

Newton 分裂方法的 Kantorovich 型定理

潘状元, 殷巧玉

(哈尔滨理工大学 应用科学学院, 黑龙江 哈尔滨 150080)

摘 要:在 Kantorovich 型定理的条件下, 给出了 Newton 型分裂方法的存在性收敛性定理.

关键词:Newton 型分裂法; 存在性收敛性定理; 非线性方程组

中图分类号: O242.23 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2009)03-0065-04

The Kantorovich Theorem of Newton-type Decomposition Methods

PAN Zhuang-yuan, YIN Qiao-yu

(School of Applied Science, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: In this paper, the existence and convergence theorem for Newton-type decomposition methods are given under the conditions of the Kantorovich-type theorem.

Key words: Newton-type decomposition method, existence and convergence theorem, nonlinear system of equations

1 背景知识

设 Z 为 Banach 空间, $F: Z \rightarrow Z$ 为 Frechet 可微算子, 求解下列非线性算子方程组

$$F(z) = 0 \quad (1)$$

的 Newton 分裂方法如下:

$$\left. \begin{aligned} f(x_n, y_n) + \partial_1 f(x_n, y_n)(x_{n+1} - x_n) &= 0 \\ \partial_1 f(x_n, y_n)p_n + \partial_2 f(x_n, y_n) &= 0 \\ g(x_{n+1}, y_n) + [\partial_1 g(x_n, y_n)p_n + \\ \partial_2 g(x_n, y_n)](y_{n+1} - y_n) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中: $Z = X \times Y$, $F(z) = (f(x, y), g(x, y))$, $x \in X$, $y \in Y$, 取 $(x_0, y_0) \in Z$

由于这种分裂方法^[1]具有可并行计算、存储单元少、计算量少等优点, 引起人们的兴趣, 文[2]给出了这种 Newton-type 分裂方法的局部收敛性定理^[3-4], 而对一种方法的研究, 只有给出存在性及收

敛性定理^[5-6], 才可以说这种方法在理论上是完善的. 本文对这种 Newton-type 分裂方法作了研究, 给出了其 Kantorovich 型存在性及收敛性定理^[7-9].

2 主要结果及证明

引理 1 设 $F: D \subset Z \rightarrow X$, $g: D \rightarrow Y$ 为连续可微映射, 满足下列条件:

$$\| \partial f(x, y) - \partial f(u, v) \| \leq L(\|x - u\| + \|y - v\|) \quad (3)$$

$$\| \partial g(x, y) - \partial g(u, v) \| \leq L(\|x - u\| + \|y - v\|) \quad (4)$$

$$\| \partial f(x_0, y_0)^{-1} \| \leq \beta_0 \quad (5)$$

$$\| [\partial_1 g(x_0, y_0)p_0 + \partial_2 g(x_0, y_0)]^{-1} \| \leq \beta_0 \quad (6)$$

$$\| \partial_2 f(x, y) \| \leq A \quad (7)$$

$$\| \partial_1 g(x, y) \| \leq C \quad (8)$$

$$\| \partial_2 g(x_1, y_1)^{-1} \| \leq Q \quad (9)$$

$$\|\hat{a}f(x_0, y_0)^{-1}f(x_0, y_0)\| \leq \eta_0 \quad (10)$$

$$\|[\hat{a}g(x_0, y_0)P_0 + \hat{a}_2g(x_0, y_0)]^{-1} \times \\ g(x_1, y_0)\| \leq \sigma_0 \quad (11)$$

$$\frac{\beta_0 L \tau_0}{1 - \lambda - \beta_0 L \tau_0} < 1 \quad (12)$$

$$\frac{QL\tau_0}{1 - \lambda - QL\tau_0} < 1 \quad (13)$$

$$\frac{QCA\beta_0}{(1 - \lambda - \beta_0 L \tau_0)(1 - \lambda - QL\tau_0)} < 1 \quad (14)$$

令

$$B = \frac{2QL(1 + A\beta_0) + \beta_0 + 2A\beta_0}{(1 - \lambda - QL\tau_0)(1 - \lambda - \beta_0 L \tau_0)^2 - QCA\beta_0} \quad (15)$$

其中 $\lambda < 1$, 则对 Newton 分裂方法有

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \frac{1}{2}B \left\{ (\|x_n - x_{n-1}\| + \|y_n - y_{n-1}\|)^2 + \|y_n - y_{n-1}\| \right\} \quad (16)$$

$$\|y_{n+1} - y_n\| \leq \frac{1}{2}B \left\{ (\|x_{n+1} - x_n\| + \|y_n - y_{n-1}\|)^2 + (\|x_n - x_{n-1}\| \|y_n - y_{n-1}\|) + [(\|x_n - x_{n-1}\| + \|y_n - y_{n-1}\|)^2] + (\|x_n - x_{n-1}\| + \|y_n - y_{n-1}\|) \times \|x_{n+1} - x_n\| \right\} \quad (17)$$

证明: 令 $\tau_n = \|x_{n+1} - x_n\| + \|y_{n+1} - y_n\|$, $\eta_n = \|x_{n+1} - x_n\|$, $\sigma_n = \|y_{n+1} - y_n\|$, 由公式 (10) 得

$$\|x_1 - x_0\| = \|\hat{a}f(x_0, y_0)^{-1}f(x_0, y_0)\| \leq \eta_0$$

由式 (3) 和式 (7) 可得

$$\|f(x_1, y_1)\| \leq \frac{1}{2}L(\|x_1 - x_0\| + \|y_1 - y_0\|)^2 + A\|y_1 - y_0\|$$

由式 (3)、式 (5) 和式 (12) 可得

$$\|\hat{a}f(x_1, y_1) - \hat{a}f(x_0, y_0)\| \leq L\tau_0, \quad \beta_0 L \tau_0 < 1$$

根据摄动引理^[10]可得

$$\|\hat{a}f(x_1, y_1)^{-1}\| \leq \frac{\beta_0}{1 - \beta_0 L \tau_0} \quad (18)$$

则有

$$\|x_2 - x_1\| \leq \frac{1}{2}B \left\{ (\|x_1 - x_0\| + \|y_1 - y_0\|)^2 + \|y_1 - y_0\| \right\}$$

于是存在一个很小的常数 $\alpha_1 > 0$, 使得 $\eta_1 \leq$

$$\frac{1}{2}B\{(\eta_0 + \sigma_0)^2 + \sigma_0\} \leq \alpha_1 \tau_0$$

由式 (11) 可得

$$\|y_1 - y_0\| = \|[\hat{a}g(x_0, y_0)P_0 + \hat{a}_2g(x_0, y_0)]^{-1}g(x_1, y_0)\| \leq \sigma_0$$

再由式 (3)、式 (5) 和式 (8) 可得

$$\|g(x_2, y_1)\| \leq \frac{1}{2}L(\|x_2 - x_1\| + \|y_1 - y_0\|)^2 + L\|P_0 + I\|(\|x_1 - x_0\| \|y_1 - y_0\|) + \frac{1}{2}L\beta_0 C [(\|x_1 - x_0\| + \|y_1 - y_0\|)^2] + L(\|x_1 - x_0\| + \|y_1 - y_0\|) \|x_2 - x_1\|$$

由式 (5) 和式 (18) 得

$$\begin{aligned} \|P_0\| &\leq A \|\hat{a}f(x_0, y_0)^{-1}\| \leq A\beta_0 \\ \|P_1\| &\leq A \|\hat{a}f(x_1, y_1)^{-1}\| \leq \frac{A\beta_0}{1 - \beta_0 L \tau_0} \end{aligned} \quad (19)$$

又由式 (8)、式 (9)、式 (14) 及式 (19) 得

$$\|\hat{a}g(x_1, y_1)P_1 + \hat{a}_2g(x_1, y_1) - \hat{a}_2g(x_1, y_1)\| \leq \frac{A\beta_0 C}{1 - \beta_0 L \tau_0}, \quad \frac{A\beta_0 CQ}{1 - \beta_0 L \tau_0} < 1$$

根据摄动引理得

$$\|[\hat{a}g(x_1, y_1)P_1 + \hat{a}_2g(x_1, y_1)]^{-1}\| \leq \frac{(1 - \beta_0 L \tau_0)Q}{1 - \beta_0 L \tau_0 - QCA\beta_0}$$

再由式 (15) 可得

$$\|y_2 - y_1\| \leq \frac{1}{2}B \left\{ (\|x_2 - x_1\| + \|y_1 - y_0\|)^2 + (\|x_1 - x_0\| \|y_1 - y_0\|) + (\|x_1 - x_0\| + \|y_1 - y_0\|)^2 + (\|x_1 - x_0\| + \|y_1 - y_0\|) \times \|x_2 - x_1\| \right\}$$

于是存在一个很小的常数 $\beta_1 > 0$, 使得

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\leq \beta_1 \eta_1 \leq \beta_1 \alpha_1 \tau_0 \\ \tau_1 &\leq \alpha_1 \tau_0 + \beta_1 \alpha_1 \tau_0 \leq \lambda \tau_0 \end{aligned}$$

仿上述推导, 利用数学归纳法对引理进行证明.

当 $n = 0, 1$ 时, 由上面的推导可知引理成立, 下面假设 $n = k$ 时引理成立, 则有

$$\|\hat{a}f(x_{k-1}, y_{k-1})^{-1}\| \leq \frac{\beta_0}{1 - \beta_0 L \sum_{i=0}^{k-2} \tau_i} \quad (20)$$

$$\|P_{k-1}\| \leq \frac{A\beta_0(1 - \lambda)}{1 - \lambda - \beta_0 L \tau_0(1 - \lambda^{k-1})} \quad (21)$$

$$\|\partial_2 g(x_{k-1}, y_{k-1})^{-1}\| \leq \frac{Q}{1 - QL \sum_{i=0}^{k-2} \lambda^i \tau_0} \quad (22)$$

成立.

并且由式 (3)、式 (12) 和式 (20) 可得

$$\begin{aligned} \|\partial_1 f(x_k, y_k) - \partial_1 f(x_{k-1}, y_{k-1})\| &\leq \\ &L\tau_{k-1} \leq \lambda^{k-1} L\tau_0 \\ \frac{\beta_0 L \tau_0 \lambda^{k-1}}{1 - \beta_0 L \sum_{i=0}^{k-1} \lambda^i \tau_0} &< 1 \end{aligned}$$

由摄动引理可得

$$\|\partial_1 f(x_k, y_k)^{-1}\| \leq \frac{\beta_0 (1 - \lambda)}{1 - \lambda - \beta_0 L \tau_0} \quad (23)$$

由式 (3) 和式 (7) 得

$$\begin{aligned} \|f(x_k, y_k)\| &\leq \frac{1}{2} L (\|x_k - x_{k-1}\| + \\ &\|y_k - y_{k-1}\|)^2 + A1 \|y_k - y_{k-1}\| \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x_k\| &\leq \frac{1}{2} B \left\{ (\|x_k - x_{k-1}\| + \right. \\ &\left. \|y_k - y_{k-1}\|)^2 + \|y_k - y_{k-1}\| \right\} \end{aligned}$$

于是存在一个很小的常数 $\alpha_k > 0$, 使得

$$\eta_k \leq \frac{1}{2} B \left\{ (\eta_k + \sigma_k)^2 + \sigma_k \right\} \leq \alpha_k \tau_{k-1}$$

再由式 (3)、式 (4)、式 (7)、式 (8)、式 (20) 及式 (21) 可得

$$\begin{aligned} \|g(x_{k+1}, y_k)\| &\leq \frac{1}{2} L (\|x_{k+1} - x_k\| + \|y_k - y_{k-1}\|)^2 + \\ &L (\|x_k - x_{k-1}\| + \|y_k - y_{k-1}\|) \times \\ &\|x_{k+1} - x_k\| + \left[\frac{A\beta_0}{1 - \lambda - \beta_0 L \tau_0} + 1 \right] \times \\ &(\|x_k - x_{k-1}\| \|y_k - y_{k-1}\|) + \\ &\frac{1}{2} \cdot \frac{L\beta_0 C}{1 - \lambda - \beta_0 L \tau_0} \left[(\|x_k - x_{k-1}\| + \right. \\ &\left. \|y_k - y_{k-1}\|)^2 \right] \end{aligned}$$

并且由式 (4)、式 (13) 和式 (22) 可得

$$\begin{aligned} \|\partial_2 g(x_k, y_k) - \partial_2 g(x_{k-1}, y_{k-1})\| &\leq \\ &L\tau_{k-1} \leq L\lambda^{k-1} \tau_0 \\ \frac{QL\tau_{k-1}}{1 - QL \sum_{i=0}^{k-2} \lambda^i \tau_0} &< 1 \end{aligned}$$

由摄动引理可得

$$\|\partial_2 g(x_k, y_k)^{-1}\| \leq \frac{(1 - \lambda)Q}{1 - \lambda - QL(1 - \lambda^k)\tau_0} \quad (24)$$

由式 (23) 可得

$$\|P_k\| \leq \frac{(1 - \lambda)A\beta_0}{1 - \lambda - \beta_0 L \tau_0} \quad (25)$$

由式 (8) 和式 (22) 可得

$$\begin{aligned} \|\partial_1 g(x_k, y_k) P_k + \partial_2 g(x_k, y_k) - \partial_2 g(x_k, y_k)\| \\ \leq \frac{(1 - \lambda)A\beta_0 C}{1 - \lambda - \beta_0 L \tau_0} \end{aligned}$$

再由式 (14) 和式 (24) 可得

$$\frac{(1 - \lambda)^2 QCA\beta_0}{(1 - \lambda - \beta_0 L \tau_0)(1 - \lambda - QL\tau_0)} < 1$$

于是由摄动引理可得

$$\begin{aligned} \|[\partial_1 g(x_k, y_k) P_k + \partial_2 g(x_k, y_k)]^{-1}\| &\leq \\ &\frac{Q}{(1 - \lambda - QL\tau_0)(1 - \lambda - \beta_0 L \tau_0) - QCA\beta_0} \end{aligned}$$

再根据式 (15) 可得

$$\begin{aligned} \|y_{k+1} - y_k\| &\leq \frac{1}{2} B \left\{ (\|x_{k+1} - x_k\| + \|y_k - y_{k-1}\|)^2 + \right. \\ &(\|x_k - x_{k-1}\| \|y_k - y_{k-1}\|) + \\ &[(\|x_k - x_{k-1}\| + \|y_k - y_{k-1}\|)^2] + \\ &(\|x_k - x_{k-1}\| + \|y_k - y_{k-1}\|) \times \\ &\left. \|x_{k+1} - x_k\| \right\} \end{aligned}$$

于是存在一个很小的常数 $\beta_k > 0$, 使得

$$\sigma_k \leq \beta_k \eta_k \leq \beta_k \alpha_k \tau_{k-1}$$

$$\tau_k = \eta_k + \sigma_k \leq \alpha_k \tau_{k-1} + \beta_k \alpha_k \tau_{k-1} \leq \lambda \tau_{k-1} \leq \lambda^k \tau_0$$

于是当 $n = k + 1$ 时引理成立.

定理 在引理的条件下, 同时又满足

$$2N\tau_0 \leq 1 \quad (26)$$

其中, $N = \max\{B, B^2\}$, 则从 x_0, y_0 出发由 Newton 分裂方法所产生的序列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 分别在闭球 $S_1\left[x_0, \frac{1}{2}\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)\tau_0 + \eta_0\right]$ 和 $S_2\left[y_0, \frac{\tau_0}{1-\lambda} + \sigma_0\right]$ 内, 收敛于方程组 (1) 在球 S_1, S_2 内的唯一解 (x^*, y^*) , 且有误差估计

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{\lambda^{2(n-2)}}{2} \left\{ \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \right\} \tau_0 \quad (27)$$

$$\|y_n - y^*\| \leq \lambda^{2(n-1)} \left\{ \frac{1}{1-\lambda} \right\} \tau_0 \quad (28)$$

证明: 由引理及条件 (26) 有

$$\|y_{n+1} - y_n\| \leq 2B\tau_{n-1}^2 \quad (29)$$

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \frac{1}{2} B (\lambda^{2n-2} \tau_0^2 + 2B\lambda^{2n-4} \tau_0^2) \quad (30)$$

对任意正整数 p , 利用式 (30) 得

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq \frac{\lambda^{2(n-2)}}{2} \left\{ \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \right\} \tau_0 \quad (31)$$

再利用式 (29) 得

$$\|y_{n+p} - y_n\| \leq \lambda^{2(n-1)} \left(\frac{1}{1-\lambda} \right) \tau_0 \quad (32)$$

由此可知 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 是柯西列, 因而 x_n 和 y_n 有极限, 设极限分别为 x^*, y^* , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y^*$, 且有

$$\|x_n - x_0\| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda} \right) \tau_0 + \eta_0 \quad (33)$$

$$\|y_n - y_0\| \leq \frac{\tau_0}{1-\lambda} + \sigma_0 \quad (34)$$

由此可得 $x^* \in \overline{S_1}, y^* \in \overline{S_2}$. 下面证明 (x^*, y^*) 是方程组 $\begin{cases} f(x, y) \\ g(x, y) \end{cases} = 0$ 的解.

由引理及式 (33) 和式 (34) 得

$$\|f(x_n, y_n)\| \leq \left[L \left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda} \cdot \frac{\tau_0}{2} + 2\eta + \frac{\tau_0}{1-\lambda} + \sigma \right) + \|\partial f(x_0, y_0)\| \right] \|x_{n+1} - x_n\|$$

又由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0$, 以及 $f(x, y)$ 的连续性, 得 $f(x^*, y^*) = 0$

由引理及式 (33) 和式 (34) 得

$$\|g(x_{n+1}, y_n)\| \leq \left[\frac{(1-\lambda)A\beta_0 C}{1-\lambda-\beta_0 L\tau_0} + L \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda} \right) \tau_0 + \eta_0 + \frac{\tau_0}{1-\lambda} + \sigma \right) + \|\partial g(x_0, y_0)\| \right] \|y_{n+1} - y_n\|$$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_{n+1} - y_n\| = 0$, 以及 $g(x, y)$ 的连续性, 得 $g(x^*, y^*) = 0$

又由式 (31) 和式 (32), 令 $p \rightarrow \infty$, 得

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{\lambda^{2(n-2)}}{2} \left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda} \right) \tau_0$$

$$\|y_n - y^*\| \leq \lambda^{2(n-1)} \left(\frac{1}{1-\lambda} \right) \tau_0$$

定理证毕.

3 结 语

本文给出了 Newton 分裂方法的 Kantorovich 型

定理. 在不知道非线性方程组的解是否存在的情况下, 只要根据初始近似点的信息就可推断出非线性方程组的解是否存在并且唯一. 在理论上完善了 Newton 分裂方法的收敛性定理.

参 考 文 献:

- [1] HOYER W, SCHMIDT J W. Newton - type Decomposition Methods for Equations Arising in Networkanalysis [J]. Z Angew. Math Mech, 1984, 64 (2): 397 - 405.
- [2] JOCHEN W, HOYER Wolfgang, HAVFE Christian Consistent Approximations in Newton - type Decomposition Methods [J]. Numer Math, 1985, 47 (3): 413 - 425.
- [3] 冯国忱. 非线性方程组迭代解法 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1989: 115 - 118.
- [4] DANNIS K A. Local Convergence Theorems for Newton Methods [J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2001, 8 (2): 253 - 268.
- [5] YAKOVLEV M N. A Convergence Theorem for the Newton method [J]. Journal of Mathematical Sciences, 2000, 101 (4): 3372 - 3375.
- [6] 李福祥, 潘状元. 加速迭代格式的构造 [J]. 哈尔滨理工大学学报, 2006, 11 (3): 52 - 54.
- [7] 潘状元, 刘锡祥. Newton 分裂方法的存在性收敛性定理 [J]. 电机与控制学报, 1996 (3): 387 - 395.
- [8] WOLFEM A. An Existence-convergence Theorem for a Class of Iterative Methods [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1980, 31 (1): 125 - 129.
- [9] PENBG Jian-wen. The Existence and Uniqueness of Solution and the Convergence of a Multi-step Iterative Algorithm for a System of Variational Inclusions with (A, η, m) -accretive Operators [J]. Journal of Global Optimization, 2007, 39 (3): 441 - 457.
- [10] DEUFLHARD Peter. Newton Methods for Nonlinear Problems A fine Invariance and Adaptive Algorithms [M]. 北京: 科学出版社, 2006: 45 - 56.

(编辑: 付长缨)