

素特征域上 $sl(2,1)$ 和 $sl(1,2)$ 在广义 Witt 李超代数上的中心化子

刘佳琪, 钱琪国, 郑克礼

(东北林业大学 数学系, 哈尔滨 150040)

摘 要: 主要研究了在素特征域上特殊线性李超代数 $sl(2,1)$ 和 $sl(1,2)$ 在广义 Witt 李超代数上的中心化子。通过解线性方程组并对照 $gl(2,1)$ 和 $gl(2,1)$ 在奇部和偶部的中心化子, 确定了 $sl(2,1)$ 和 $sl(1,2)$ 在广义 Witt 型李超代数的中心化子。

关键词: 李超代数; 中心化子; 线性方程组

DOI: 10.15938/j.jhust.2021.01.021

中图分类号: O152.5 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2021)01-0144-05

Centralizers of $sl(2,1)$ and $sl(1,2)$ in the Generalized Witt Lie Superalgebra over Fields of Prime Characteristics

LIU Jia-qi, QIAN Qi-guo, ZHENG Ke-li

(Department of Mathematics, Northeast Forestry University, Harbin 150040, China)

Abstract: Centralizers of the special linear Lie superalgebra $sl(2,1)$ and $sl(1,2)$ on the generalized Witt Lie superalgebra are studied. By solving linear equations and comparing centralizers of the even and odd parts of $gl(2,1)$ and $gl(2,1)$, centralizers of $sl(2,1)$ and $sl(1,2)$ in the generalized Witt Lie superalgebra over fields of prime characteristic are determined.

Keywords: Lie superalgebra; centralizer; linear equations

0 引 言

李代数是代数学前沿领域中具有重要地位的学科之一^[1]。20 世纪 70 年代初, 由于物理学中超对称性问题研究的需要, 李代数被推广到李超代数并成为一个活跃的研究领域。根据代数基域特征的不

同, 李超代数分为模李超代数(素特征域上的李超代数)和非模李超代数(特征零域上的李超代数)^[2-3]。1970 年, 前苏联数学家 Kac 完成了特征零域上的有限维单李超代数的分类^[4]。1992 年, Petrogradski 定义了限制李超代数并给出了处理模李超代数的基本方法^[5]。对于模李超代数的研究, 数学和物理学家目前进行的研究都不多, 主要原因

收稿日期: 2019-04-30

基金项目: 国家自然科学基金(11171055); 东北林业大学大学生创新训练项目(201810225094); 中央高校基本科研业务费专项资金资助(2572018BC15)。

作者简介: 刘佳琪(1998—), 女, 本科生;

钱琪国(1998—), 男, 本科生。

通信作者: 郑克礼(1983—), 男, 博士, 讲师, E-mail: zhengkl@nefu.edu.cn。

在于物理中与其相匹配的模型较少。处理模李超代数的相关问题需要应用到不同于非模李超代数的技术手段。Cartan 型模李超代数在模李超代数的研究中起到极其重要的作用^[6-9], 这是因为模李超代数和模李超代数的主要区别体现在 Cartan 型上。已知的八类 Cartan 型模李超代数的导子超代数可通过同调代数的手法统一解决^[10]。近期关于有限维 Cartan 型模李超代数的结构与表示方法被广泛研究并取得一定进展^[11-17]。中心化子起源于群结构的研究, 其为一类重要的正规子群。相对应的李超群的线性化对象李超代数自然也有着中心化子。然而, 有限维单模李超代数的分类问题还没有完全解决。而研究李超代数的中心化子可以为研究模李超代数的结构提供基础, 进而可以对模李超代数的分类工作提供帮助^[18]。本文通过解线性方程组的方法确定李超代数的两类中心化子即 $C_W(sl(2, 1))$ 和 $C_W(sl(1, 2))$ 。

1 基础知识

设 W 为广义 Witt 型李超代数^[6-7], 且其有如下结构:

$$W = w \oplus \omega,$$

其中:

$$w = \bigoplus_{i=0}^n w_i = \bigoplus_{i=0}^n \langle x^{(\alpha)} \xi^u D_k \mid \alpha \in A(m, t), u \in B, |u| = i, k \in Y_0 \rangle$$

$$\omega = \bigoplus_{j=0}^n \omega_j = \bigoplus_{j=0}^n \langle x^{(\alpha)} \xi^u d_l \mid \alpha \in A(m, t), u \in B, |u| = j, l \in Y_1 \rangle$$

则显然有 $\{X_2 D_1, X_1 D_2, \xi_1 D_1, \xi_1 D_2, X_1 d_1, X_2 d_1, X_1 D_1 - X_2 D_2, X_1 D_1 + \xi_1 d_1\}$ 同构于 $sl(2, 1)$ 的一组基, $\{\xi_1 D_1, \xi_2 D_1, X_1 d_1, X_1 d_2, \xi_2 d_1, \xi_1 d_2, \xi_1 d_1 - \xi_2 d_2, X_1 D_1 + \xi_1 d_1\}$ 同构于 $sl(1, 2)$ 的一组基。

根据文 [20] 可知, $\{X_1 D_1, X_2 D_1, X_1 D_2, X_2 D_2, \xi_1 D_1, \xi_1 D_2, X_1 d_1, X_2 d_1, \xi_1 d_1\}$ 同构于 $gl(2, 1)$ 的标准基, $\{\xi_1 D_1, \xi_2 D_1, X_1 d_1, X_1 d_2, \xi_1 d_1, \xi_2 d_1, \xi_1 d_2, \xi_2 d_2, X_1 D_1\}$ 同构于 $gl(1, 2)$ 的标准基, 可以得到 $gl(2, 1)$, $gl(1, 2)$ 的中心化子分别是 $sl(2, 1)$, $sl(1, 2)$ 的中心化子的子集。

因此, 本文只需求解出 $sl(2, 1)$, $sl(1, 2)$ 与 $gl(2, 1)$, $gl(1, 2)$ 不同的基的中心化子, 再借助素特征域上 $gl(2, 1)$, $gl(1, 2)$ 在广义 Witt 李超代数型李超代数的中心化子, 最终得出 $sl(2, 1)$, $sl(1, 2)$ 在广义 Witt 李超代数上的中心化子。

2 中心化子 $C_W(sl(2, 1))$

命题 1 $C_{w_0}(sl(2, 1)) = \langle X^{(\alpha)} - \langle i \rangle D_k \mid i \in \{1, 2\}, |\alpha| = 2, k \in Y_0 \setminus \{1, 2\} \rangle \oplus \langle \xi_j D_k \mid j \in Y_1 \setminus \{1\}, k \in Y_0 \setminus \{1, 2\} \rangle$

证明: 由 $w_0 = \langle X^{(\alpha)} \xi^u D_k \mid |\alpha| + |u| = 1, k \in Y_0 \rangle$ 可知:

1) 若 $X^{(\alpha)}$ 为 X_1 或 X_2 时, 设 $a = \sum_{k \in Y_0} c_k X^{(\alpha)} D_k + \sum_{j=1}^n \sum_{k \in Y_0} g_{jk} \xi_j D_k$, 则

$$[X_1 D_1 - X_2 D_2, a] = \sum_{k \in Y_0} c_k X_1 D_k - \sum_{k \in Y_0} c_k X_2 D_k - c_1 X^{(\alpha)} D_1 - \sum_{j=1}^n g_{j1} \xi_j D_1 + c_2 X^{(\alpha)} D_2 + \sum_{j=1}^n g_{j2} \xi_j D_2 = 0$$

$$[X_1 D_1 + \xi_1 d_1, a] = \sum_{k \in Y_0} c_k X_1 D_k + \sum_{j=1}^n g_{1k} \xi_1 D_k - c_1 X^{(\alpha)} D_1 - \sum_{j=1}^n g_{j1} \xi_j d_1 - \sum_{j=1}^n g_{j1} \xi_j D_1 = 0$$

比较系数结果为 $\langle \xi_j D_k \mid j \in Y_1 \setminus \{1\}, k \in Y_0 \setminus \{1, 2\} \rangle$ 。

2) 若 $X^{(\alpha)}$ 不为 X_1 或 X_2 时, 设 $a = \sum_{k \in Y_0 \setminus \{1, 2\}} c_k X^{(\alpha)} D_k$, $i, j = 1, 2$, 有

$$[X_1 D_1 - X_2 D_2, a] = 0$$

$$[X_1 D_1 + \xi_1 d_1, a] = 0$$

等式成立, 此时, 结果为 $\langle X^{(\alpha)} - \langle i \rangle D_k \mid i \in \{1, 2\}, |\alpha| = 2, k \in Y_0 \setminus \{1, 2\} \rangle$

综上所述: $C_{w_0}(sl(2, 1)) = C_{w_0}(gl(2, 1))$, 结论得证。

命题 2 $C_{w_1}(sl(2, 1)) = \langle X^{(\alpha)} - \langle i \rangle \xi_j D_k \mid i \in \{1, 2\}, |\alpha| = 2, j \in Y_1 \setminus \{1\}, k \in Y_0 \setminus \{1, 2\} \rangle \oplus \langle X^{(\beta)} - \langle i \rangle D_k \mid i \in \{1, 2\}, |\beta| = 3, k \in Y_0 \setminus \{1, 2\} \rangle \oplus \langle \xi^{u-(j)} D_k \mid j \in \{1\}, |u| = 3, k \in Y_0 \setminus \{1, 2\} \rangle$

证明: 由 $w_1 = \langle X^{(\alpha)} \xi^u D_k \mid |\alpha| + |u| = 2, k \in Y_0 \rangle$ 可知:

1) 若 $X^{(\alpha)} \xi^u D_k$ 中的 $X^{(\alpha)}$ 为 X_1 或 X_2 , $X^{(\beta)}$ 中含有 X_1 或 X_2 时, 对于 $\xi_i \xi_j D_k$, $i < j$, 设 $a = \sum_{j=1}^n \sum_{k \in Y_0} c_{jk} X^{(\alpha)} \xi_j D_k + \sum_{k \in Y_0} g_k X^{(\beta)} D_k + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \sum_{k \in Y_0} h_{ijk} \xi_i \xi_j D_k$, 有

$$[X_1 D_1 - X_2 D_2, a] = 0, [X_1 D_1 + \xi_1 d_1, a] = 0.$$

已知 $c_{jk} = g_k = 0, h_{ij1} = h_{ij2} = 0, h_{1jk} = 0, i \neq j, i, j \in Y_1 \setminus \{1\}$, 等式显然成立。此时, 结果为 $\langle \xi^{u-(j)} D_k \mid j \in Y_1 \setminus \{1\}, |u| = 3, k \in Y_0 \setminus \{1, 2\} \rangle$ 。

2) 若 $X^{(\alpha)} \xi_j D_k$ 中 $X^{(\alpha)}$ 不为 X_1 或 X_2 , 其中 $j \in Y_1 \setminus \{1\}$, $k \in Y_0 \setminus \{1, 2\}$, 并且同时满足 $X^{(\beta)}$ 中不含有 X_1 或 X_2 , $k \in Y_0 \setminus \{1, 2\}$ 时, 则

$$[l(2,1), a] = 0$$

此时, 结果为 $\langle X^{(\alpha) - \langle i \rangle} \xi_j D_k | i \in \{1, 2\}, |\alpha| = 2, j \in Y_1 \setminus \{1\}, k \in Y_0 \setminus \{1, 2\} \rangle \oplus \langle X^{(\beta) - \langle i \rangle} D_k | i \in \{1, 2\}, |\beta| = 3, k \in Y_0 \setminus \{1, 2\} \rangle$

综上所述: $C_{w_1}(sl(2,1)) = C_{w_1}(gl(2,1))$, 结论得证。

命题3 $C_{w_2}(sl(2,1)) = \langle X^{(\alpha) - \langle i \rangle} \xi^u = \langle j \rangle D_k | |\alpha| = 2, i \in \{1, 2\}, |u| = 3, j \in \{1\}, k \in Y_0 \setminus \{1, 2\} \rangle \oplus \langle X^{(\beta) - \langle i \rangle} \xi_j D_k | i \in \{1, 2\}, |\beta| = 3, j \in Y_1 \setminus \{1\}, k \in Y_0 \setminus \{1, 2\} \rangle \oplus \langle X^{(\gamma) - \langle i \rangle} D_k | i \in \{1, 2\}, |\gamma| = 4, k \in Y_0 \setminus \{1, 2\} \rangle \oplus \langle \xi^u = \langle j \rangle D_k | j \in \{1\}, |u| = 4, k \in Y_0 \setminus \{1, 2\} \rangle$

证明: 由 $w_2 = \langle X^{(\alpha)} \xi^u D_k | |\alpha| + |u| = 3, k \in Y_0 \rangle$ 可知

1) 若 $X^{(\alpha)}, X^{(\beta)}, X^{(\gamma)}$ 中含有 X_1 或 X_2 时, 对于 $\xi_i \xi_j \xi_l D_k, i < j < l$. 设

$$a = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \sum_{k \in Y_0} h_{ijk} X^{(\alpha)} \xi_i \xi_j D_k + \sum_{i=1}^n \sum_{k \in Y_0} c_{jk} X^{(\beta)} \xi_j D_k + \sum_{k \in Y_0} g_k X^{(\gamma)} D_k + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \sum_{k \in Y_0} m_{ijk} \xi_i \xi_j \xi_l D_k$$

类似的, 做 $[X_1 D_1 - X_2 D_2, a] = 0, [X_1 D_1 + \xi_1 d_1, a] = 0$. 得到结果为:

$$\langle \xi^u = \langle j \rangle D_k | j \in \{1\}, |u| = 4, k \in Y_0 \setminus \{1, 2\} \rangle$$

2) 若 $X^{(\alpha)}, X^{(\beta)}, X^{(\gamma)}$ 中不含有 X_1 或 X_2 , 其中 $j \in Y_1 \setminus \{1\}, k \in Y_0 \setminus \{1, 2\}$, 则

$$[l(2,1), a] = 0$$

此时, $a = \langle X^{(\alpha) - \langle i \rangle} \xi^u = \langle j \rangle D_k | |\alpha| = 2, i \in \{1, 2\}, |u| = 3, j \in \{1\}, k \in Y_0 \setminus \{1, 2\} \rangle \oplus$

$\langle X^{(\beta) - \langle i \rangle} \xi_j D_k | i \in \{1, 2\}, |\beta| = 3, j \in Y_1 \setminus \{1\}, k \in Y_0 \setminus \{1, 2\} \rangle \oplus$

$\langle X^{(\gamma) - \langle i \rangle} D_k | i \in \{1, 2\}, |\gamma| = 4, k \in Y_0 \setminus \{1, 2\} \rangle$

由文献[9]中命题3可得 $C_{w_2}(sl(2,1)) = C_{w_2}(gl(2,1))$, 结论得证。

根据文[20]可知, $sl(2,1)$ 与 $gl(2,1)$ 在 w_0, w_1 和 w_2 上的中心化子保持一致, 直接可得:

推论1 $sl(2,1)$ 在 w_k 上的中心化子为

$$C_{w_k}(sl(2,1)) = \oplus \langle X^{(\alpha) - \langle i \rangle} \xi^u = \langle j \rangle D_k | 2 \leq \alpha \leq k+1, i \in \{1, 2\}, |\alpha| + |u| = k+3, j \in \{1\}, k \in Y_0 \setminus \{1, 2\} \rangle \oplus$$

$\langle X^{(\alpha) - \langle i \rangle} D_k | i \in \{1, 2\}, |\alpha| = k+2, k \in Y_0 \setminus \{1, 2\} \rangle \oplus$

$\langle \xi^u = \langle j \rangle D_k | j \in \{1\}, |u| = k+2, k \in Y_0 \setminus \{1, 2\} \rangle$

定理1 $C_w(sl(2,1)) = C_{w_0}(sl(2,1)) \oplus$

$$C_{w_k}(sl(2,1)), 1 \leq k \leq n.$$

命题4 $C_{w_0}(sl(2,1)) = \langle X^{(\alpha) - \langle i \rangle} d_k | i \in \{1, 2\}, |\alpha| = 2, k \in Y_1 \setminus \{1\} \rangle \oplus \langle \xi_j D_k | j \in Y_1 \setminus \{1\}, k \in Y_1 \setminus \{1\} \rangle$

证明: 由 $w_0 = \langle X^{(\alpha)} \xi^u d_k | |\alpha| + |u| = 1, k \in Y_1 \rangle$ 可知:

1) 若 $X^{(\alpha)}$ 为 X_1 或 X_2 时, 设 $a = \sum_{k \in Y_1} c_k X^{(\alpha)} d_k +$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k \in Y_1} g_{jk} \xi_j d_k$$

$$[X_1 D_1 - X_2 D_2, a] = \sum_{k \in Y_1} c_k X_1 d_k - \sum_{k \in Y_1} c_k X_2 d_k = 0$$

$$[X_1 D_1 + \xi_1 d_1, a] = \sum_{k=1}^n g_{1k} \xi_1 d_k - \sum_{j=1}^n g_{j1} \xi_j d_1 = 0$$

因此结果为 $\langle \xi_j d_k | j \in Y_1 \setminus \{1\}, k \in Y_0 \setminus \{1\} \rangle$

2) 若 $X^{(\alpha)}$ 不为 X_1 或 X_2 时, 设 $a = \sum_{k \in Y_1 \setminus \{1\}} c_k X^{(\alpha)} d_k,$

$i, j = 1, 2$, 则有

$$[X_1 D_1 - X_2 D_2, a] = 0$$

$$[X_1 D_1 + \xi_1 d_1, a] = 0$$

因此结果为 $\langle X^{(\alpha) - \langle i \rangle} d_k | i \in \{1, 2\}, |\alpha| = 2, k \in Y_1 \setminus \{1\} \rangle$

综上所述: $C_{w_0}(sl(2,1)) = C_{w_0}(gl(2,1))$, 结论得证。

命题5 $C_{w_1}(sl(2,1)) = \langle X^{(\alpha) - \langle i \rangle} \xi_j d_k | i \in \{1, 2\}, |\alpha| = 2, j \in Y_1 \setminus \{1\}, k \in Y_1 \setminus \{1\} \rangle \oplus$

$\langle X^{(\beta) - \langle i \rangle} d_k | i \in \{1, 2\}, |\beta| = 3, k \in Y_1 \setminus \{1\} \rangle \oplus$

$\langle \xi^u = \langle j \rangle d_k | j \in \{1\}, |u| = 3, k \in Y_1 \setminus \{1\} \rangle$

证明: 由 $w_1 = \langle X^{(\alpha)} \xi^u d_k | |\alpha| + |u| = 2, k \in Y_1 \rangle$ 可知:

1) 若 $X^{(\beta)}$ 中含有 X_1 或 X_2 时, 对于 $\xi_i \xi_j D_k, i < j$, 设

$$a = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{jk} X^{(\alpha)} \xi_j d_k + \sum_{k=1}^n g_k X^{(\beta)} d_k + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \sum_{k=1}^n h_{ijk} \xi_i \xi_j d_k$$

同样, 做 $[X_1 D_1 - X_2 D_2, a] = 0, [X_1 D_1 + \xi_1 d_1, a] = 0$

已知 $c_{jk} = g_k = 0, h_{ij1} = 0, h_{ij2} = 0, h_{ijk} = 0$, 等式显然成立, 此时结果为 $\langle \xi^u = \langle j \rangle d_k | j \in \{1\}, |u| = 3, k \in Y_1 \setminus \{1\} \rangle$

2) $X^{(\alpha)} \xi_j d_k$ 中 $X^{(\alpha)}$ 不为 X_1 或 X_2 , 其中 $j \in Y_1 \setminus \{1\}, k \in Y_1 \setminus \{1\}, X^{(\beta)}$ 中不含有 X_1 或 $X_2, k \in Y_1 \setminus \{1\}$ 时, 则

$$[l(2,1), a] = 0$$

此时, 结果为 $\langle X^{(\alpha) - \langle i \rangle} \xi_j D_k | i \in \{1, 2\}, |\alpha| = 2, j \in Y_1 \setminus \{1\}, k \in Y_0 \setminus \{1, 2\} \rangle \oplus$

$\langle X^{(\beta) - \langle i \rangle} D_k | i \in \{1, 2\}, |\beta| = 3, k \in Y_0 \setminus \{1, 2\} \rangle$

综上所述: $C_{\omega_1}(sl(2, 1)) = C_{\omega_1}(gl(2, 1))$, 结论得证。

命题 6 $C_{\omega_2}(sl(2, 1)) = \langle X^{(\alpha) - (i)} \xi^{u = (j)} d_k \mid |\alpha| = 2, i \in \{1, 2\}, |u| = 3, j \in \{1\}, k \in Y_1 \setminus \{1\} \rangle \oplus \langle X^{(\beta) - (i)} \xi_j d_k \mid i \in \{1, 2\}, |\beta| = 3, j \in Y_1 \setminus \{1\}, k \in Y_1 \setminus \{1\} \rangle \oplus \langle X^{(\gamma) - (i)} d_k \mid i \in \{1, 2\}, |\gamma| = 4, k \in Y_1 \setminus \{1\} \rangle \oplus \langle \xi^{u - (j)} d_k \mid j \in \{1\}, |u| = 4, k \in Y_1 \setminus \{1\} \rangle$

证明: 由 $\omega_2 = \langle X^{(\alpha)} \xi^u d_k \mid |\alpha| + |u| = 3, k \in Y_1 \rangle$ 可知:

1) 若 $X^{(\alpha)}, X^{(\beta)}, X^{(\gamma)}$ 中含有 X_1 或 X_2 时, 对于 $\xi_i \xi_j \xi_l d_k, i < j < l$, 设

$$a = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \sum_{k \in Y_1} h_{ijk} X^{(\alpha)} \xi_i \xi_j d_k + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{jk} X^{(\beta)} \xi_j d_k + \sum_{k=1}^n g_k X^{(\gamma)} d_k + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \sum_{l=j+1}^n \sum_{k \in Y_1} m_{ijkl} \xi_i \xi_j \xi_l d_k$$

类似的, 由 $[X_1 D_1 - X_2 D_2, a] = 0, [X_1 D_1 + \xi_1 d_1, a] = 0$ 可得

$$\langle \xi^{u - (j)} d_k \mid j \in \{1\}, |u| = 4, k \in Y_1 \setminus \{1\} \rangle$$

2) 若 $X^{(\alpha)}, X^{(\beta)}, X^{(\gamma)}$ 中不含有 X_1 或 X_2 其中 $j \in Y_1 \setminus \{1\}, k \in Y_1 \setminus \{1\}$, 则由

$$[l(2, 1), a] = 0$$

可得 $\langle X^{(\alpha) - (i)} \xi^{u = (j)} d_k \mid |\alpha| = 2, i \in \{1, 2\}, |u| = 3, j \in \{1\}, k \in Y_1 \setminus \{1\} \rangle \oplus$

$$\langle X^{(\beta) - (i)} \xi_j d_k \mid i \in \{1, 2\}, |\beta| = 3, j \in Y_1 \setminus \{1\}, k \in Y_1 \setminus \{1\} \rangle \oplus$$

$$\langle X^{(\gamma) - (i)} d_k \mid i \in \{1, 2\}, |\gamma| = 4, k \in Y_1 \setminus \{1\} \rangle$$

综上所述: $C_{\omega_2}(sl(2, 1)) = C_{\omega_2}(gl(2, 1))$, 结论得证。

同理可得

推论 2 $sl(2, 1)$ 在 ω_k 上的中心化子为

$$C_{\omega_k}(sl(2, 1)) = \bigoplus_{\alpha} \langle X^{(\alpha) - (i)} \xi^{u = (j)} d_k \mid 2 \leq \alpha \leq k + 1, i \in \{1, 2\}, |\alpha| + |u| = k + 3, j \in \{1\}, k \in Y_1 \setminus \{1\} \rangle \oplus \langle X^{(\alpha) - (i)} d_k \mid i \in \{1, 2\}, |\alpha| = k + 2, k \in Y_1 \setminus \{1\} \rangle \oplus \langle \xi^{u - (j)} d_k \mid j \in \{1\}, |u| = k + 2, k \in Y_1 \setminus \{1\} \rangle$$

定理 2 $C_{\omega}(sl(2, 1)) = C_{\omega_0}(sl(2, 1)) \oplus C_{\omega_k}(sl(2, 1)), 1 \leq k \leq n$

最终得到 $sl(2, 1)$ 的中心化子为

定理 3 综上所述, 中心化子 $C_W(sl(2, 1))$ 可以表示为

$$C_W(sl(2, 1)) = C_w(sl(2, 1)) \oplus C_{\omega}(sl(2, 1)) =$$

$$C_{\omega_0}(sl(2, 1)) \oplus C_{\omega_0}(sl(2, 1)) \oplus C_{\omega_k}(sl(2, 1)) \oplus C_{\omega_k}(sl(2, 1)) \text{ 其中 } 1 \leq k \leq n$$

3 中心化子 $C_W(sl(1, 2))$

类似于 $C_W(sl(2, 1))$ 的方法可得:

命题 7 $C_{\omega_0}(sl(1, 2)) = \langle X^{(\alpha) - (i)} D_k \mid i \in \{1\}, |\alpha| = 2, k \in Y_0 \setminus \{1\} \rangle \oplus$

$$\langle \xi_j D_k \mid j \in Y_1 \setminus \{1, 2\}, k \in Y_0 \setminus \{1\} \rangle$$

命题 8 $C_{\omega_1}(sl(1, 2)) = \langle X^{(\alpha) - (i)} \xi^{u = (j)} D_k \mid i \in \{1\}, |\alpha| = 2, j \in \{1, 2\}, |u| = 2, k \in Y_0 \setminus \{1\} \rangle \oplus$

$$\langle X^{(\beta) - (i)} D_k \mid i \in \{1\}, |\beta| = 3, k \in Y_0 \setminus \{1\} \rangle \oplus$$

$$\langle \xi^{u - (j)} D_k \mid j \in \{1, 2\}, |u| = 3, k \in Y_0 \setminus \{1\} \rangle$$

命题 9 $C_{\omega_2}(sl(1, 2)) = \langle X^{(\alpha) - (i)} \xi^{u = (j)} D_k \mid |\alpha| = 2, i \in \{1\}, |u| = 3, j \in \{1, 2\}, k \in Y_0 \setminus \{1\} \rangle \oplus$

$$\langle X^{(\beta) - (i)} \xi^{u = (j)} D_k \mid i \in \{1\}, |\beta| = 3, j \in \{1, 2\}, |u| = 2, k \in Y_0 \setminus \{1\} \rangle \oplus$$

$$\langle X^{(\gamma) - (i)} D_k \mid i \in \{1\}, |\gamma| = 4, k \in Y_0 \setminus \{1\} \rangle \oplus$$

$$\langle \xi^{u - (j)} D_k \mid j \in \{1, 2\}, |u| = 4, k \in Y_0 \setminus \{1\} \rangle$$

推论 3 $sl(1, 2)$ 在 ω_k 上的中心化子为

$$C_{\omega_k}(sl(1, 2)) = \bigoplus_{\alpha} \langle X^{(\alpha) - (i)} \xi^{u = (j)} D_k \mid 2 \leq \alpha \leq k + 1, i \in \{1\}, |\alpha| + |u| = k + 3, j \in \{1, 2\}, k \in Y_0 \setminus \{1\} \rangle \oplus$$

$$\langle X^{(\alpha) - (i)} D_k \mid i \in \{1\}, |\alpha| = k + 2, k \in Y_0 \setminus \{1\} \rangle \oplus$$

$$\langle \xi^{u - (j)} D_k \mid j \in \{1, 2\}, |u| = k + 2, k \in Y_0 \setminus \{1\} \rangle$$

定理 4 $C_w(sl(1, 2)) = C_{\omega_0}(sl(1, 2)) \oplus C_{\omega_k}(sl(1, 2)), 1 \leq k \leq n$

命题 10 $C_{\omega_0}(sl(1, 2)) = \langle X^{(\alpha) - (i)} d_k \mid i \in \{1\}, |\alpha| = 2, k \in Y_1 \setminus \{1, 2\} \rangle \oplus$

$$\langle \xi_j D_k \mid j \in Y_1 \setminus \{1, 2\}, k \in Y_1 \setminus \{1, 2\} \rangle$$

命题 11 $C_{\omega_1}(sl(1, 2)) = \langle X^{(\alpha) - (i)} \xi^{u = (j)} d_k \mid i \in \{1\}, |\alpha| = 2, j \in \{1, 2\}, k \in Y_1 \setminus \{1, 2\} \rangle \oplus$

$$\langle X^{(\beta) - (i)} d_k \mid i \in \{1\}, |\beta| = 3, k \in Y_1 \setminus \{1, 2\} \rangle \oplus$$

$$\langle \xi^{u - (j)} d_k \mid j \in \{1, 2\}, |u| = 3, k \in Y_1 \setminus \{1, 2\} \rangle$$

推论 4 $sl(1, 2)$ 在 ω_k 上的中心化子为

$$C_{\omega_k}(sl(1, 2)) = \bigoplus_{\alpha} \langle X^{(\alpha) - (i)} \xi^{u = (j)} d_k \mid 2 \leq \alpha \leq k + 1, i \in \{1\}, |\alpha| + |u| = k + 3, j \in \{1, 2\}, k \in Y_1 \setminus \{1, 2\} \rangle \oplus$$

$$\langle X^{(\alpha) - (i)} d_k \mid i \in \{1\}, |\alpha| = k + 2, k \in Y_1 \setminus \{1, 2\} \rangle \oplus$$

$$\langle \xi^{u - (j)} d_k \mid j \in \{1, 2\}, |u| = k + 2, k \in Y_1 \setminus \{1, 2\} \rangle$$

定理 5 $C_{\omega}(sl(1, 2)) = C_{\omega_0}(sl(1, 2)) \oplus C_{\omega_k}(sl(1, 2)), \text{ 其中 } 1 \leq k \leq n.$

参 考 文 献:

- [1] 张永正,王颖,张庆成. 模李超代数研究的若干进展 [J]. 数学进展, 2002, 31(6): 495.
ZHANG Yongzheng, WANG Ying, ZHANG Qingcheng. Some Developments in the Study of Modular Lie Superalgebras [J]. Mathematics Progress, 2002, 31(6): 495.
- [2] SUN L P, LIU W D. Low-dimensional Cohomology of Lie Superalgebra $A(1; 0)$ with Coefficients in Witt or Special Superalgebras [J]. Taiwan J Math, 2013, 17: 83.
- [3] SUN L P, LIU W D, WU B Y. Low-dimensional Cohomology of Lie Superalgebra with Coefficients in Witt or Special Superalgebras [J]. Indag Math (N S), 2014, 25(1): 59.
- [4] KAC V G. Lie Superalgebras [J]. Adv Math, 1977, 26: 8.
- [5] Petrogradski V M. Identities in Enveloping Algebras for Modular Lie Superalgebras [J]. Algebra, 1992, 145: 1.
- [6] ZHANG Y Z. Finite-dimensional Lie Superalgebras of Cartan-type over Fields of Prime Characteristic [J]. Chin Sci Bull, 1997, 42: 720.
- [7] ZHANG Y Z, NAN J Z. Finite Dimensional Lie Superalgebras $W(m, n, t)$ and $S(m, n, t)$ of Cartan Type [J]. Mathematics progress, 1998, 27(3): 240.
- [8] 张永正. Cartan-型 Z -阶化李超代数 $W(n)$ 和 $S(n)$ 的阶化模 [J]. 科学通报, 1995, 40: 1829.
ZHANG Yongzheng. Cartan-type Z -graded Lie Superalgebras $W(n)$ and $S(n)$ [J]. Chinese Science Bulletin, 1995, 40: 1829.
- [9] ZHANG Y Z. Z -graded Module of Lie Superalgebra $H(n)$ of Cartan Type [J]. Chin Sci Bull, 1996, 41: 813.
- [10] BAIW, LIU W D. Superderivations for Modular Graded Lie Superalgebras of Cartan Type [J]. Algebr Represent Theor, 2014, 17: 69.
- [11] LIU W D, SUN Y C, ZHANG Y Z. Even Parts of Hamiltonian Superalgebras in Prime Characteristic [J]. Chinese Annals of Mathematics, 2010, 5(5): 579.
- [12] GUAN B L, CHEN L Y. Derivations of the Even Part of Contact Lie Superalgebra [J]. Journal of Pure & Applied Algebra, 2012, 216(6): 1454.
- [13] WEI Z, ZHANG Y Z. Derivations for Even Part of Finite-dimensional Modular Lie Superalgebra Ω [J]. Frontiers Math China, 2012, 7(6): 1169.
- [14] 华秀英,刘文德,崔云安. 李代数 $sl(2, C)$ 上的经典 Yang-Baxter 方程的解及其应用 [J]. 哈尔滨理工大学学报, 2015, 20(5): 199.
HUA Xiuying, LIU Wende, CUI Yunan. The Solution and Application of Classical Yang-Baxter Equation on Lie Algebra $sl(2, C)$ [J]. Journal of Harbin University of Science and Technology, 2015, 20(5): 199.
- [15] YUAN J X, CHEN Y, LIU W D. Automorphisms and P -characters of Restricted Lie Superalgebras of Cartan Type [J]. Algebra Colloq, 2011, 18(3): 397.
- [16] ZHENG K L, ZHANG Y Z, ZHANG J Q. A Class of Finite Dimensional Modular Lie Superalgebras of Special Type [J]. Bull Malaysian Math Sci Soc, 2016, 39(1): 381.
- [17] ZHENG K L, ZHANG Y Z. Some Properties of Generalized Reduced Verma Modules over Z -graded Modular Lie Superalgebras [J]. Czech Math J, 2017, 67(3): 699.
- [18] ZHENG K L, ZHANG Y Z. Irreducible Modules with Highest Weight Vectors over Modular Witt and Special Lie Superalgebras [J]. Open Math, 2019, 17(1): 1381.
- [19] 郑克礼,张永正. 系数在模李超代数 $W(m, 3, 1)$ 上的 $gl(0, 2)$ 的一维上同调 [J]. 数学年刊 A 辑(中文版), 2014, 35(6): 717.
ZHENG Keli, ZHANG Yongzheng. One-dimensional Cohomology of $gl(0, 2)$ with Coefficients on the Modular Lie Superalgebra $W(m, 3, 1)$ [J]. Annals of Mathematics, Series A (Chinese Edition), 2014, 35(6): 717.
- [20] 侯莹,郑克礼,陈良云. 三阶矩阵李超代数的一类中心化子 [J]. 海南热带海洋学院学报, 2017, 24(5): 42.
HOU Ying, ZHENG Keli, CHEN Liangyun. A Class of Centralizers of Third-order Lie Superalgebras [J]. Journal of Hainan Institute of Tropical Oceanography, 2017, 24(5): 42.

(编辑: 温泽宇)