

二阶非线性 Schrodinger 方程整体弱解的存在性

李宝平¹, 曾同才²

(1 电子科技大学 成都学院文理系, 四川 成都 611731; 2 中国燃气涡轮研究院, 四川 成都 610500)

摘 要: 探讨了一类二阶非线性 Schrodinger 方程解的初边值问题. 该方程用来描述上方交混的震动传播. 在正定能量的定义下, 利用 Galerkin 方法证明了初边值问题整体弱解的存在性.

关键词: 非线性 Schrodinger 方程; 初边值问题; 整体弱解; 存在性

中图分类号: O175.26 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-2683(2009)01-0096-02

Existence of Global Weak Solutions for Second-order Nonlinear Schrodinger Equation

LI Bao-ping¹, ZENG Tong-cai²

(1. Liberal Art and Sciences Department, Chengdu College of Uestc, Chengdu 611731, China;

2. China Gas Turbine Establishment, Chengdu 610500, China)

Abstract: The initial-boundary problem of the second-order nonlinear Schrodinger equation was discussed. This class of equations is introduced to describe the upper-hybrid oscillation propagation. In the definition of positive energy, the existence of global weak solution of the initial-boundary problem was proved by Galerkin method.

Key words: nonlinear Schrodinger equation; initial-boundary problem; global weak solutions; Galerkin method

1 引 言

非线性 Schrodinger 方程来源于量子场论, 它在非线性光学和激光束的传播中起着重要的作用. 因而受到许多数学家和物理学家的关注. 对于非线性 Schrodinger 方程的一般情形, 里亚普诺夫静态孤立子解已经在文 [1] 中讨论, 而对于一般情形及耦合 Schrodinger 方程组的解的存在性, 正则性, 长时间性等已经有了一系列的研究结果, 其中文 [2] 用轨道的思想对解做了研究 [2], 文 [3] 利用对称性约化证明了解的存在性. 本文将利用 Galerkin 方法研究二阶非线性 Schrodinger 方程整体弱解的存在性.

2 问题的分析与论证

具有如下形式的二阶非线性 Schrodinger 方程:

$$i\phi_t + \Delta\phi + \phi\Delta|\phi|^2 = \phi|\phi|^2, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbf{R}^n \quad (1)$$

其中 $\phi = \phi(t, x)$, Δ 是拉普拉斯算子. 式 (1) 满足下列条件.

$$\phi(x, 0) = \phi_0(x) \quad x \in \mathbf{R}^n \quad (2)$$

$$\phi|_{\Omega} = 0 \quad (3)$$

1) 构造近似解. 设 $\{\omega_j(x)\}$ 为问题 $\Delta\omega + \lambda\omega = 0$ 及 $\omega|_{\Omega} = 0$ 的特征函数系. 则已知 $\{\omega_j\}$ 在 $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ 中稠密. 则问题 (1) 的近似解为

$$\phi_m(x, t) = \sum_{j=1}^m g_m(t) \omega_j(x) \quad 1 \leq j \leq m$$

其中 g_m 满足

$$i(\phi_{m,t}, \omega_j) + (\Delta\phi_m, \omega_j) + (\phi_m \Delta|\phi_m|^2, \omega_j) = (\phi_m |\phi_m|^2, \omega_j) \quad (4)$$

且满足初始条件. $\phi_{m,0} = \sum_{j=1}^m a_m \omega_j \rightarrow \phi_0$ 在

$H_0^1(\Omega) \cap L_2(\Omega)$ 中强收敛, 当 $m \rightarrow \infty$

2) 先验估计在式 (2) 两边同时乘以 $g'_m(t)$, 在对 s 从 1 到 m 求和, 于是可以得到

$$i(\phi_{m,t}, \phi_{m,t}) + (\Delta \phi_m, \phi_{m,t}) + (\phi_m \Delta |\phi_m|^2, \phi_{m,t}) = (\phi_m |\phi_m|^2, \phi_{m,t})$$

考虑实部, 得

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|\nabla \phi_m\|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla |\phi_m|^2\|^2 + \frac{1}{4} \|\phi_m\|_{L^4(\Omega)}^4 \right) = 0$$

两边对 t 积分,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\nabla \phi_m\| + \frac{1}{2} \|\nabla |\phi_m|^2\|^2 + \frac{1}{4} \|\phi_m\|_{L^4(\Omega)}^4 = \\ \frac{1}{2} \|\nabla \phi_m(0)\| + \frac{1}{2} \|\nabla |\phi_m(0)|^2\|^2 + \\ \frac{1}{4} \|\phi_m(0)\|_{L^4(\Omega)}^4 \end{aligned}$$

由 $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ 为 $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ 的等价模及 $\phi_m(x, 0) \rightarrow \phi_0(x)$ 于 $H_0^1(\Omega)$, 可推得 $\|\nabla \phi_m(0)\|^2$, $\|\nabla |\phi_0(0)|^2\|^2$ 有界.

对于 $\|\phi_m(0)\|_{L^4(\Omega)}^4$ 用嵌入定理, 要求: $k = 2, p = 2$

① $n = 1, 2, 3$ 时, $kp = 4 > n, 2 \leq q \leq \infty$;

② $n = 4$ 时, $kp = 4 = n, 2 \leq q < \infty$;

③ $n \geq 4$ 时, $kp = 4 < n, 2 \leq q \leq \frac{np}{n - kp} = \frac{2n}{n - 4}$

由嵌入定理, 得

$$\|\phi_m\|_4 \leq C \|\phi_m\|_{H_0^1(\Omega)}$$

$$\|\phi_m\|_{H_0^1(\Omega)} \text{ 有界} \Rightarrow \|\phi_m\| \text{ 有界.}$$

这样 $\|\nabla \phi_m\|^2, \|\nabla |\phi_m|^2\|^2, \|\phi_m\|_{L^4(\Omega)}^4 \leq C$ 对一切 $m, 0 \leq t \leq \infty$ 成立.

3) 近似解的收敛性. 由 2) 可知, 存在 ϕ 及 $\{\phi_m\}$ 的子序列 $\{\phi_v\}$, 使得当 $v \rightarrow \infty$ 时 $\phi_v \rightarrow \phi$ 于 $L^\infty(0, \infty, H_0^1(\Omega))$ 中弱收敛;

$\nabla \phi_m \rightarrow \nabla \phi$ 于 $L^\infty(0, \infty, L^2(\Omega))$ 中弱收敛.

在式 (4) 中固定 j , 令 $m = v \rightarrow +\infty$, 则有

$$i(\phi_t, \omega_j) + (\Delta \phi, \omega_j) + (\phi \Delta |\phi|^2, \omega_j) = (\phi |\phi|^2, \omega_j)$$

且此等式对 $\forall$ 固定 j 成立.

又 $\{\omega_j\}$ 为问题 $\Delta \omega + \lambda \omega = 0$ 及 $\omega_j|_{\partial\Omega} = 0$ 的特征

函数系, 在 $L^2(\Omega)$ 中稠密, 故 $\forall v \in L^2(\Omega)$ 中 v 可用 ω_j 线性表示, 于是

$$i(\phi_t, v) + (\Delta \phi, v) + (\phi \Delta |\phi|^2, v) = (\phi |\phi|^2, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

即 ϕ 满足方程.

4) 再证 $\phi(t)$ 满足初边值. 由 $\phi_m(x, 0) \rightarrow \phi_0(x)$ 于 $H_0^1(\Omega)$ 及 $\phi_m \rightarrow \phi$ 可推得

$$\phi(x, 0) \rightarrow \phi_0(x)$$

又由 $\phi_m(x, t) = \sum_{j=1}^m g_j(t) \omega_j(x)$ 的设法, $\omega|_{\partial\Omega} = 0$, 所以求和等于 0, 根据 3), 则 $\phi|_{\partial\Omega} = 0$ 即满足边界条件.

综合 1) - 4) 即证明了整体弱解的存在性.

采用文 [3] 中广义解的定义, 得到如下整体弱解的存在性定理.

定理 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为具有充分光滑边界的有界区域, 且 $\phi_0(x) \in H_0^1(\Omega) \cap L_2(\Omega)$, 则问题 1) 在满足 2)、3) 条件下存在整体弱解.

参考文献:

- [1] LAEDLKE EW, SPATSCHEK KH, STENFOLD L. Evolution Theorem for a Class of Perturbed Envelope Soliton Solutions[J]. J. Math. Phys, 1983, 24: 2764 - 2769.
- [2] OTIS C, WRIGHT M, GREGORY Forest. On the Backlund-gage Transformation and Homoclinic Orbits of a Coupled Nonlinear System[J]. Physica, 2000: 104 - 106.
- [3] 郭柏灵. Initial Boundary Value Problem for One Class of Multidimensional Nonlinear Schrodinger-Boussinesq Type Equations[J]. 数学研究与评论, 1998, 8(1): 61 - 71.
- [4] AVRON J, HERBST I, SMON B. Schrodinger Operator with Magnetic Fields[J]. J. Duke Math, 1978, (45): 847 - 883.
- [5] BREZIS H, GALLOUET T. Nonlinear Schrodinger Evolution Equations[J]. Nonlinear Analysis, 1980(4): 677 - 681.
- [6] PAZY A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations[M]. New York: Springer-Verlag, 1983.
- [7] L. DNS J L. Quelques Methodes De Resolution Des Problemes Aux Limites Non Lineaires[M]. Dunod Gauthier Villars, Paris, 1969.

(编辑:王 萍)