

不确定度模糊随机综合法

董 哲, 蒋少禹

(哈尔滨理工大学 计算中心, 黑龙江 哈尔滨 150040)

摘 要:应用模糊和随机理论, 克服了在不确定度绝对值综合法 e_{y1} 和方和根综合法 e_{y2} 中存在的缺点: 首先给出了 e_{y1} 和 e_{y2} 中的近似分界; 然后对 e_{y1} 的偏大估计和 e_{y2} 的偏小估计进行了修正. 经过改进后的 $\tilde{e}_{y1}$ 和 $\tilde{e}_{y2}$ 不仅简单实用、约束条件少、适用面广, 而且其综合准确度也能满足一般工程测量上的需要.

关键词:不确定度; 模糊子集; 隶属度

中图分类号: TP277.4

文献标志码: A

文章编号: 1007-2683(2010)01-0083-04

A Synthetic Method for the Fuzziness and Randomness of Uncertainties

DONG Zhe, JIANG Shao-yu

(Center of Computer, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150040, China)

Abstract: In this paper, the theories of fuzziness and randomness are used to solve the problems in the absolute value sythetical method for e_{y1} and the square root sythetical method for e_{y2} . First, the approximate boundary between e_{y1} and e_{y2} is proposed. Second, the overestimation of e_{y1} and underestimation of e_{y2} are modified. The modified e_{y1} and e_{y2} have the advantages of simplicity, practicality, less constrains, and vast applications. And their accuracy can also meet the requirements in general engineering measurements.

Key words: uncertainties; fuzzy subset; membership degree

1 问题提出

在一般工程测量、检测和计量的误差估计中, 通常由于只知道单个独立的局部不确定度 (误差限) e_i [1], 而不确知其真实大小、符号、概率分布和隐含在 e_i 中的系统误差和随机误差. 由于面对的情况复杂, 在处理上述问题时, 目前还没有理论严密, 普遍适用的统一公式.

为了处理个别具体问题, 目前除了按 e_i 的近似分布假设套用某些含有统计模型的公式外, 在根本不知道 e_i 的概率分布时, 还经常采用与下面合成公式处理有关的问题公式, 即

$$e_y = \left[\sum_{i=1}^n |\pm e_i|^m \right]^{\frac{1}{m}} = \left[\sum_{i=1}^n e_i^m \right]^{\frac{1}{m}} \quad (1)$$

式中 $m=1$ 或 2 .

$$e_i = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i (e_y \text{ 的局部绝对不确定度}) \\ \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \Delta x_i (e_y \text{ 的局部相对不确定度}) \end{cases}$$

对于式(1), 当 e_i 的个数 n 较少时, 由于 $\pm e_i$ 相互抵偿的概率较小, 这时取 $m=1$, 而采用绝对值合成下式:

$$e_{y1} = \sum_{i=1}^n e_i$$

反之, 如果 n 较多时, 由于 $\pm e_i$ 相互抵偿的概率大, 这时可取 $m=2$, 宜采用方和根合成下式:

$$e_{y_2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n e_i^2}$$

在这里应当指出,要正确选用 e_{y_1} 或 e_{y_2} , 必须对 e_{y_1} 和 e_{y_2} 的适用场合在理论上给出界定. 不过就目前所掌握的不够完全的国内外文献来看, 尚未见到已获得解决的论述. 这样, 在应用 e_{y_1} 或 e_{y_2} 处理同一个问题时, 由于存在误判, 往往会给出差异很大而引起争议的结果.

为了解决上述矛盾, 首先注意到在进行综合时, 随着 n_i 的增加, 使得 e_y 的分布由两点分布逐步向正态分布逼近. 根据实践探索和理论上的粗略估算, 其转换点大约为 $n_i \approx 10$, 因为这时 $e_{y_1} = \sum_{i=1}^{10} |\pm e_i|$ 出现的概率 $P_n = \frac{1}{2^{n-1}} = 2^{-9} = 0.0020$, 如取 e_{y_1} 的置信概率为 $P = 0.9973$, 则 P_n 小于其超差概率 $\alpha = 1 - P = 0.0027$. 而其合成分布为接近于两点分布和正态分布之间的椭圆分布, 这时 e_y 将由 e_{y_1} 向 e_{y_2} 转换. 其次还注意到 e_{y_1} 存在估值偏大和 e_{y_2} 存在估值偏小的缺点. 为了解决该矛盾, 本文试图应用模糊数学理论, 建立一种对应 n_i 进行逐步修正的隶属度 μ_i 函数模型 $\bar{A} = F \langle \mu_i | n_i \rangle$, 将它与 e_y 相融合, 即为本文所求的综合公式.

2 综合公式及其特点

这里首先建立对 e_y 的进行逐步修正的隶属度函数模型 $\bar{A}$, 经过研究, 本文所设定的模糊子集, 近似由常量和等差数列组成, 即

$$a_0; a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots$$

该数列的通项为

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

由此得 $d = \frac{a_n - a_1}{n-1}$.

如用 $(n_i - 1)$ 乘以 d 再加上 a_1 并顾及 a_0 , 则可以求得元素 n_i 对模糊字集 $\bar{A}$ 的隶属度, 即

$$\bar{A} = \begin{cases} a_0 \\ \langle a_1 + (n_i - 1) \frac{a_n - a_1}{n-1} | n_i \rangle \end{cases} \quad (2)$$

式中 $\mu_i = a_1 + (n_i - 1) \frac{a_n - a_1}{n-1} | n_i$.

如将 $\bar{A}$ 乘以式(1), 得到

$$\tilde{e}_y = \begin{cases} 0 \\ \langle a_1 + (n_i - 1) \frac{a_n - a_1}{n-1} | n_i \rangle \left[\sum_{i=1}^{n_i} e_i^m \right]^{\frac{1}{m}} \end{cases} \quad (3)$$

上式即是所求的不确定度模糊随机的一般综合式.

为了简化式(3), 如令 $a_0 = 0 (n_i = 0)$, $a_1 = 1$, $a_n = n^{-\frac{1}{2}}$ 及 $m = 1$, 可得按绝对值合成的公式

$$\tilde{e}_{y_1} = \begin{cases} a_0 = 0 (n_i = 0) \\ \left\langle 1 + (n_i - 1) \frac{n^{-\frac{1}{2}} - 1}{n-1} \middle| (1 \leq n_i \leq n) \right\rangle \sum_{i=1}^{n_i} e_i \end{cases} \quad (4)$$

其次对式(3), 如令 $a_0 = 1 (n_i = 1)$, $a_1 = \sqrt{2}$, $a_n = 1$ 及 $m = 2$, 可得按方和根合成的公式为

$$\tilde{e}_{y_2} = \begin{cases} a_0 = 1 (n_i = 1) \\ \left\langle \sqrt{2} + (n_i - 1) \frac{1 - \sqrt{2}}{n-1} \middle| (2 \leq n_i \leq n) \right\rangle \sqrt{\sum_{i=1}^{n_i} e_i^2} \end{cases} \quad (5)$$

在实际应用中, 通常 $1 \leq n_i \leq 20$, 这里在式(4)中, 令 n_i 上限 $n = 11$, 其运用区间为 $1 \leq n_i \leq (n-1) = 10$, 可得下面实用计算式, 即

$$\tilde{e}_{y_1} = F_1 \langle \mu_i | n_i \rangle \sum_{i=1}^{n_i} e_i = \left\langle 1 - 0.070(n_i - 1) \middle| (1 \leq n_i \leq 10) \right\rangle \sum_{i=1}^{n_i} e_i \quad (6)$$

式中 $F_1 \langle \mu_i | n_i \rangle$ 与 n_i 对应的逐步修正的隶属度 μ_i 分别为

$$\left\langle \frac{1}{1}, \frac{0.93}{2}, \frac{0.86}{3}, \dots, \frac{0.37}{10} \right\rangle$$

从上式可见对绝对值合成, 其隶属度 μ_i 随 n_i 增大而减小.

在式(5)中, 如令 $n = 20$, 应用区间为 $11 \leq n_i \leq 20$, 可得其实用计算式为

$$\tilde{e}_{y_2} = F_2 \langle \mu_i | n_i \rangle \sqrt{\sum_{i=11}^{n_i} e_i^2} = \left\langle \sqrt{2} - 0.022(n_i - 1) \middle| (11 \leq n_i \leq 20) \right\rangle \sqrt{\sum_{i=11}^{n_i} e_i^2} \quad (7)$$

式中逐步修正隶属度函数, 可改写成

$$\langle \{1\} + \{0.41 - 0.022(n_i - 1) \mid (11 \leq n_i \leq 20)\} \rangle$$

它是由特征函数为 1 的普通子集与模糊子集

$$\{0.41 - 0.022(n_i - 1) \mid (11 \leq n_i \leq 20)\}$$

组合而成, 其展开式为

$$\left\langle 1 + \left\{ \frac{0.190}{11}, \frac{0.168}{12}, \dots, \frac{-0.008}{20} \right\} \right\rangle = \left\langle \frac{1.190}{11}, \frac{1.168}{12}, \dots, \frac{0.992}{20} \right\rangle$$

从上式可见,对方和根合成其隶属度 μ_i 随 n_i 减小而增大.

最后,将式(6) 与式(7) 进行合并 $\cup$,即可得到模糊随机综合计算式,即

$$\begin{aligned} \tilde{e}_y = F \langle \mu_i | n_i \rangle \left[\sum_{i=1}^{n_i} e_i^m \right]^{\frac{1}{m}} = \\ \left\{ \left(1 - 0.070(n_i - 1) \right) \middle| \begin{matrix} m = 1 \\ (1 \leq n_i \leq 10) \end{matrix} \right\rangle \cup \\ \left\{ \left(\sqrt{2} - 0.022(n_i - 1) \right) \middle| \begin{matrix} m = 2 \\ (11 \leq n_i \leq 20) \end{matrix} \right\rangle \right\} \times \\ \left[\sum_{i=1}^{n_i} e_i^m \right]^{\frac{1}{m}} \end{aligned} \quad (8)$$

现举例说明公式(8) 的应用及其特点,例如有 20 个电阻元件,其局部绝对不确定度均为 $e_i = \pm 1\Omega$,如将其中 2 个、10 个、11 个和 20 个相串联,为了便于比较,现分别用 e_{y1} 、 e_{y2} 、 $\tilde{e}_{y1}$ 和 $\tilde{e}_{y2}$ 求得电阻元件的综合绝对值不确定度,如表 1 所示.

表 1 电阻元件的综合绝对不确定度

n_i	e_{y_i}	$\tilde{e}_{y_i}$	e_{y_2}	$\tilde{e}_{y_2}$
2	2	$0.93 \times 2 = 1.9 \approx 2$	$\sqrt{2}$	
10	10	$0.37 \times 10 = 3.7$	$\sqrt{10}$	
11	11		$\sqrt{11}$	$1.19 \times \sqrt{11} \approx 3.9$
20	20		$\sqrt{20}$	$0.992 \times \sqrt{20} \approx \sqrt{20}$

从表 1 中的数据可以看出,公式 $\tilde{e}_y = F \langle \mu_i | n_i \rangle \left[\sum_{i=1}^{n_i} e_i^m \right]^{\frac{1}{m}}$ 具有自动修正作用. 因为 n_i 多时, $\sum_{i=1}^{n_i} e_i$ 估值偏大,被 $F_1 \langle \mu_i | n_i \rangle$ 减小所补偿;而当 n_i 少时,由于 $\sqrt{\sum_{i=1}^{n_i} e_i^2}$ 估值偏小,又被 $F_2 \langle \mu_i | n_i \rangle$ 增大所补偿. 若 $n_i > 20$ 时,可直接用公式 $e_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_i} e_i^2}$ 计算.

3 与其他综合式比较

为了进一步了解 $\tilde{e}_y$ 的特点,现将 $\tilde{e}_y$ 与其他目前应用的几种综合式进行比较.

例 1:已知某实验 $e_1 = 6\%$, $e_2 = 5\%$, $e_3 = 2\%$, $e_4 = 1\%$ 都服从均匀分布. 如取超差概率 $\alpha = 0.01$ (置信概率 $P = 0.99$),则由下式可以求得

$$e_y = \sum_{i=1}^n e_i - 2 \sqrt{n! \frac{\alpha}{2} \prod_{i=1}^n e_i} =$$

$$(6 + 5 + 2 + 1) - 2 \sqrt{4! \frac{0.01}{2} \times 6 \times 5 \times 2 \times 1} = 11\%$$

而

$$\tilde{e}_y = \langle 1 - 0.070(4 - 1) | (n_i = 4) \rangle (6 + 5 + 2 + 1) = 11\%$$

即由 e_y 与 $\tilde{e}_y$ 求得该实验的相对不确定度均为 11%.

例 2:检定某仪器所得数据(误差源略) 如表 2 所示.

表 2 某仪器的检定数据

分布	n	$e_i/\%$	置信因子 K	标准差 σ	偏峰系数 γ
均匀	1	0.2	$\sqrt{3}$	$\frac{e}{\sqrt{3}}$	1.2
	2	0.05			
	3	0.02			
	4	0.02			
正态	5	0.1	3	$\frac{e}{3}$	0
	6	0.06			
	7	0.12			
	8	0.03			

根据表 2 给出的数据可以分别求得

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \sqrt{\sum_{i=1}^8 \sigma_i^2} = \sqrt{\frac{1}{3} \sum_{i=1}^4 e_i^2 + \frac{1}{9} \sum_{i=5}^8 e_i^2} = 0.133 \\ \gamma_y &= \frac{\sum_{i=1}^8 \gamma_i \sigma_i^4}{\left[\sum_{i=1}^8 \sigma_i^2 \right]^2} = \frac{\frac{1.2}{9} \sum_{i=1}^4 e_i^4 + \frac{0}{81} \sum_{i=5}^8 e_i^4}{\left[\frac{1}{3} \sum_{i=1}^4 e_i^2 + \frac{1}{9} \sum_{i=5}^8 e_i^2 \right]^2} = \\ &0.677 \\ K_y(\alpha = 0.01) &= 2.58 - 0.633\gamma_y + \\ &0.08(\gamma_y - 0.6) = 2.2 \end{aligned}$$

则

$$e_y = K_y \sigma_y = 2.2 \times 0.133 = 0.29\%$$

而

$$\tilde{e}_y = \langle 1 - 0.070(8 - 1) | (n_i = 8) \rangle \sum_{i=1}^8 e_i = 0.3\%$$

即由两种综合法求得的仪器相对不确定度 $\tilde{e}_y \approx e_y$.

例 3:检定某长度名义值 $L = 50 \text{ mm}$ 的量块,得有关数据如表 3 所示^[8].

表 3 某长度量块的检定数据

A 类			B 类		
分布	标准差 /mm	自由度	分布	标准差 /mm	自由度
正态	$\sigma_{A_1} = 25.0$	$\nu_{A_1} = 18$	均匀	$\sigma_{B_1} = 6.7$	$\nu_{B_1} = 8$
$P = 0.99$	$\sigma_{A_2} = 5.8$	$\nu_{A_2} = 4$	$K = \sqrt{3}$	$\sigma_{B_2} = 2.9$	$\nu_{B_2} = 50$
$K = 2.58$	$\sigma_{A_3} = 3.9$	$\nu_{A_3} = 5$	—	$\sigma_{B_3} = 16.6$	$\nu_{B_3} = 2$

根据表3数据求得

$$\sigma_L = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \sigma_{Ai}^2 + \sum_{i=1}^3 \sigma_{Bi}^2} = 31.7 \text{ (nm)}$$

及

$$v_L = \frac{\left[\sum_{i=1}^3 \sigma_{Ai}^2 + \sum_{i=1}^3 \sigma_{Bi}^2 \right]^2}{\sum_{i=1}^3 \frac{\sigma_{Ai}^4}{v_{Ai}} + \sum_{i=1}^3 \frac{\sigma_{Bi}^4}{v_{Bi}}} = 16.8$$

取 $v_L = 17$, 从 t 分布表查得 $t_{p=0.99}(v_L = 17) = 2.9$, 由此求得

$$e_L = t_{p=0.99}(v_L = 17) \frac{\sigma_L}{L} = 1.8 \times 10^{-4} \%$$

而用 $\tilde{e}_L$ 求得

$$\tilde{e}_L = \langle -0.070(6-1) | n_i = 6 \rangle \times \frac{1}{L} \left[2.58 \sum_{i=1}^3 \sigma_{Ai} + \sqrt{3} \sum_{i=1}^3 \sigma_{Bi} \right] = 0.00017$$

即由 e_L 与 $\tilde{e}_L$ 综合所得长度量块的相对不确定度近似相等.

现将例举的四种综合法进行比较可以看出: $\tilde{e}_y$ 通用性强, 约束条件少, 计算前不要求掌握或假设概率分布; 它不仅适用于其他三种合成, 而且还有计算简单, 综合精确度高的优点.

4 结 论

综上所述, 本文给出的综合公式(8)中, $\tilde{e}_y$ 具有

如下优点: ① 给出了 $\sum_{i=1}^{n_i} e_i$ 与 $\sqrt{\sum_{i=1}^{n_i} e_i^2}$ 的分界点,

$n_i \approx 10$; ② 修正了 n_i 多时 $\sum_{i=1}^{n_i} e_i$ 估计值偏大和 n_i 少

时 $\sqrt{\sum_{i=1}^{n_i} e_i^2}$ 估值偏小的缺点; ③ 通用性强, 约束条件少, 计算前不要求掌握或假设概率分布, 计算简单, 综合精确度高; ④ 通过前面举例分析, 可以间接证明 $\tilde{e}_y$ 的置信概率 $P \approx 0.9973$, 便于在一般工程测量和计量工作中应用.

参 考 文 献:

- [1] 闫青萍. 测量不确定度概念 [J]. 哈尔滨: 哈尔滨理工大学学报, 2003, 8(2): 60-63.
- [2] 汪培庄. 模糊集合论及其应用 [M]. 上海: 科学技术出版社, 1983.
- [3] 吴万铎, 吴万钊. 模糊数学与计算机应用 [M]. 北京: 电子工业出版社, 1988.
- [4] 董怀武. 系统不确定度的均匀分布综合法 [J]. 北京: 仪器仪表学报, 1980, 1(2): 97-107.
- [5] 董怀武. 测量和仪器仪表设计中的误差合成法 [J]. 哈尔滨: 电测与仪表, 1983 (5): 14-22.
- [6] 董怀武. 误差理论在电磁测量中的应用 [M]. 北京: 机械工业出版社, 1986.
- [7] 肖明跃. 误差理论与应用 [M]. 北京: 计量出版社, 1986.
- [8] 刘智敏. 不确定度原理 [M]. 北京: 中国计量出版社, 1993.

(编辑: 付长缨)