,用隶属度表示为 $\frac{4}{10}=0.4$,同理是良的为 $\frac{5}{10}=0.5$,差的为

$\frac{2}{10}=0.2$ 。因此可以得到医疗头盔其他评价指标的隶属度,具体写成矩阵形式如下:

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 & 0.3 \\ 0.4 & 0.5 & 0.4 \\ 0.5 & 0.4 & 0 \\ 0.5 & 0.7 & 0.2 \end{bmatrix}$$

同理可得剩余指标因素的隶属度,写成矩阵形式如下:

$$\begin{aligned} R_1 &= \begin{bmatrix} 0.3 & 0 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 & 0.5 \\ 0.4 & 0 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix} & R_3 &= \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.7 & 0.5 & 0.3 \\ 0.5 & 0.6 & 0.2 \\ 0.7 & 0.4 & 0.1 \\ 0.5 & 0.6 & 0.3 \end{bmatrix} \\ R_4 &= \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.1 \\ 0.5 & 0.6 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 & 0.3 \\ 0 & 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 \end{bmatrix} & R_5 &= \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 & 0.1 \\ 0.5 & 0.4 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 & 0.3 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.3 & 0.6 & 0.2 \end{bmatrix} \\ R_6 &= \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 & 0.3 \\ 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.5 & 0.4 & 0.2 \\ 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 0.7 & 0.5 & 0.3 \end{bmatrix} & R_7 &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.1 & 0.1 \\ 0.5 & 0.2 & 0.4 \\ 0.6 & 0 & 0.3 \\ 0.3 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix} \\ R_8 &= \begin{bmatrix} 0.6 & 0 & 0.1 \\ 0.5 & 0.6 & 0.2 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.5 & 0.7 & 0.3 \\ 0.5 & 0.4 & 0.1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3.6.3 评判结果

已知权重为 $w = (0.2007, 0.1554, 0.1070, 0.2450, 0.2919)$

由模糊评判矩阵 R 与权重集 w 做复合运算得评判结果,即: $B = w \circ R$

则有:

$$\begin{aligned} B_1 &= w \circ R_1 = (0.3352, 0.0953, 0.3414) \\ B_2 &= w \circ R_2 = (0.4848, 0.5183, 0.1879) \\ B_3 &= w \circ R_3 = (0.6001, 0.4752, 0.2002) \\ B_4 &= w \circ R_4 = (0.2897, 0.5140, 0.1770) \end{aligned}$$

$B_5 = w \circ R_5 = (0.407\ 8, 0.523\ 0, 0.166\ 1)$
 $B_6 = w \circ R_6 = (0.614\ 1, 0.364\ 7, 0.209\ 2)$
 $B_7 = w \circ R_7 = (0.450\ 6, 0.215\ 7, 0.221\ 2)$
 $B_8 = w \circ R_8 = (0.509\ 4, 0.435\ 0, 0.164\ 5)$

3.6.4 仿真结果分析

为了更加清晰,直观的看出最终的医疗头盔性能优化结果,根据上述数据利用 Matlab 程序画出如图 2 所示。

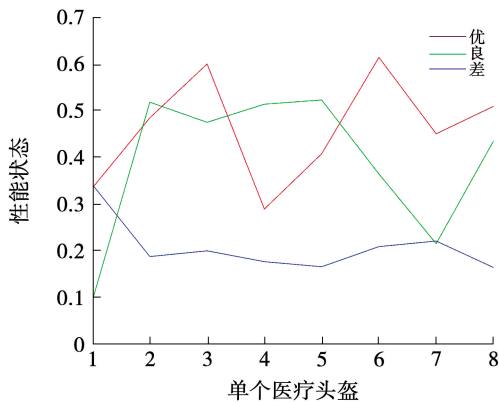


图 2 8 个医疗头盔性能状态评价结果图
Fig. 2 Diagram of performance state evaluation of eight medical helmet

通过图 2 和计算结果,并结合最大隶属原则得到医疗头盔 3,6,7,8 的性能优化结果是优的,医疗头盔 2,4,5 的性能优化结果是良好的,医疗头盔 1 的性能优化结果是差的;因此,定义的 q -Fuzzy 和概率积分法得到各医疗头盔的排序结果与传统模糊综合评价结果是完全一致的,并且利用定义的 q -Fuzzy 和概率积分法计算出的结果更简练,精准,说明定义的 q -Fuzzy 和概率积分法是合理,实用性强。

4 结 论

本文首先通过对三角模定义,定理的学习进而再构造出一对具有 T 三角模与 S 三角模性质的 q -算子,使得构造后的三角模适用性更广泛;接下来给出了 q -模糊测度,定义了 q -模糊测度空间下的 q -Fuzzy 和概率积分,扩大了模糊积分的研究领域;最后将其应用到医疗头盔性能优化中,在具体实施的过程中,利用优序图法和改进的反熵权法组合赋权的方法计算权重,通过仿真程序作图进行对比得到最优结果,并与模糊综合评判结果对比完全一致;说明 q -Fuzzy 和概率积分法的精准性与简练性;该方法在计算的过程中克服了模糊性和复杂性,此方法能

否应用到机械领域的其他方面,这需要进行下一步的探索。

参 考 文 献:

[1] SUGENO M. Theory of Fuzzy Integrals and Its Applications. Ph. D. Dissertation[J]. Tokyo Institute of Technology, 1974: 23.
[2] 赵汝怀. (N)模糊积分[J]. 数学研究与评论, 1981, 1(2): 55.
ZHAO Ruhuai. (N) Fuzzy Integral[J]. Journal of Mathematical Research and Exposition, 1981, 1(2): 55.
[3] BERNARD De Baets. Triangular Norms[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1999, 104(1): 1
[4] 张慧,李书高,李伯权. 基于三角函数型可加性生成子生成的决策算子[J]. 模糊系统与数学, 2018, 32(3): 155.
ZHANG Hui, LI Shugao, LI Boquan. The Decision Operator Based on the Triangular Function Type Additive Generator [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2018, 32(3): 155.
[5] 高淑环. 模糊积分发展现状的研究[D]. 沈阳: 东北大学, 2014.
[6] 曹周斌,吴健荣. 模糊集上的广义模糊积分[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2017, 39(4): 56.
CAO Zhoubin, WU Jianrong. Generalized Fuzzy Integral on a Fuzzy Set[J]. Journal of Southwest University (Natural Science Edition), 2017, 39(4): 56.
[7] 张春琴,李纯果. 关于 Sugeno 测度的收敛理论[J]. 数学的实践与认识, 2019, 49(4): 201.
ZHANG Chunqin, LI Chunguo. Convergence Theory on Sugeno Measures [J]. MATHEMATICS IN PRACTICE AND THEORY, 2019, 49(4): 201.
[8] ZHANG Deli, MESIAR Radko, PAP Endre. Pseudo-integral and Generalized Choquet Integral[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2020, 446(5): 193.
[9] 赵辉,姜欣格,单云霄. 可信测度空间下的以积算子模糊概率积分研究[J]. 哈尔滨理工大学学报, 2021, 26(2): 161.
ZHAO Hui, JIANG Xinge, SHAN Yunxiao. Study on the Fuzzy Probability Integral of Multiplicative Operators under the Trustworthy Measure Space[J]. Journal of Harbin University of Science and Technology, 2021, 26(2): 161.
[10] 丁书祯. 浅谈单兵防弹装备的现状与发展[J]. 高科技纤维与应用, 2000(2): 14.
DING Shuzhen. On the Status Quo and Development of Individual Bulletproof Equipment[J]. High-Tech Fiber & Application, 2000(2): 14.
[11] HA Y, ROLLAND J P. Optical Assessment of Head-

- mounted Displays Invisual Space[J]. Appl. Opt. 2002, 41:5282.
- [12] 张亚君,黄小华,李金新,等. 分布式可控制医疗制冷头盔[J]. 杭州电子科技大学学报,2011,31(2):17.
ZHANG Yajun, HUANG Xiaohua, LI Jinxin, et al. Distributed Control Medical Cooling Helmet[J]. Journal of Hangzhou Dianzi University, 2011,31(2):17.
- [13] 王彦杰,孟家光,张永锋. 芳纶针织增强体头盔制作及基本性能研究[J]. 成都纺织高等专科学校学报, 2017,34(1):104.
WANG Yanjie, MENG Jianguang, ZHANG Yongfeng. Production and Basic Properties Study of Aramid Knitted Reinforced Helmet[J]. Journal of Chengdu Textile College, 2017,34(1):104.
- [14] WEN Juan, et al. Effect of Helmet Therapy in the Treatment of Positional Head Deformity[J]. Journal of Paediatrics and Child Health, 2020, 56(5):735.
- [15] YEONGHOON Kang, SUNGMIN Kim. Development of Helmet Mold Design System Using 3D Anthropometric Analysis[J]. International Journal of Clothing Science and Technology, 2020, 32(3):446.
- [16] 张征,朱毅,杨云振,等. 头盔式吸氧高压氧治疗在气管切开患者的应用效果[J]. 宁夏医学杂志,2018,40(6):508.
ZHANG Zheng, ZHU Yi, YANG Yunzhen, et al. Therapeutic Effect of Helmet Mounted Oxygen Inhalation Hyperbaric Oxygen Therapy in Patients with Tracheotomy[J].
- [17] 胡一河,许圆,张正姬,等. 苏州市慢性病综合防控示范区建设效果评价[J]. 中国公共卫生管理,2017,33(2):160.
HU Yihe, XU Yuan, ZHAGN Zhengji, et al. Effect of Comprehensive Chronic Disease Prevention and Control Demonstration Area in Suzhou[J]. China J of PHM, 2017,33(2):160.
- [18] 石明辉,孟选宁,程志国,等. 模糊概率在甜瓜品种综合评价中的应用[J]. 甘肃农业科技,2009(3):10.
SHI Minghui, MENG Xuanning, CHENG Zhiguo, et al. Application of Comprehensive Assessment on Fuzzy Mathematics to Muskmelon Varieties[J]. Gansu A gr. Sci. and Techn., 2009(3):10.
- [19] 孙化军,马文姬,闫向前,等. 模糊概率法综合评价大豆新品种的初步研究[J]. 大豆科技,2018(2):27.
SUN Huajun, MA Wenya, YAN Xiangqian, et al. Preliminary Study on Comprehensive Evaluation of New Soybean Varieties by Fuzzy Probability Method[J]. Soybean Science & Technology, 2018(2):27.
- [20] 侯珺,任伟. 15个夏芝麻新品种综合评价[J]. 广东蚕业,2020,54(5):9.
HOU Jun, REN Wei. Comprehensive Evaluation of 15 New Summer Sesame Varieties[J]. Guangdong Sericulture, 2020,54(5):9.
- [21] 柳铨,邱彦章,李昌彪. 用于综合评判的一种权重计算方法[J]. 微电子学与计算机,2006(6):81.
LIU Yu, QIU Yanzhang, LI Changbiao. A Method of Weight Computing in the Comprehensive Estimation[J]. Microelectronics and Computer, 2006(6):81.
- [22] 李晓津,史晨钰,宋蕾. 因子分析与熵值法下国内空港与海港企业财务能力研究[J]. 数学的实践与认识, 2021,51(15):285.
LI Xiaojin, SHI Chenyu, SONG Lei. Research on the Financial Ability of Domestic Airport and Seaport Enterprises Based on Factor Analysis and Entropy Method[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2021,51(15):285.
- [23] 张海瑞,韩冬,刘玉娇,等. 基于反熵权法的智能电网评价[J]. 电力系统保护与控制,2012,40(11):24.
ZHANG Hairui, HAN Dong, LIU Yujiao, et al. Smart Grid Evaluation Based on Anti-entropy Weight Method[J]. Power System Protection and Control, 2012, 40(11):24.
- [24] 卢璐. 基于优序图法的高校图书馆微信公众平台评价研究[D]. 郑州:郑州大学,2018.

(编辑:温泽宇)