

定义在复模糊数上的复模糊值函数的收敛性

毕淑娟, 徐亚兰, 曹 辉

(哈尔滨学院 信息工程学院, 黑龙江 哈尔滨 150080)

摘 要:把所有的关于 y 轴对称的模糊数都定义为零模糊数,在此基础上给出了复模糊值函数的极限定义,并研究复模糊值函数的收敛性。得到了一系列关于收敛的复模糊值函数极限的结论,包括复模糊值函数的极限是唯一的,收敛的复模糊值函数具有局部有界性和局部保号性,以及复模糊值函数极限的线性运算性质;给出了复模糊值函数的收敛判别法,柯西收敛准则。此复模糊值函数是定义在复模糊数集 $F(C)$ 上取值于 $F(C)$ (所有的复模糊数的集合) 中的复模糊数的函数。

关键词:模糊数; 复模糊数; 复模糊值函数

DOI: 10.15938/j.jhust.2017.01.024

中图分类号: O159 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2017)01-0136-05

Convergence of Complex Fuzzy-valued Function Defined in Complex Fuzzy Number

BI Shu-juan, XU Ya-lan, CAO Hui

(School of Information Engineering, Harbin Institute, Harbin 150080, China)

Abstract: The author defines all fuzzy number which are symmetric respect to y -axis as zero fuzzy number, on the basis, the author defines the limitation of complex fuzzy-valued function and discusses the properties of convergence. This paper obtains a series of results about limited complex fuzzy-valued function, including the limitation of complex fuzzy-valued function is unique, the limited complex fuzzy-valued function has local boundedness and local protection, as well as the linear operation properties of the limitation. Furthermore, the convergence criterion and the Cauchy convergence criterion of complex fuzzy-valued function are given. In this paper, it is shown that the complex fuzzy-valued function is defined in a complex fuzzy set $F(C)$ which valued the complex fuzzy number in $F(C)$ (set of all complex fuzzy number).

Keywords: fuzzy number; complex fuzzy number; complex fuzzy-valued function

模糊实数及复模糊数的发展对于模糊规划、模糊决策等的研究产生了很大的影响,因此完善模糊实数及复模糊数领域的研究具有深远的意义^[1-3]。自1975年A. Kaufmann提出模糊数的概念,在通常模糊数的序关系意义下,人们对模糊数、复模糊数

的研究已做了许多工作^[9-13]。在文[14]中MA-GASSY Ousmane, WU Cong Xin。研究了复模糊函数的收敛性质,其中模糊数的距离定义为 $D(\bar{a}, \bar{b}) = \sup_{\lambda \in [0,1]} \max \{ |a_{\lambda}^{-} - b_{\lambda}^{-}|, |a_{\lambda}^{+} - b_{\lambda}^{+}| \}$ 。而本文是在

收稿日期: 2015-12-09

基金项目: 黑龙江省教育厅科学技术研究项目(12543040)。

作者简介: 毕淑娟(1970—),女,博士,教授,E-mail: bsj0216@126.com;

徐亚兰(1964—),女,学士,副教授;

曹 辉(1963—),女,学士,副教授。

文献 [5] 中所定义的模糊距离意义下,对复模糊值函数的收敛性质进行了新的研究,此研究的前提是把所有关于纵向对称的模糊数都认为是等同的前提下提出的。许多实际问题中往往可以不考虑这种纵向对称的模糊性现象,因此可以为实际问题的研究提供更有效的数学模型。

1 模糊数的概念

定义 1^[4] 我们称 $\bar{u}: R \rightarrow [0,1]$ 为模糊数是指 $\forall r \in [0,1], [\bar{u}]^r$ 为非空有界闭区间 $[\bar{u}_r^-, \bar{u}_r^+]$, 其中 $[\bar{u}]^r = \{x \in R: \bar{u}(x) \geq r\}, r \in (0,1], [\bar{u}]^0 = \{x \in R: \bar{u}(x) > 0\}$ 。所有模糊数的集记做 E^1 。

对于实数 a , 我们定义 a 所相应的模糊数由

$$\bar{a}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [\min\{0, 2a\}, \max\{2a, 0\}] \\ 0, & x \notin [\min\{0, 2a\}, \max\{2a, 0\}] \end{cases}$$

确定。显然

$$a \geq 0, [\bar{a}_r^-, \bar{a}_r^+] = [0, 2a] (\forall r \in [0,1]),$$

$$a < 0, [\bar{a}_r^-, \bar{a}_r^+] = [2a, 0] (\forall r \in [0,1])。$$

设 $\bar{a} \in E^1$, 对任意 $r \in [0,1]$, 令

$$\alpha(r) = \begin{cases} \bar{a}_r^- & \bar{a}_r^- + \bar{a}_r^+ \geq 0 \\ -\bar{a}_r^+ & \bar{a}_r^- + \bar{a}_r^+ < 0 \end{cases},$$

$$\beta(r) = \begin{cases} \bar{a}_r^+ & \bar{a}_r^- + \bar{a}_r^+ \geq 0 \\ -\bar{a}_r^- & \bar{a}_r^- + \bar{a}_r^+ < 0 \end{cases}$$

定义 2^[5] 称由区间族 $[\alpha(r), \beta(r)], r \in [0,1]$ 所确定的模糊数为模糊数 $\bar{a}$ 的绝对值, 记作 $|\bar{a}|$ 。

定义 3^[5] 对 $\bar{a}, \bar{b} \in E^1$, 称 $\bar{a} \leq \bar{b}$ 当且仅当 $\bar{a}_r^- + \bar{a}_r^+ \leq \bar{b}_r^- + \bar{b}_r^+ (\forall r \in [0,1])$ 。称 $\bar{a} = \bar{b}$ 当且仅当 $\bar{a} \leq \bar{b}$, 且 $\bar{b} \leq \bar{a}$ 。

定义 4^[5] $\bar{a} \in E^1$, 当且仅当 $\bar{a}_r^- + \bar{a}_r^+ = 0 (\forall r \in [0,1])$, 称 $\bar{a}$ 为零模糊数, 记为 $\tilde{0}$ 。

定理 1^[5] 设 $\bar{a}, \bar{b} \in E^1$, 则

$$1) |\bar{a}| \geq \tilde{0}$$

$$2) |\bar{a}| \leq \bar{b} \Leftrightarrow -\bar{b} \leq \bar{a} \leq \bar{b} (\bar{b} \geq \tilde{0})$$

$$3) \forall \varepsilon > 0, \text{若 } |\bar{a}| < \varepsilon, \text{则 } \bar{a} = \tilde{0}$$

$$4) |\bar{a} + \bar{b}| \leq |\bar{a}| + |\bar{b}|$$

$$5) |\bar{a} - \bar{b}| \geq |\bar{a}| - |\bar{b}|$$

$$6) \forall k \in R, |k(\bar{a} - \bar{b})| = |k| |\bar{a} - \bar{b}|$$

2 复模糊数的概念

定义 5^[7] 设 $\bar{a}, \bar{b} \in E^1, C$ 是复数集, 我们定义 $(\bar{a}, \bar{b}): C \rightarrow [0,1], z = x + iy \rightarrow \bar{a}(x) \wedge \bar{b}(y), x, y \in R$

那么 $(\bar{a}, \bar{b})$ 称为 C 上的复模糊数。 $\bar{a}, \bar{b}$ 分别称为 $(\bar{a}, \bar{b})$ 的实部与虚部, 记 $\tilde{c} = (\bar{a}, \bar{b}), \bar{a} = \text{Re } \tilde{c}, \bar{b} = \text{Im } \tilde{c}$, 或 $\tilde{c} = (\text{Re } \tilde{c}, \text{Im } \tilde{c})$ 。所有复模糊数的集合记为 $F(C)$ 。

定义 6^[8] 复模糊数空间中的加减与数乘定义如下: $\forall \tilde{c}_1, \tilde{c}_2 \in F(C), c = a + bi \in C, \tilde{c}_1 \pm \tilde{c}_2 = (\text{Re } \tilde{c}_1 \pm \text{Re } \tilde{c}_2, \text{Im } \tilde{c}_1 \pm \text{Im } \tilde{c}_2) \in F(C), c\tilde{c} = (a\text{Re } \tilde{c}, b\text{Im } \tilde{c}) \in F(C)$

定义 7^[9] 对 $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2 \in F(C)$, 称 $\tilde{c}_1 \leq \tilde{c}_2$ 当且仅当 $\text{Re } \tilde{c}_1 \leq \text{Re } \tilde{c}_2$ 且 $\text{Im } \tilde{c}_1 \leq \text{Im } \tilde{c}_2$ 。称 $\tilde{c}_1 = \tilde{c}_2$ 当且仅当 $\tilde{c}_1 \leq \tilde{c}_2$, 且 $\tilde{c}_2 \leq \tilde{c}_1$ 。称 $\tilde{c}_1 < \tilde{c}_2$, 当且仅当 $\text{Re } \tilde{c}_1 \leq \text{Re } \tilde{c}_2$ 且 $\text{Im } \tilde{c}_1 < \text{Im } \tilde{c}_2$, 或 $\text{Re } \tilde{c}_1 < \text{Re } \tilde{c}_2$ 且 $\text{Im } \tilde{c}_1 \leq \text{Im } \tilde{c}_2$ 。

定义 8^[10] 对 $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2 \in F(C)$, 两个复模糊数的距离 $d(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2)$ 或 $|\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2|$ 定义为

$$d(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2) = |\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2| = \frac{1}{2} (|\text{Re } \tilde{c}_1 - \text{Re } \tilde{c}_2| + |\text{Im } \tilde{c}_1 - \text{Im } \tilde{c}_2|)$$

定理 2^[10] $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3, \tilde{c}_4 \in F(C)$, 则有

- 1) 非负性 $d(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2) \geq \tilde{0}, d(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2) = \tilde{0} \Leftrightarrow \tilde{c}_1 = \tilde{c}_2$
- 2) 对称性 $d(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2) = d(\tilde{c}_2, \tilde{c}_1)$
- 3) 三角不等式 $d(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2) \leq d(\tilde{c}_1, \tilde{c}_3) + d(\tilde{c}_3, \tilde{c}_2)$ 。
- 4) (平移不变性) $d(\tilde{c}_1 \pm \tilde{c}_2, \tilde{c}_1 \pm \tilde{c}_3) = d(\tilde{c}_2, \tilde{c}_3), d(\tilde{c}_1 - \tilde{c}, \tilde{c}_2 - \tilde{c}) = d(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2)$
- 5) 若 $\tilde{c}_1 \leq \tilde{c}_2 \leq \tilde{c}_3$, 则 $d(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2) \leq d(\tilde{c}_1, \tilde{c}_3), d(\tilde{c}_2, \tilde{c}_3) \leq d(\tilde{c}_1, \tilde{c}_3)$
- 6) 若 $\tilde{c}_1 \leq \tilde{c}_3 \leq \tilde{c}_2, \tilde{c}_1 \leq \tilde{c}_4 \leq \tilde{c}_2$, 则 $d(\tilde{c}_3, \tilde{c}_4) \leq d(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2)$

定理 3 $\forall \tilde{c}_1, \tilde{c}_2 \in F(C)$, 则有 $|\tilde{c}_1| - |\tilde{c}_2| \leq |\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2| \leq |\tilde{c}_1| + |\tilde{c}_2|$

证明

$$|\tilde{c}_1| - |\tilde{c}_2| =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(|\operatorname{Re} \tilde{c}_1| + |\operatorname{Im} \tilde{c}_1|) - \frac{1}{2}(|\operatorname{Re} \tilde{c}_2| + |\operatorname{Im} \tilde{c}_2|) = \\ & \frac{1}{2}[(|\operatorname{Re} \tilde{c}_1| - |\operatorname{Re} \tilde{c}_2|) + (|\operatorname{Im} \tilde{c}_1| - |\operatorname{Im} \tilde{c}_2|)] \leq \\ & \frac{1}{2}(|\operatorname{Re} \tilde{c}_1 \pm \operatorname{Re} \tilde{c}_2| + |\operatorname{Im} \tilde{c}_1 \pm \operatorname{Im} \tilde{c}_2|) = \\ & |\tilde{c}_1 \pm \tilde{c}_2| |\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2| = \\ & \frac{1}{2}(|\operatorname{Re} \tilde{c}_1 - \operatorname{Re} \tilde{c}_2| + |\operatorname{Im} \tilde{c}_1 - \operatorname{Im} \tilde{c}_2|) \leq \\ & \frac{1}{2}[(|\operatorname{Re} \tilde{c}_1| + |\operatorname{Re} \tilde{c}_2|) + (|\operatorname{Im} \tilde{c}_1| + |\operatorname{Im} \tilde{c}_2|)] = \\ & |\tilde{c}_1| + |\tilde{c}_2| \end{aligned}$$

因此 $|\tilde{c}_1| - |\tilde{c}_2| \leq |\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2| \leq |\tilde{c}_1| + |\tilde{c}_2|$

定理4 $\forall \tilde{c}_1, \tilde{c}_2 \in F(C)$, 若 $|\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2| \leq \varepsilon$, 则 $\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2 = \tilde{0}$ 或 $\tilde{c}_1 = \tilde{c}_2$ 。

证明: $|\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2| = \frac{1}{2}(|\operatorname{Re} \tilde{c}_1 - \operatorname{Re} \tilde{c}_2| + |\operatorname{Im} \tilde{c}_1 - \operatorname{Im} \tilde{c}_2|) \leq \varepsilon$

则 $|\operatorname{Re} \tilde{c}_1 - \operatorname{Re} \tilde{c}_2| \leq (|\operatorname{Re} \tilde{c}_1 - \operatorname{Re} \tilde{c}_2| + |\operatorname{Im} \tilde{c}_1 - \operatorname{Im} \tilde{c}_2|) \leq 2\varepsilon$

所以 $\operatorname{Re} \tilde{c}_1 - \operatorname{Re} \tilde{c}_2 = \tilde{0}$ 或 $\operatorname{Re} \tilde{c}_1 = \operatorname{Re} \tilde{c}_2$

同理 $\operatorname{Im} \tilde{c}_1 - \operatorname{Im} \tilde{c}_2 = \tilde{0}$ 或 $\operatorname{Im} \tilde{c}_1 = \operatorname{Im} \tilde{c}_2$

因此 $\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2 = \tilde{0}$ 或 $\tilde{c}_1 = \tilde{c}_2$ 。

定义9^[9] 设 $\{\tilde{c}_n\} \subset F(C)$, $\tilde{c} \in F(C)$, 若 $\forall \varepsilon > 0$, 存在正整数 N , 使得 $n \geq N$ 时, $|\tilde{c}_n - \tilde{c}| < \varepsilon$, 则称 $\{\tilde{c}_n\}$ 收敛于 $\tilde{c}$, 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{c}_n = \tilde{c}$, 或 $\tilde{c}_n \rightarrow \tilde{c} (n \rightarrow \infty)$ 。

定理5^[9] 若 $\tilde{c}_n \rightarrow \tilde{c} (n \rightarrow \infty)$, $\tilde{c}_n' \rightarrow \tilde{c}' (n \rightarrow \infty)$, 如果对于任意 $n \in \mathbb{N}$, 有 $\tilde{c}_n \leq \tilde{c}_n'$, 则 $\tilde{c} \leq \tilde{c}'$ 。

定理6^[9] 若 $\tilde{c}_n' \leq \tilde{c}_n \leq \tilde{c}_n''$, 且 $\tilde{c}_n' \rightarrow \tilde{c} (n \rightarrow \infty)$, $\tilde{c}_n'' \rightarrow \tilde{c} (n \rightarrow \infty)$, 则 $\tilde{c}_n \rightarrow \tilde{c} (n \rightarrow \infty)$ 。

定理7^[9] (柯西收敛准则) 复模糊数列 $\{\tilde{c}_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n > N$, $\forall p > N$, 有 $|\tilde{c}_{n+p} - \tilde{c}_n| < \varepsilon$ 。

3 复模糊值函数的收敛性

设有复模糊数集 $F(C)$, $\mathbb{C} \subset F(C)$, 若存在对应关系 f , 使得 $\forall \tilde{c} \in \mathbb{C}$, 有 $\tilde{z} \in F(C)$ 与之对应, 则称 f 为定义在复模糊数集 A 上的复模糊值函数, 记为 $\tilde{z} = f(\tilde{c})$ 。

定义10 有复模糊值函数 $f(\tilde{c})$, 若对任意实数 $\varepsilon > 0$, 存在实数 $\delta > 0$, 当 $0 < |\tilde{c} - \tilde{a}| < \delta$ 时, 有 $|f(\tilde{c}) - \tilde{B}| < \varepsilon$, 则称 $f(\tilde{c})$ 在 $\tilde{c} = \tilde{a}$ 处存在极限且极限为 $\tilde{B}$ 。

记为 $\lim_{\tilde{c} \rightarrow \tilde{a}} f(\tilde{c}) = \tilde{B}$ 或 $f(\tilde{c}) \rightarrow \tilde{B} (\tilde{c} \rightarrow \tilde{a})$ 。

定理8 若复模糊值函数 $f(\tilde{c})$ 在 $\tilde{a}$ 处存在极限, 则它的极限是唯一的。

证明: 假设 $\lim_{\tilde{c} \rightarrow \tilde{a}} f(\tilde{c}) = \tilde{B}$, $\lim_{\tilde{c} \rightarrow \tilde{a}} f(\tilde{c}) = \tilde{c}$, 则

对任意实数 $\varepsilon > 0$, 存在实数 $\delta_1 > 0$, 当 $0 < |\tilde{c} - \tilde{a}| < \delta_1$ 时, 有 $|f(\tilde{c}) - \tilde{B}| < \varepsilon$,

存在实数 $\delta_2 > 0$, 当 $0 < |\tilde{c} - \tilde{a}| < \delta_2$ 时, 有 $|f(\tilde{c}) - \tilde{c}| < \varepsilon$,

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 当 $0 < |\tilde{c} - \tilde{a}| < \delta$ 时, 由定理2有

$|\tilde{B} - \tilde{c}| \leq |f(\tilde{c}) - \tilde{B}| + |f(\tilde{c}) - \tilde{c}| < 2\varepsilon$, 由定

理4知 $\tilde{B} = \tilde{c}$

所以复模糊值函数 $f(\tilde{c})$ 在 $\tilde{a}$ 处若存在极限, 则它的极限是唯一的。

定理9 若 $\lim_{\tilde{c} \rightarrow \tilde{a}} f(\tilde{c})$ 和 $\lim_{\tilde{c} \rightarrow \tilde{a}} g(\tilde{c})$ 均存在, 则 $\lim_{\tilde{c} \rightarrow \tilde{a}} [f(\tilde{c}) \pm g(\tilde{c})]$ 也存在, 且

$$\lim_{\tilde{c} \rightarrow \tilde{a}} [f(\tilde{c}) \pm g(\tilde{c})] = \lim_{\tilde{c} \rightarrow \tilde{a}} f(\tilde{c}) \pm \lim_{\tilde{c} \rightarrow \tilde{a}} g(\tilde{c})$$

证明: 设 $\lim_{\tilde{c} \rightarrow \tilde{a}} f(\tilde{c}) = \tilde{B}$, $\lim_{\tilde{c} \rightarrow \tilde{a}} g(\tilde{c}) = \tilde{c}$, 则

对任意实数 $\varepsilon > 0$, 存在实数 $\delta_1 > 0$, 当 $0 < |\tilde{c} - \tilde{a}| < \delta_1$ 时, 有 $|f(\tilde{c}) - \tilde{B}| < \varepsilon$,

存在实数 $\delta_2 > 0$, 当 $0 < |\tilde{c} - \tilde{a}| < \delta_2$ 时, 有 $|g(\tilde{c}) - \tilde{c}| < \varepsilon$,

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 当 $0 < |\tilde{c} - \tilde{a}| < \delta$ 时, 由定理3有

$$|[f(\tilde{c}) \pm g(\tilde{c})] - [\tilde{B} \pm \tilde{c}]| \leq |f(\tilde{c}) - \tilde{B}| + |g(\tilde{c}) - \tilde{c}| < 2\varepsilon$$

所以 $\lim_{\tilde{c} \rightarrow \tilde{a}} [f(\tilde{c}) \pm g(\tilde{c})] = \lim_{\tilde{c} \rightarrow \tilde{a}} f(\tilde{c}) \pm \lim_{\tilde{c} \rightarrow \tilde{a}} g(\tilde{c})$

定理10 若 $\lim_{\tilde{c} \rightarrow \tilde{a}} f(\tilde{c})$ 存在, 则 $\lim_{\tilde{c} \rightarrow \tilde{a}} cf(\tilde{c})$ 也存在, 且

$$\lim_{\tilde{c} \rightarrow \tilde{a}} cf(\tilde{c}) = c \lim_{\tilde{c} \rightarrow \tilde{a}} f(\tilde{c}) \quad (c \text{ 是复数})$$

证明: 设 $\lim_{\tilde{c} \rightarrow \tilde{a}} f(\tilde{c}) = \tilde{B}$, $c = (c_1, c_2)$, $f(\tilde{c}) = (f_1(\tilde{c}), f_2(\tilde{c}))$, $\tilde{B} = (\tilde{B}_1, \tilde{B}_2)$

由已知对任意实数 $\varepsilon > 0$, 存在实数 $\delta > 0$, 当 $0 < |\tilde{c} - \tilde{a}| < \delta$ 时, 有 $|f(\tilde{c}) - \tilde{B}| < \varepsilon$ 。

$$\begin{aligned} |cf(\tilde{c}) - c\tilde{B}| &= \frac{1}{2}(|c_1 f_1(\tilde{c}) - c_1 \tilde{B}_1| + \\ & |c_2 f_2(\tilde{c}) - c_2 \tilde{B}_2|) = \frac{1}{2}(|c_1| |f_1(\tilde{c}) - \tilde{B}_1| + \end{aligned}$$

$$|c_2| |f_2(\tilde{c}) - \tilde{B}_2| \text{ 而 } |f_1(\tilde{c}) - \tilde{B}_1| \leq |f_1(\tilde{c}) - \tilde{B}_1| + |f_2(\tilde{c}) - \tilde{B}_2| = 2|f(\tilde{c}) - \tilde{B}| < 2\varepsilon$$

$$|f_2(\tilde{c}) - \tilde{B}_2| \leq |f_1(\tilde{c}) - \tilde{B}_1| + |f_2(\tilde{c}) - \tilde{B}_2| = 2|f(\tilde{c}) - \tilde{B}| < 2\varepsilon$$

$$\text{所以 } |cf(\tilde{c}) - c\tilde{B}| < (|c_1| + |c_2|)\varepsilon$$

$$\text{因此 } \lim_{\tilde{c} \rightarrow \tilde{a}} cf(\tilde{c}) = c \lim_{\tilde{c} \rightarrow \tilde{a}} f(\tilde{c})$$

$$\text{定理 11 若 } \lim_{\tilde{c} \rightarrow \tilde{a}} f(\tilde{c}) = \tilde{B}, \text{ 则 } \lim_{\tilde{c} \rightarrow \tilde{a}} |f(\tilde{c})| = |\tilde{B}|$$

证明: 由定理 3 有 $||f(\tilde{c})| - |\tilde{B}|| \leq |f(\tilde{c}) - \tilde{B}|$ 知定理成立。

定理 12 若 $\lim_{\tilde{c} \rightarrow \tilde{a}} f(\tilde{c}) = \tilde{B}$, 则存在 $\tilde{M}$ 和 $\delta_0 > 0$, 对任意 $\tilde{c}: 0 < |\tilde{c} - \tilde{a}| < \delta_0$, 有 $|f(\tilde{c})| \leq \tilde{M}$ 。

证明: 取 $\varepsilon = 1$, $\exists \delta_0 > 0$, 对任意 $\tilde{c}: 0 < |\tilde{c} - \tilde{a}| < \delta_0$, 由定理 2 有

$$|f(\tilde{c})| \leq |f(\tilde{c}) - \tilde{B}| + |\tilde{B}| < 1 + |\tilde{B}|$$

于是存在 $\tilde{M} = 1 + |\tilde{B}|$, $\exists \delta_0 > 0$, $\forall \tilde{c}: 0 < |\tilde{c} - \tilde{a}| < \delta_0$, 有 $|f(\tilde{c})| \leq \tilde{M}$ 。

定理 13 $\lim_{\tilde{c} \rightarrow \tilde{a}} f(\tilde{c}) = \tilde{B}$ 存在的必要充分条件是对任意复数列 $\{\tilde{c}_n\}$, 且 $\tilde{c}_n \neq \tilde{a}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{c}_n = \tilde{a}$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\tilde{c}_n) = \tilde{B}$ 。

证明: $\Rightarrow$ 已知 $\lim_{\tilde{c} \rightarrow \tilde{a}} f(\tilde{c}) = \tilde{B}$, 对任意实数 $\varepsilon > 0$, 存在实数 $\delta > 0$, 当 $0 < |\tilde{c} - \tilde{a}| < \delta$ 时, 有 $|f(\tilde{c}) - \tilde{B}| < \varepsilon$

由 $\tilde{c}_n \neq \tilde{a}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{c}_n = \tilde{a}$, 有对上述 $\delta > 0$, 存在自然数 N , $\forall n > N$, 有 $0 < |\tilde{c}_n - \tilde{a}| < \delta$

从而 $\forall n > N$, 有 $|f(\tilde{c}_n) - \tilde{B}| < \varepsilon$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\tilde{c}_n) = \tilde{B}$

$\Leftarrow$ 若对任意复数列 $\{\tilde{c}_n\}$, 且 $\tilde{c}_n \neq \tilde{a}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{c}_n = \tilde{a}$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\tilde{c}_n) = \tilde{B}$ 。假设 $\lim_{\tilde{c} \rightarrow \tilde{a}} f(\tilde{c}) \neq \tilde{B}$

即 $\exists \varepsilon > 0$, $\forall \delta > 0$, $\exists \tilde{c}, 0 < |\tilde{c} - \tilde{a}| < \delta$, 有 $|f(\tilde{c}) - \tilde{B}| \not< \varepsilon$ ($\not<$ 表示不小于)

取 $\delta_1 = 1$, $\exists \tilde{c}_1, 0 < |\tilde{c}_1 - \tilde{a}| < 1$, 有 $|f(\tilde{c}_1) - \tilde{B}| \not< \varepsilon$

取 $\delta_2 = \frac{1}{2}$, $\exists \tilde{c}_2, 0 < |\tilde{c}_2 - \tilde{a}| < \frac{1}{2}$, 有 $|f(\tilde{c}_2) - \tilde{B}| \not< \varepsilon$

...

取 $\delta_n = \frac{1}{n}$, $\exists \tilde{c}_n, 0 < |\tilde{c}_n - \tilde{a}| < \frac{1}{n}$, 有 $|f(\tilde{c}_2) - \tilde{B}| \not< \varepsilon$

$\tilde{B}| \not< \varepsilon$

于是, 构造出一个复数列 $\{\tilde{c}_n\}$, $\tilde{c}_n \neq \tilde{a}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{c}_n = \tilde{a}$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\tilde{c}_n) \neq \tilde{B}$, 与已知矛盾。

定理 14 若 $\lim_{\tilde{c} \rightarrow \tilde{a}} f(\tilde{c}) = \tilde{B}$, $\lim_{\tilde{c} \rightarrow \tilde{a}} g(\tilde{c}) = \tilde{c}$, 且存在 $\delta_0 > 0$, 对任意 $\tilde{c}: 0 < |\tilde{c} - \tilde{a}| < \delta_0$ 有 $|f(\tilde{c})| \leq g(\tilde{c})$, 则 $\tilde{B} \leq \tilde{c}$ 。

证明: 由 $\lim_{\tilde{c} \rightarrow \tilde{a}} f(\tilde{c}) = \tilde{B}$, $\lim_{\tilde{c} \rightarrow \tilde{a}} g(\tilde{c}) = \tilde{c}$ 知对任意复数列 $\{\tilde{c}_n\}$, 且 $\tilde{c}_n \neq \tilde{a}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{c}_n = \tilde{a}$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\tilde{c}_n) = \tilde{B}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} g(\tilde{c}_n) = \tilde{c}$ 。由已知存在自然数 N , $\forall n > N$, $|f(\tilde{c}_n)| \leq g(\tilde{c}_n)$, 由定理 5 有 $\tilde{B} \leq \tilde{c}$

定理 15 若对任意 $\tilde{c}: 0 < |\tilde{c} - \tilde{a}| < \delta_0$, 有 $|f(\tilde{c})| \leq g(\tilde{c}) \leq h(\tilde{c})$, 且

$$\lim_{\tilde{c} \rightarrow \tilde{a}} f(\tilde{c}) = \lim_{\tilde{c} \rightarrow \tilde{a}} h(\tilde{c}) = \tilde{B}, \text{ 则 } \lim_{\tilde{c} \rightarrow \tilde{a}} g(\tilde{c}) = \tilde{B}。$$

证明: 由 $\lim_{\tilde{c} \rightarrow \tilde{a}} f(\tilde{c}) = \lim_{\tilde{c} \rightarrow \tilde{a}} h(\tilde{c}) = \tilde{B}$, 知对任意复数列 $\{\tilde{c}_n\}$, 且 $\tilde{c}_n \neq \tilde{a}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{c}_n = \tilde{a}$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\tilde{c}_n) = \tilde{B}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} h(\tilde{c}_n) = \tilde{B}$ 。

由已知存在自然数 N , $\forall n > N$, $|f(\tilde{c}_n)| \leq g(\tilde{c}_n) \leq h(\tilde{c}_n)$, 由定理 6 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} g(\tilde{c}_n) = \tilde{B}$, 因此 $\lim_{\tilde{c} \rightarrow \tilde{a}} g(\tilde{c}) = \tilde{B}$

定理 16 (柯西收敛准则) 极限 $\lim_{\tilde{c} \rightarrow \tilde{a}} f(\tilde{c})$ 存在 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall \tilde{c}_1, \tilde{c}_2: 0 < |\tilde{c}_1 - \tilde{a}| < \delta$ 与 $0 < |\tilde{c}_2 - \tilde{a}| < \delta$, 有 $|f(\tilde{c}_1) - f(\tilde{c}_2)| < \varepsilon$ 。

证明: $\Rightarrow$ 设 $\lim_{\tilde{c} \rightarrow \tilde{a}} f(\tilde{c}) = \tilde{B}$, 则对任意实数 $\varepsilon > 0$, 存在实数 $\delta > 0$, 当 $0 < |\tilde{c} - \tilde{a}| < \delta$ 时, 有 $|f(\tilde{c}) - \tilde{B}| < \varepsilon$, 当 $0 < |\tilde{c}_1 - \tilde{a}| < \delta$ 与 $0 < |\tilde{c}_2 - \tilde{a}| < \delta$ 时, 同时有 $|f(\tilde{c}_1) - \tilde{B}| < \varepsilon$, 与 $|f(\tilde{c}_2) - \tilde{B}| < \varepsilon$, 所以

$$|f(\tilde{c}_1) - f(\tilde{c}_2)| \leq |f(\tilde{c}_1) - \tilde{B}| + |f(\tilde{c}_2) - \tilde{B}| < 2\varepsilon$$

$\Leftarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall \tilde{c}_1, \tilde{c}_2: 0 < |\tilde{c}_1 - \tilde{a}| < \delta$ 与 $0 < |\tilde{c}_2 - \tilde{a}| < \delta$, 有 $|f(\tilde{c}_1) - f(\tilde{c}_2)| < \varepsilon$ 。

对复数列 $\{\tilde{c}_n\}$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{c}_n = \tilde{c}$, $\tilde{c}_n \neq \tilde{c}$, 则对上述 $\delta > 0$, 存在自然数 N_1 , $\forall n, m > N_1$, 有 $0 < |\tilde{c}_n - \tilde{a}| < \delta$

$\delta, 0 < |\tilde{c}_m - \tilde{a}| < \delta$, 由已知有 $|f(\tilde{c}_n) - f(\tilde{c}_m)| < \varepsilon$,

由定理7知 $\{f(\tilde{c}_n)\}$ 收敛, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\tilde{c}_n) = \tilde{B}$, 即

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_2 > 0, \forall n > N_2$: 有 $|f(\tilde{c}_n) - \tilde{B}| < \varepsilon$.

对任意复数列 $\{\tilde{c}_n'\}$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{c}_n' = \tilde{c}, \tilde{c}_n' \neq \tilde{c}$, 则对上述 $\delta > 0$, 存在自然数 $N_3, \forall n > N_3$, 有 $0 < |\tilde{c}_n' - \tilde{a}| < \delta$, 由已知有 $|f(\tilde{c}_n') - f(\tilde{c}_n)| < \varepsilon$.

取 $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}, \forall n > N$, 有

$|f(\tilde{c}_n') - \tilde{B}| \leq |f(\tilde{c}_n') - f(\tilde{c}_n)| + |f(\tilde{c}_n) - \tilde{B}| < 2\varepsilon$.

所以复数列 $\{f(\tilde{c}_n')\}$ 收敛, 由此知 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\tilde{c}) = \tilde{B}$.

参考文献:

- [1] 邓胜岳, 周立前. 求解上层含约束条件且具有模糊决策变量二层线性规划的结构元方法 [J]. 模糊系统与数学, 2014, 28(6): 105-112.
- [2] 刘云志, 郭嗣琮. 含直觉模糊弹性约束的模糊线性规划求解 [J]. 系统工程理论与实践, 2013, 33(8): 2027-2032.
- [3] 齐美然, 郭子雪, 梁富凯, 等. 含模糊参数的应急物资筹集决策成本最小化模型 [J]. 河北大学学报, 2012, 32(2): 124-128.
- [4] 兰蓉, 范九伦. 梯形模糊数上的完备性度量及其在多属性决策中的应用 [J]. 工程数学学报, 2010(6): 1001-1008.
- [5] 陈晓红, 阳熹. 一种基于三角模糊数的多属性群决策方法 [J]. 系统工程与电子技术, 2008, 30(2): 278-282.
- [6] 邓胜岳, 周立前, 汪新凡. 上层含约束条件且具有模糊决策变量的二层多随从线性规划 [J]. 控制与决策, 2014, 29(10): 1803-1808.
- [7] 刘琦, 顾幸生. 基于模糊规划的不确定性条件下递阶生产计划模型 [J]. 信息与控制, 2000, 29(5): 399-406.
- [8] 宋业新, 陈绵云, 吴晓平. 模糊多目标有约束投资项目选择建模 [J]. 系统工程理论与实践, 2002, 29(5): 115-119.
- [9] 吴从炘, 任雪昆, 吴冲. 模糊分析中的泛函空间 [J]. 中国科学: 数学, 2015, 45(9): 1473-1486.
- [10] 顾翠伶, 朱思峰. 基于指数型模糊数的模糊多属性决策方法 [J]. 模糊系统与数学, 2015, 29(3): 167-173.
- [11] 李俊红, 文艺. 基于梯形模糊数的模糊最小一乘回归模型 [J]. 系统工程理论与实践, 2015, 35(6): 1520-1527.
- [12] 岳立柱. 模糊结构元理论拓展及其决策应用 [D]. 沈阳: 辽宁工程技术大学, 2011: 3-8.
- [13] 魏俊领. 模糊复分析研究的新途径 [D]. 石家庄: 河北科技大学, 2010: 1-7.
- [14] MAGASSY Ousmane, WU Cong Xin. Notes on the limit of complex fuzzy functions [J]. 黑龙江大学学报, 2003, 20(1): 1-7.
- [15] 毕淑娟, 吴从炘. 模糊数的运算性质及模糊数的距离与极限 [J]. 模糊系统与数学, 2000, 14(3): 40-44.
- [16] 吴从炘, 马明. 模糊分析学基础 [M]. 北京: 国防工业出版社, 1991: 24-104.
- [17] ZHANG Guang Quan Fuzzy limit theory of fuzzy complex number [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1992(46): 227-235.
- [18] DIAMOND P, KLOEDEN P. Metric Space of Fuzzy Stes [M]. Singapore: World Scientific, 1994: 1-178.
- [19] BUCKLEY J J. Fuzzy Complex Numders [J]. Fuzzy Set and Systems, 1989(33): 333-345.
- [20] 毕淑娟. 复模糊数及其收敛性 [J]. 数学的实践与认识, 2007, 37(1): 126-133.

(编辑: 王 萍)