

一类线性微分方程的指数增长型伪概自守温和解

姚慧丽, 郭洛君, 王晶囡, 宋晓秋

(哈尔滨理工大学 理学院数学系, 哈尔滨 150080)

摘 要: 微分方程是基于解决各种实际问题而建立的一种数学模型, 对微分方程的一个主要研究方向是各种解的存在性问题。伪概自守函数是比概自守函数、渐近概自守函数更广的函数。本文将探讨一类指数增长型的伪概自守函数在一类线性微分方程中的应用, 利用 C_0 -半群以及这类函数的有关理论, 研究此类型方程指数增长型的伪概自守温和解的存在问题以及唯一问题。

关键词: 微分方程; 伪概自守温和解; 指数增长型; C_0 -半群

DOI: 10.15938/j.jhust.2020.01.021

中图分类号: O175 文献标志码: A 文章编号: 1007-2683(2020)01-0140-04

Exponential Type Pseudo Almost Automorphic Mild Solution for a Class of Linear Differential Equation

YAO Hui-li, GUO Ming-jun, WANG Jing-nan, SONG Xiao-qiu

(Department of Mathematics, School of Sciences, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: Differential equations are a kind of mathematical models which have been established to solve all kinds of practical problems. The existence problems of various solutions for differential equations are a main research direction. Pseudo almost automorphic functions are more wide functions than almost automorphic functions and asymptotically almost automorphic functions. The applications of exponential type pseudo almost automorphic functions on a class of linear differential equations will be investigated, the existence problems and uniqueness problems of exponential type pseudo almost automorphic mild solution of this type equations are researched by using some related theories of C_0 -semigroup and this type functions in this paper.

Keywords: differential equations; pseudo almost automorphic mild solution; exponential type; C_0 -semigroup

0 引 言

各种方程的概周期型解已被数学工作者进行了研究, 如文 [1-5]。1962 年, S. Bochner 将刻画概周期函数定义的条件变弱, 给出了更广的一类函数的定义, 即概自守函数 [6]。G. M. N' Guerekata 又先后对概自守和渐近概自守函数做了系统研究总结 [7-8]。随后, 梁进等人定义了伪概自守函数 [9], 且

包含关系为

$\{\text{概自守函数}\} \subset \{\text{渐近概自守函数}\} \subset \{\text{伪概自守函数}\}$

这三类函数统称为概自守型函数。自此型函数理论建立以来, 很多文献对各类微分方程的这种型的解存在问题进行了探讨 [10-13]。特别近几年来, 概自守型函数被学者们应用到了各种随机微分方程中, 探究了这些方程的概自守型解的存在问题 [16-20]。下列方程

收稿日期: 2018-05-05

基金项目: 国家自然科学基金青年基金(11801122); 黑龙江省自然科学基金(2018006)。

作者简介: 郭洛君(1989—), 女, 硕士研究生;

王晶囡(1978—), 女, 博士, 副教授。

通信作者: 姚慧丽(1970—), 女, 博士, 教授, E-mail: Huili_yao@sohu.com.

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t), t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (1)$$

的概周期型解和渐近概自守解已被讨论。本文将对它的指数增长型伪概自守温和解进行研究。

1 预备知识

该文 R 表示全体实数, $R^+ = \{a \mid a \in R, a \geq 0\}$, X 为一个 Banach 空间。 $C(R, X)$ 表示从 R 到 X 的有界连续函数全体, $C(R^+, X)$ 表示从 R^+ 到 X 的有界连续函数全体。易知若对 $C(R, X)$ 和 $C(R^+, X)$ 中的函数赋予上确界范数, 则 $C(R, X)$ 和 $C(R^+, X)$ 都可构成 Banach 空间。

定义1 函数 $f(t) \in C(R, X)$ 称为概自守的, 是指若对 R 中的每个序列 $\{s_n\}_{n=1}^\infty$, 都有它的一个子列 $\{\tau_n\}_{n=1}^\infty$ 满足:

$$g(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(t + \tau_n)$$

对任意的 $t \in R$ 都是成立的, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(t - \tau_n) = f(t)$$

对所有 $t \in R$ 都成立。用集合 $AA(R, X)$ 表示概自守函数全体, 简记成 $AA(X)$ 。

令

$$VMV(R, X) = \{f \in C(R, X) :$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \|f(\sigma)\| d\sigma = 0\}$$

$$VMV(R^+, X) = \{f \in C(R, X) :$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \|f(\sigma)\| d\sigma = 0\}$$

易知若 $f \in VMV(R, X)$, 则 $f|_{R^+} \in VMV(R^+, X)$ 。

定义2 设函数 $f(t) \in C(R, X)$, 若 $f(t)$ 能分解为

$$f(t) = g(t) + \varphi(t), t \in R$$

其中 $g \in AA(R, X)$, $\varphi \in VMV(R, X)$, 则称 f 是伪概自守的, 全体此类函数记为 $PAA(R, X)$ 。

$PAA(R^+, X)$ 表示定义在 R^+ 上的所有伪概自守函数, 即 $f \in PAA(R^+, X)$, 是指 f 能写成 $f(t) = g(t)|_{R^+} + \varphi(t)$, 这里 $g \in AA(R, X)$, $\varphi \in VMV(R^+, X)$ 。另外, 易知 $f(t) \in PAA(R^+, X)$ 当且仅当存在 $g \in AA(R, X)$, $\varphi \in VMV(R, X)$ 使得

$$f(t) = g(t) + \varphi(t), t \in R^+$$

由上述定义易知 $AA(R, X)$, $PAA(R, X)$ 以及 $PAA(R^+, X)$ 在上确界范数下都是 Banach 空间。

定义3 设 $\{T(t) : t \geq 0\}$ 是 X 到 X 的一族有界线性算子, 若满足

- 1) $T(0) = I$ (I 为 X 上的恒等算子);
- 2) $T(t+s) = T(t)T(s)$ ($\forall t, s \in R^+$);
- 3) $T(t)$ 是强连续的, 也就是对每一个 $x \in X$, 有

$\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x$, 则称 $\{T(t) : t \geq 0\}$ 是 X 上一个 C_0 -半群。

定义4 线性算子 A 若满足

$$D(A) = \left\{x \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ 存在} \right\} \text{ 且 } A \text{ 定义为}$$

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}, x \in D(A),$$

则称 A 为半群 $\{T(t) : t \geq 0\}$ 的无穷小生成元。

定义5 函数 $f \in C(R^+, X)$ 称为 β -指数增长型伪概自守的, 是指 f 能写成

$$f = e^{\beta t} v, v \in PAA(R^+, X)$$

此类函数全体记为 $PE_\beta(R^+, X)$ 。

另外结合伪概自守函数的性质和 $f \in PE_\beta(R^+, X)$ 的定义易得下列性质:

- 1) 若 $f, g \in PE_\beta(R^+, X)$, $\lambda \in R$, 则 $f + g, \lambda f, f(\cdot + \lambda) \in PE_\beta(R^+, X)$;
- 2) 若 $\beta_1 < \beta_2$, 则 $PE_{\beta_1}(R^+, X) \subset PE_{\beta_2}(R^+, X)$;
- 3) 若对 $f \in PE_\beta(R^+, X)$, 定义范数

$$\|f\| = \sup_{t \in R^+} \|e^{-\beta t} f(t)\|,$$

则 $PE_\beta(R^+, X)$ 构成一个 Banach 空间。

对线性微分方程

$$x'(t) = Ax(t) + f(t), t \in R \quad (2)$$

其中 A 为 C_0 -半群 $\{T(t) : t \geq 0\}$ 的无穷小生成元, 有如下定义:

定义6 称 $x(t) : R \rightarrow X$ 为方程 (2) 的一个温和解, 是指若 $x(t)$ 满足对任意 $t \geq a$ ($a \in R$), 下面等式:

$$x(t) = T(t-a)x(a) + \int_a^t T(t-s)f(s)ds$$

成立。

2 主要结果

本部分讨论下列微分方程

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t), t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

的 β -指数增长型的温和伪概自守解的存在性以及这类解的唯一性问题。

定理1 假设 $f \in PE_\beta(R^+, X)$, A 是 C_0 -半群 $\{T(t) : t \geq 0\}$ 的无穷小生成元, 存在常数 M, ω ($M > 0, \omega < 0, \omega < \beta$) 使得 $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, 则方程 (1) 存在唯一的指数增长型的伪概自守温和解 $x(t)$, 即 $x(t) \in PE_\beta(R^+, X)$ 。

证明: 根据方程相关理论知函数

$$u(t) = T(t)u(0) + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, t \geq 0$$

是方程 (1) 温和解。

由于 $u(t) = e^{\beta t} e^{-\beta t} u(t)$, 所以为了证明 $u(t) \in PE_{\beta}(R^+, X)$, 只需证 $e^{-\beta t} u(t)$ 是伪概自守的。

考虑算子 Ψ :

$$(\Psi x)(t) = \int_{-\infty}^t T(t-s)f(s)ds$$

因为 $f(s) \in PE_{\beta}(R^+, X)$, 所以由定义2和定义5知存在 $g(t) \in AA(R, X)$ 和 $\varphi(t) \in VMV(R, X)$, 使得

$$f(t) = e^{\beta t}(g(t) + \varphi(t)), t \in R^+$$

从而 $e^{-\beta t}(\Psi x)(t)$ 可表示为 $e^{-\beta t}(\Psi x)(t) = G(t) + \Phi(t)$, 其中

$$G(t) = \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-s)} T(t-s)g(s)ds$$

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-s)} T(t-s)\varphi(s)ds$$

以下先证明 $G(t) \in AA(R, X)$ 。

因为 $g \in AA(R, X)$, 所以 g 是有界的, 即存在 $M_1 > 0$, 使得 $\|g\| \leq M_1$, 因此

$$\begin{aligned} \|G(t)\| &\leq \int_{-\infty}^t \|T(t-s)e^{-\beta(t-s)}\| \|g(s)\| ds \leq \\ MM_1 \int_{-\infty}^t e^{(\omega-\beta)(t-s)} ds &\leq MM_1 \frac{1}{\beta-\omega} \end{aligned}$$

从而得到 $G(t)$ 是有界的。

因为 $g \in AA(R, X)$, 由定义1知, 对 R 中的任意序列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, 都可以找到一个子列 $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得,

$$F(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(t + \tau_n) (t \in R)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(t - \tau_n) = g(t) (t \in R)$$

又当 $n = 1, 2, \dots$ 时,

$$\begin{aligned} G(t + \tau_n) &= \int_{-\infty}^{t+\tau_n} T(t + \tau_n - s) e^{-\beta(t+\tau_n-s)} g(s) ds = \\ \int_{-\infty}^t T(t-s) e^{-\beta(t-s)} g(s + \tau_n) ds \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \|G(t + \tau_n)\| &\leq \int_{-\infty}^t \|T(t-s)e^{-\beta(t-s)}\| \|g(s + \tau_n)\| ds \leq \\ MM_1 \frac{1}{\beta-\omega} \end{aligned}$$

因为

$$F(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(t + \tau_n) (t \in R)$$

所以对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在整数 $N > 0$, 使得 $n > N$ 时有

$$\|g(t + \tau_n) - F(t)\| < \varepsilon$$

因此,

$$\begin{aligned} \|T(t-s)e^{-\beta(t-s)}g(s + \tau_n) - T(t-s)e^{-\beta(t-s)}F(s)\| &\leq \\ \|T(t-s)e^{-\beta(t-s)}\| \|g(s + \tau_n) - F(s)\| &\leq \\ Me^{(\omega-\beta)(t-s)}\varepsilon \end{aligned}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 任取 $s \in R, t \geq s$ 时, 有

$$T(t-s)e^{-\beta(t-s)}g(s + \tau_n) \rightarrow T(t-s)e^{-\beta(t-s)}F(s)$$

令 $R(t) = \int_{-\infty}^t T(t-s)e^{-\beta(t-s)}F(s)ds$, 易知

$R(t)$ 对任意的 t 是绝对收敛的。因此结合 Lebesgue 控制收敛定理可得

$$G(t + \tau_n) \rightarrow R(t), (n \rightarrow \infty, t \in R)$$

同理可证,

$$R(t - \tau_n) \rightarrow G(t), (n \rightarrow \infty, t \in R)$$

综上可得 $G(t) \in AA(R, X)$ 。

接下来证明 $\Phi(t) \in VMV(R, X)$ 。

由于 $\varphi(t) \in VMV(R, X)$, 所以 $M_0 = \sup_{t \in R} \|\varphi(t)\| < +\infty$, 从而有

$$\begin{aligned} \int_{-T}^T \int_{-\infty}^{-T} \|T(t-s)e^{-\beta(t-s)}\varphi(s)\| ds dt &\leq \\ \int_{-T}^T \int_{-\infty}^{-T} M_0 M e^{(\omega-\beta)(t-s)} ds dt &\leq \\ M_0 M \int_{-T}^T -\frac{1}{\omega-\beta} e^{(\omega-\beta)(t+T)} dt &\leq \frac{M_0 M}{(\omega-\beta)^2} \end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned} \int_{-T}^T \int_{-T}^t \|T(t-s)e^{-\beta(t-s)}\varphi(s)\| ds dt &\leq \\ \int_{-T}^T \int_{-T}^t M e^{(\omega-\beta)(t-s)} \|\varphi(s)\| ds dt &\leq \\ M \int_{-T}^T \int_s^T e^{(\omega-\beta)(t-s)} \|\varphi(s)\| dt ds &\leq \\ -\frac{M}{\omega-\beta} \int_{-T}^T \|\varphi(s)\| (1 - e^{(\omega-\beta)(T-s)}) ds &\leq \\ \frac{M}{\beta-\omega} \int_{-T}^T \|\varphi(s)\| ds \end{aligned}$$

因为 $\varphi \in VMV(R, X)$, 所以 $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \|\varphi(s)\| ds = 0$ 。

进而有

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-\infty}^t \|T(t-s)e^{-\beta(t-s)}\varphi(s)\| ds dt = \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (\int_{-\infty}^{-T} &\|T(t-s)e^{-\beta(t-s)}\varphi(s)\| ds dt + \\ \int_{-T}^t \|T(t-s)e^{-\beta(t-s)}\varphi(s)\| ds) dt &\leq \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} (-\frac{M_0 M}{(\omega-\beta)^2} - \frac{M}{\omega-\beta} \int_{-T}^T &\|\varphi(s)\| ds) \leq \\ \frac{M}{\beta-\omega} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \|\varphi(s)\| ds &= 0 \end{aligned}$$

因此得 $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-\infty}^t \|T(t-s)e^{-\beta(t-s)}\varphi(s)\| ds dt = 0$, 即 $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \|\Phi(t)\| dt = 0$, 由此得 $\Phi(t) \in VMV(R, X)$ 。

综上所述可得 $e^{-\beta t}(\Psi x)(t)|_{t \in R^+} = e^{-\beta t} \int_{-\infty}^t T(t-s)f(s)ds \in PAA(R^+, X)$ 。

令 $u(a) = \int_{-\infty}^a T(a-s)f(s)ds$ 。于是, $T(t -$

$$\begin{aligned}
 a) \quad u(a) &= \int_{-\infty}^a T(t-s)f(s)ds, \text{ 取 } a=0, \text{ 得} \\
 T(t)u(0) &= \int_{-\infty}^0 T(t-s)f(s)ds, \text{ 所以当 } t \geq 0 \text{ 时,} \\
 e^{-\beta t}u(t) &= e^{-\beta t}T(t)u(0) + e^{-\beta t} \int_0^t T(t-s)f(s)ds = \\
 e^{-\beta t}T(t)u(0) &+ e^{-\beta t} \left(\int_{-\infty}^t T(t-s)f(s)ds - \right. \\
 \left. \int_{-\infty}^0 T(t-s)f(s)ds \right) &= e^{-\beta t}T(t)u(0) + \\
 e^{-\beta t}(\Psi x)(t) - e^{-\beta t}T(t)u(0) &= e^{-\beta t}(\Psi x)(t)
 \end{aligned}$$

因此有 $e^{-\beta t}u(t) \in PAA(R^+, X)$, 即 $e^{-\beta t}u(t)$ 是伪概自守的, 由此得

$$\begin{aligned}
 u(t) &= e^{\beta t}e^{-\beta t}u(t) = T(t)u(0) + \int_0^t T(t-s)f(s)ds \\
 &\in PE_{\beta}(R^+, X)
 \end{aligned}$$

下面证明此类解是唯一的。设 $u(t), v(t)$ 都是方程(1)的满足条件的解, 令 $w(t) = u(t) - v(t)$ 。则 $w(t)$ 满足齐次方程:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), t \in R^+ \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

由于 A 是 C_0 -半群 $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ 的无穷小生成元, 且 $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ ($\omega < 0$), 所以上述方程(3)只有零解, 由此可得 $w(t) = 0$, 即 $u(t) = v(t)$, 这就证明了方程(1)在定理1的条件下在 $PE_{\beta}(R^+, X)$ 中存在唯一的温和解。

参考文献:

- [1] 姚慧丽, 颜荣. 一类差分方程的渐近概周期序列解的存在性[J]. 哈尔滨理工大学学报, 2010, 15(6): 59.
YAO Huili, YAN Rong. Existence of Asymptotic Almost Periodic Sequence Solution of a Difference Equation[J]. Journal of Harbin University of Science and Technology. 2010, 15(6): 59.
- [2] YOSHIHIRO HAMAYA. Bifurcation of Almost Periodic Solutions in Difference Equations[J]. Journal of Difference Equations and Applications, 2004, 10(3): 257.
- [3] 许广涛, 姚慧丽. 一类时滞积分方程的渐近概周期解的存在性[J]. 哈尔滨理工大学学报, 2008, 13(1): 106.
XU Guangtao, YAO Huil. Existence of Asymptotically Almost Periodic Solution in a Certain Delay Integral Equation[J]. Journal of Harbin University of Science and Technology. 2008, 13(1): 106.
- [4] DIAGANA T. Weighted Pseudo Almost Periodic Solutions to Some Differential Equations[J]. Nonlinear Anal. Theory Methods Appl, 2008, 68: 2250.
- [5] 庄荣坤, 吴洪武, 张留伟. 一类三阶逐段常变量微分方程渐近概周期解[J]. 高校应用数学学报, 2012, 27(2): 157.
ZHUANG Rongkun, WU Hongwu, ZAHNG Liuwei. Asymptotic Almost Periodic Solutions of Third-order Neutral Differential Equations with Piecewise Constant Argument[J]. Applied Mathematics

- A Journal of Chinese Universities. 2012, 27(2): 157.
- [6] BOCHNER S. A New Approach to Almost-periodicity[J]. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1962, 48: 2039.
- [7] N' GUEREKATA G M. Almost Automorphic Functions and Almost Periodic Functions in Abstract Spaces[M]. Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York-Bedim-Moscow, 2001.
- [8] DIAGANA T, N' GUEREKATA G M. Almost Automorphic Solutions to Some Classes of Partial Evolution Equations[J]. Appl. Math. Lett., 2007, 20(4): 462.
- [9] LIANG Jin, ZHANG Jun and XIAO TiJun. Composition of Pseudo Almost Automorphic and Asymptotically Almost Automorphic Functions[J]. Math. Anal. Appl. 2008, 340(2): 1493.
- [10] SONG Xiaoqiu. Almost Automorphic and Pseudo Almost Automorphic Solutions of Semilinear Differential Equations[J]. Acta Analysis Functionalis Applicata, 2009, 11(4): 52.
- [11] GISELE M M, GASTON M N. Almost Automorphic Solutions of Neutral Functional Differential Equations[J]. Electronic Journal of Differential Equation, 2010(69): 1.
- [12] 张蕊, 常永奎, N' GUEREKATA G M. 非自治中立型无穷时滞泛函微分方程的加权伪概自守解[J]. 中国科学: 数学, 2013, 43(3): 273.
ZHANG Rui, CHANG Yongkui, N' GUEREKATA G M. Weighted Pseudo Almost Automorphic Solutions for Non-Autonomous Neutral Functional Differential Equations with Infinite Delay[J]. Scientia Sinica(Mathematica). 2013, 43(3): 273.
- [13] 刘敬怀, 宋晓秋, 陆凤玲. 半线性微分方程的概自守与伪概自守解[J]. 应用泛函分析学报, 2009, 11(4): 294.
LIU Jinghuai, SONG Xiaoqiu, LIU Fengling. Almost Automorphic and Pseudo Almost Automorphic Solutions of Semilinear Differential Equations[J]. Acta Analysis Functionalis Applicata. 2009, 11(4): 294.
- [14] 肖体俊, 梁进, 张俊. 伪概自守函数及在发展方程中的应用[J]. 中国科学技术大学学报, 2009(45): 64.
XIAO Tijun, LIANG Jin, ZHANG Jun. Pseudo Almost Automorphic Functions and Applications to Evolution Equations[J]. Journal of University of Science and Technology of China. 2009, 45: 64.
- [15] 张荣娟, 褚衍彪, 宋晓秋. 抽象微分方程的加权伪概自守解[J]. 枣庄学院学报, 2010(34): 45.
ZHANG Rongjuan, CHU Yanbiao, SONG Xiaoqiu. Weighted Pseudo Almost Automorphic Solutions of Abstract Integral Equation[J]. Journal of Zaozhuang University, 2010, 34: 45.
- [16] DIOP M A, EZZINBI K, MBAYE M M. Existence and Global Attractiveness of a Square-mean μ -pseudo Almost Automorphic Solution for Some Stochastic Evolution Equation Driven by Lévy Noise[J]. Mathematische Nachrichten, 2016, 290(8/9): 1260.
- [17] GU Y, REN Y, SAKTHIVEL R. Square-mean Pseudo Almost Automorphic Mild Solutions for Stochastic Evolution Equations Driven by G-Brownian Motion[J]. Stochastic Analysis & Applications, 2016, 34(3): 528.
- [18] XI LIANG, YU LIANG, BAIFENG. Square-mean Almost Automorphic Solutions to Some Stochastic Evolution Equations I: Autonomous Case[J]. Acta Mathematica Applicatae Sinica, English Series, 2015, 31(3): 577.

(编辑: 温泽宇)