

照亮凸体边界的平行光束的一致压缩

吴森林¹, 佟欣欣¹, 王丹²

(1. 哈尔滨理工大学 应用科学学院, 黑龙江 哈尔滨 150080; 2. 常州信息职业技术学院, 江苏 常州 213164)

摘要: 鉴于凸体边界的平行光照亮问题与关于凸体覆盖的 Hadwiger 猜想之间的密切联系, 证明了照亮凸体边界的平行光束的宽度可以被一致地压缩, 并借此在不使用归纳法的前提下证明了覆盖凸体所需小位似体的最小数目等于照亮凸体边界的平行光源的最小个数.

关键词: 凸体; 覆盖; 照亮; Hadwiger 猜想

DOI: 10.15938/j.jhust.2016.01.022

中图分类号: O177 文献标志码: A 文章编号: 1007-2683(2016)01-0110-04

Uniform Compressing of Parallel Light Beams Illuminating the Boundary of Convex Bodies

WU Sen-lin¹, TONG Xin-xin¹, WANG Dan²

(1. School of Applied Science, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China;

2. Changzhou College of Information Technology, Changzhou 213164, China)

Abstract: In view of the close relation between illuminating boundaries of convex bodies and Hadwiger's covering conjecture, it is proved that parallel light beams illuminating the boundary of a convex body can be uniformly compressed. Based on this, a new proof, without using induction, is given to show that the least number of smaller homothetic copies of a convex body needed to cover this convex body is equal to the least number of parallel light sources needed to illuminate its boundary.

Keywords: convex body; covering; illuminating; Hadwiger's covering conjecture

0 引言

本文用 K 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的一个凸体 (亦即, 一个内部非空的紧凸集). 我们称形如 $x + \lambda K$ ($\lambda \in (0, 1)$) 的集合为 K 的一个小位似体, 称 λ 为相应的位似系数. 设 x 是 K 的边界 $\text{bd}K$ 中一点, d 是一个方向 (亦即, 一个非零向量, 可被视为一个平行光源). 如果存在正实数 λ , 使得 $x + \lambda d \in \text{int}K$, 则我

们称 d 可以照亮 K 的边界点 x . 设 C 是若干方向构成的集合. 如果 $\text{bd}K$ 中任意一点都可以被 C 中某个方向照亮, 则称 C 可以照亮 $\text{bd}K$. 关于凸体覆盖与照亮的经典结果指出, 覆盖凸体 K 所需的小位似体的最小个数 $a(K)$ 是一个有限值且等于能够照亮 $\text{bd}K$ 的方向构成的集合的最小基数 $b(K)$. 因此, 凸体边界的平行光照亮问题与关于凸体覆盖的 Hadwiger 猜想密切相关. 值得一提的是关于凸体覆盖的 Hadwiger 猜想至今仍是一个非常困难的公开

收稿日期: 2015-02-24

基金项目: 国家自然科学基金 (11371114, 11571085, 11171082).

作者简介: 吴森林 (1982—), 男, 博士, 教授, E-mail: wusenlin@hrbust.edu.cn;

佟欣欣 (1987—), 女, 硕士研究生;

王丹 (1989—), 女, 硕士研究生.

问题, 它仅在 $n=2$ 时被完全解决. 如宗传明教授在文 [1] 中所言, Hadwiger 猜想的终点还遥遥无期. 关于该猜想的内容和相关结果可参见文 [1-16].

由于在 n 维凸体构成的集合在 Hausdorff 距离意义下构成的距离空间 H^n 中 $b(K)$ 是上半连续的, 对在 H^n 中稠密的集合类验证 Hadwiger 猜想无助于该猜想的彻底解决. 因此, 为了彻底解决 Hadwiger 猜想, 我们需要更精细地考虑覆盖和照亮问题. 例如, 我们可以考虑用给定个数的小位似体去覆盖一个凸体所需的最小位似系数 (见文 [7-18]). 类似的, 本文将考虑用给定个数的平行光束照亮凸体边界所需的最小“宽度”, 并证明照亮凸体边界的平行光束的“宽度”可以被一致地压缩. 基于这个结果, 我们在不使用归纳法的前提下给出了 $a(K) \leq b(K)$ 的新的证明. 注意到 $a(K) \geq b(K)$ 这一相对容易的结果, 我们实际上也给出了 $a(K) = b(K)$ 的新的证明 (文 [9] 利用归纳法证明了这一结果).

1 主要结果

引理1 若 $x \in \text{bd}K$ 可以被方向 u 照亮, 则存在 $\gamma > 0$, 使得 $B(x, \gamma) \cap \text{bd}K$ 中任意一点均可被方向 u 照亮, 其中 $B(x, \gamma)$ 表示以 x 点为心, 以 γ 为半径的开球.

证 由方向照亮的定义, 存在 $\lambda > 0$ 使得

$$z = x + \lambda u \in \text{int}K,$$

那么, 存在 $\gamma > 0$ 使得

$$B(z, \gamma) \subseteq \text{int}K,$$

对任一点 $y \in B(x, \gamma) \cap \text{bd}K$ 有

$$\|y + \lambda u - z\| = \|y - x\| < \gamma,$$

故

$$y + \lambda u \in B(z, \gamma) \subseteq \text{int}K,$$

因此 y 可被 u 照亮. 证毕.

令 $I(K, u)$ 是 $\text{bd}K$ 上能被方向 u 照亮的点构成的集合, $H(K, u)$ 是 K 的以 u 为外法向量的支撑超平面 (因此, 从 K 的任意内点出发且以 u 为方向的射线一定与 $H(K, u)$ 相交), $o(K)$ 是含于 K 的体积最大的 n 维椭球 (根据 John 定理, 这样的椭球存在且唯一, 见文 [20]) 的对称中心, $o(K, u)$ 为从 $o(K)$ 出发过 $o(K) + u$ 的射线 $[o(K), o(K) + u]$ 与 $H(K, u)$ 的交点.

作映射 $T_u: I(K, u) \rightarrow H(K, u)$, 使得对任一点 $x \in I(K, u)$, $T_u(x)$ 为直线 $x + \langle -u, u \rangle$ 与 $H(K, u)$

的交点. 那么 $T_u(x)$ 是连续的单射. 令

$$P(K, u) = T_u(I(K, u)),$$

亦即, 令 $P(K, u)$ 为 $I(K, u)$ 在映射 T_u 下的像. 对任一 $\lambda \in (0, 1)$, 令

$$P(K, u, \lambda) = (1 - \lambda)P(K, u) + \lambda o(K, u),$$

$I(K, u, \lambda)$ 为 $P(K, u, \lambda)$ 关于 T_u 的原像.

引理2 $P(K, u)$ 是一个相对开的凸集.

证 首先证明 $P(K, u)$ 是凸集. 对任意的 $a, b \in P(K, u)$, 存在 $x, y \in I(K, u)$, 使得

$$a = T_u(x), b = T_u(y).$$

由方向照亮的定义, 存在 $\lambda > 0$, 使得

$$p = x + \lambda u \in \text{int}K, q = y + \lambda u \in \text{int}K.$$

对任一点 $w \in [a, b]$, 射线 $[w, w - u]$ 交 $[p, q]$ 于一点 $s \in \text{int}K$, 射线 $[s, s - u]$ 交 $\text{bd}K$ 于一点 t . 则存在 $\lambda' > 0$, 使得 $s = t + \lambda' u$. 因此 $t \in I(K, u)$. 于是

$$w = T_u(t) \in P(K, u).$$

故 $[a, b] \subseteq P(K, u)$. 这说明 $P(K, u)$ 是一个凸集.

接下来证明 $P(K, u)$ 是相对开集, 即证明 $P(K, u) = \text{ri}P(K, u)$. 对任一 $w \in P(K, u)$, 存在 $t \in I(K, u)$, 使得 $w = T_u(t)$. 由于 t 能被方向 u 照亮, 存在 $\lambda > 0$, 使得 $s = t + \lambda u \in \text{int}K$. 于是存在 $\gamma > 0$, 使得 $B(s, \gamma) \subseteq \text{int}K$.

对任一点 $p \in B(w, \gamma) \cap H(K, u)$, 令 $a = p + s - w$. 则

$$a \in B(s, \gamma) \subseteq \text{int}K$$

设射线 $[a, a - u]$ 交 $\text{bd}K$ 于一点 x . 则存在 $\eta > 0$, 使得 $x = a - \eta u$. 因此, $x \in I(K, u)$. 那么, $p = T_u(x) \in P(K, u)$. 所以

$$B(w, \gamma) \cap H(K, u) \subseteq P(K, u).$$

故 $w \in \text{ri}P(K, u)$. 因此,

$$P(K, u) = \text{ri}P(K, u).$$

证毕.

定理3 设方向构成的集合 $\{u_i: i \in [n]\}$ 能够照亮 $\text{bd}K$, 则存在整数 $k > 1$, 使得

$$\text{bd}K \subseteq \bigcup_{i \in [n]} I\left(K, u_i, \frac{1}{k}\right)$$

证 不失一般性, 我们可以假设 $o(K) = o \in \text{int}K$.

若不存在满足条件的整数 $k > 1$, 则对任一 $k > 1$, 存在

$$y_k \in \text{bd}K \setminus \bigcup_{i \in [n]} I\left(K, u_i, \frac{1}{k}\right)$$

不妨设 $\{y_k\}_{k=1}^\infty$ 收敛于一点 y_0 . 那么, 由于 $y_0 \in \text{bd}K$, 存在整数 $i_0 \in [n]$, 使得

$$y_0 \in I(K, u_{i_0}),$$

令 $T = T_{u_{i_0}}$. 由于 $P(K, u_{i_0})$ 是一个相对开集, 存在 $\gamma > 0$, 使得

$$(T(y_0) + B(o, \gamma)) \cap H(K, u_{i_0}) \subseteq P(K, u_{i_0}).$$

令

$$K' = P(K, u_{i_0}) - o(K, u_{i_0}).$$

则 K' 是一个凸集且存在 $\lambda \in (0, 1)$, 使得

$$T(y_0) - o(K, u_{i_0}) \subseteq \lambda K',$$

因此,

$$T(y_0) - o(K, u_{i_0}) + \frac{1-\lambda}{2}K' \subseteq \lambda K' + \frac{1-\lambda}{2}K' = \frac{1+\lambda}{2}K',$$

上式等价于

$$T(y_0) + \frac{1-\lambda}{2}K' \subseteq \frac{1+\lambda}{2}K' + o(K, u_{i_0}),$$

由 K' 的定义,

$$T(y_0) + \frac{1-\lambda}{2}(P(K, u_{i_0}) - o(K, u_{i_0})) \subseteq$$

$$\frac{1+\lambda}{2}P(K, u_{i_0}) + \frac{1-\lambda}{2}o(K, u_{i_0}).$$

令 k_0 是一个满足 $k_0 > \frac{2}{1-\lambda}$ 的正整数. 由 $P(K, u_{i_0}, \lambda)$ 的定义, 集合 $P(K, u_{i_0}, \lambda)$ 随 λ 的值增大而减小.

因此,

$$T(y_0) + \frac{1}{k_0}(P(K, u_{i_0}) - o(K, u_{i_0})) \subseteq$$

$$T(y_0) + \frac{1-\lambda}{2}(P(K, u_{i_0}) - o(K, u_{i_0})) \subseteq$$

$$\frac{1+\lambda}{2}P(K, u_{i_0}) + \frac{1-\lambda}{2}o(K, u_{i_0}) \subseteq$$

$$\left(1 - \frac{1}{k_0}\right)P(K, u_{i_0}) + \frac{1}{k_0}o(K, u_{i_0}) =$$

$$P\left(K, u_{i_0}, \frac{1}{k_0}\right).$$

由于 $y_k \rightarrow y_0$, 当 $k > k_0$ 充分大时 $y_k \in I(K, u_{i_0})$. 根据 T 的连续性,

$$T(y_k) \rightarrow T(y_0)$$

因此, 当 $k > k_0$ 充分大时, 有

$$T(y_k) \in T(y_0) + \frac{1}{k_0}(P(K, u_{i_0}) - o(K, u_{i_0}))$$

$$\subseteq P\left(K, u_{i_0}, \frac{1}{k_0}\right) \subseteq P\left(K, u_{i_0}, \frac{1}{k}\right),$$

因此

$$y_k \in I\left(K, u_{i_0}, \frac{1}{k}\right),$$

矛盾. 证毕.

定理 4 $a(K) \leq b(K)$.

证 设 $b(K) = m$. 则存在单位向量构成的集合 $\{u_i : i \in [m]\}$ 使得

$$\text{bd}K \subseteq \bigcup_{i \in [m]} I(K, u_i).$$

由定理 3, 存在正整数 $k > 1$ 使得

$$\text{bd}K \subseteq \bigcup_{i \in [m]} I\left(K, u_i, \frac{1}{k}\right),$$

对任意的 $i \in [m]$, 令

$$V_i = I\left(K, u_i, \frac{1}{k}\right),$$

那么,

$$\text{cl}V_i \subseteq I(K, u_i), \forall i \in [m],$$

且

$$\bigcup_{i \in [m]} V_i = \text{bd}K.$$

其中, $\text{cl}V_i$ 是 V_i 的闭包.

对任意的 $i \in [m]$ 及任意的 $x \in \text{cl}V_i$, 令 $u_i(x) \in \text{bd}K$ 是使得过 x 和 $u_i(x)$ 的线段 $[x, u_i(x)]$ 满足

$$[x, u_i(x)] = [x, x + u_i] \cap K,$$

的一点. 那么,

$$f_i(x) = \|x - u_i(x)\|,$$

是定义在 $\text{cl}V_i$ 上的一个连续函数. 由于

$$[x, x + u_i] \cap \text{int}K \neq \emptyset, \forall x \in \text{cl}V_i, \forall i \in [m],$$

我们有

$$\lambda_i := \frac{1}{2} \min\{f_i(x) : x \in \text{cl}V_i\} > 0, \forall i \in [m].$$

选定 $\text{int}K$ 中一点 y_0 . 则存在 $\lambda_{m+1} > 0$ 使得

$$B(y_0, \lambda_{m+1}) \subseteq \text{int}K,$$

令

$$\lambda = \min\{\lambda_i : i \in [m+1]\},$$

对任意的 $i \in [m]$, 令 T_i 为按如下方式定义的仿射变换

$$T_i(x) = x + \lambda u_i,$$

容易验证

$$T_i(\{y_0\} \cup \text{cl}V_i) \subseteq \text{int}K, \forall i \in [m],$$

由于 $\{y_0\} \cup \text{cl}V_i$ 是紧集, 存在 K 的小位似体 K_i 使得

$$T_i(\{y_0\} \cup \text{cl}V_i) \subseteq K_i, \forall i \in [m],$$

于是

$$\text{conv}(\{y_0\} \cup \text{cl}V_i) \subseteq K_i - \lambda u_i, \forall i \in [m],$$

因此

$$K \subseteq \bigcup_{i \in [m]} (K_i - \lambda u_i),$$

这说明 $a(K) \leq m = b(K)$, 证毕.

参考文献:

[1] 宗传明. 离散几何欣赏 [M]. 北京: 科学出版社, 2009: 26

- 36.
- [2] HADWIGER H. Ungelöste Probleme [J]. Elem. Math., 1957, 12: 121.
- [3] BRASS P, MOSER W, PACH J. Research Problems in Discrete Geometry [M]. Berlin, Springer Verlag, 2005: 75 – 149.
- [4] BEZDEK K. Classical Topics in Discrete Geometry [M]. New York, Springer, 2010: 23 – 32.
- [5] BEZDEK K. The Illumination Conjecture and Its Extensions [J]. Period. Math. Hungar., 2006, 53: 59 – 69.
- [6] GOHBERG I, MARKUS A. A Problem on Covering of Convex Figures by Similar Figures [J]. Izv. Mold. Fil. Akad., 1960, 10: 87 – 90.
- [7] SOLTAN P. On the Illumination of the Boundary of a Convex Body from within [J]. Math. Sb., 1962, 57: 443 – 448.
- [8] LASSAK M. Covering the Boundary of a Convex Set by Tiles [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1988, 104: 269 – 272.
- [9] BOLTYANSKI V. The Problem on Illumination of the Boundary of a Convex Body [J]. Izv. Mold. Fil. Akad., 1960, 10: 77 – 84.
- [10] VIZITEI V N. Some Problems on the Covering and Illumination of Unbounded Convex [J]. Izv. Akad. Nauk Mold., 1961, 10: 3 – 9.
- [11] BEZDEK K. On the Illumination of Smooth Convex Bodies [J]. Arch. Math., 1992, 58: 611 – 614.
- [12] PAPADOPOERAKIS I. An Estimate for the Problem of Illumination of the Boundary of a Convex Body in E^3 [J]. Geom. Dedicata, 1999, 75: 275 – 285.
- [13] WEISSBACH B. Eine Bemerkung zur Überdeckung beschränkter Mengen durch Mengen kleineren Durchmessers [J]. Beiträge Algebra Geom., 1981, 11: 119 – 122.
- [14] SCHRAMM O. Illuminating Sets of Constant Width [J]. Mathematika, 1988, 35: 180 – 189.
- [15] BEZDEK K. Illumination Spindle Convex Bodies and Minimizing the Volume of Spherical Sets of Constant Width [J]. Discrete Comput. Geom., 2012, 47: 275 – 287.
- [16] 吴森林, 王丹, 庞海婧. 关于凸体覆盖的 Hadwiger 猜想 [J]. 哈尔滨理工大学学报, 2014, 19(1): 117 – 123.
- [17] ZONG CHUANMING. A Quantitative Program for Hadwiger's Covering Conjecture [J]. Sci. China Math., 2010, 53(9): 2551 – 2560.
- [18] 吴森林. 关于凸体覆盖的 Hadwiger 猜想的两个等价形式 [J]. 中国科学: 数学, 2014, 44(3): 275 – 285.
- [19] BOLTYANSKI V, MARTINI H, SOLTAN P. Excursions into Combinatorial Geometry [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1997: 255 – 315.
- [20] GRUBER P. Convex and Discrete Geometry [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2007: 202 – 209.

(编辑: 王 萍)