

新型紧致 WENO5 格式

孙 阳¹, 李兴华¹, 艾晓辉²

(1. 哈尔滨理工大学 理学院, 哈尔滨 150080;

2. 东北林业大学 理学院, 哈尔滨 150040)

摘 要: 随着科学研究的不断深入, 目前已有的计算格式仍未能满足人们对流体力学数值模拟研究的高精度、高分辨率、高效率及较强稳定性的要求。针对紧致型 WENO 格式的计算精度、计算效率及稳定性等性能进行了考察, 构造了新型的紧致型 WENO 格式。数值实验表明: 新型紧致 WENO 格式在保持原紧致 WENO 格式分辨率的前提下, 计算速度有明显提高, 计算时间显著减少。因此, 研究可以说是对高精度数值方法研究方面的有益补充和探索。

关键词: 高精度; 紧致型 WENO; 守恒律方程; 时间离散; 有限差分法

DOI: 10.15938/j.jhust.2020.01.024

中图分类号: O24 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2020)01-0154-05

A New Compact WENO5 Scheme

SUN Yang¹, LI Xing-hua¹, AI Xiao-hui²

(1. School of Sciences, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China;

2. School of Science, Northeast Forestry University, Harbin 150040, China)

Abstract: With the continuous deepening of scientific research, the current calculation schemes is still unable to meet the requirements of high accuracy, high resolution, high efficiency and high stability for numerical simulation of fluid mechanics. In this paper, we investigated the performance of computational accuracy, computational efficiency and stability of compact WENO scheme, and constructed a new compact WENO scheme. The numerical experiment results show that the new compact WENO scheme can improve the calculation speed obviously and reduce the calculation time significantly on the premise of maintaining the resolution of the original compact WENO scheme. Therefore, this study can be regarded as a useful supplement and exploration for the research of high accuracy numerical methods.

Keywords: high accuracy; compact WENO; conservation laws equations; time discretization; finite difference method

收稿日期: 2018-04-16

基金项目: 黑龙江省教育厅科学技术研究项目(12541159)。

作者简介: 孙 阳(1980—), 男, 博士, 讲师;

艾晓辉(1979—), 女, 博士, 副教授。

通信作者: 李兴华(1972—), 女, 硕士, 副教授, E-mail: lixinghua201092@163.com.

0 引 言

随着计算机技术和计算流体力学的发展,数值模拟以效率高、投资小、周期短等诸多优点,在航空航天、气象等多个自然科学领域中起着相当重要的作用。计算流体力学的数值方法主要有有限差分方法,有限元方法以及有限体积方法等。有限差分法是对方程的微分形式进行离散,它由于形式简单、编程容易实现且计算速度快,被广泛地研究和应用,特别是对于多维问题其优点更加明显,适合求解比较规则的区域上的流动问题,但是它不适合处理复杂的几何外形问题。有限元法首先是在固体力学中发展起来的,而后又移植于流体力学中,它用于流体力学计算的历史比有限差分法要晚,计算工作量比有限差分法要大。但它在处理复杂的几何边界时十分灵活方便,求解步骤规范化,易于编制通用程序。然而,叶轮机械流场中常常会有激波、漩涡以及分离等现象,具有非常强的非线性特征,传统的有限元法遇到了很大的困难。有限体积法(Finite Volume Method, FVM)^[1-3]是通过离散度型方程在控制体上积分,把体积分转换成控制体表面法向通量面积分的一种计算方法,在一阶精度有限体积方法对方程的积分形式进行离散,由于保持了物理量的守恒,并且可以对区域进行任意网格剖分,可根据实际需要加密和疏松网格,适合处理复杂的几何外形问题,近年来已成为模拟复杂流动的重要方法,得到了广泛地应用。目前大多数商业软件和工程软件广泛采用的方法,如 Fluent、NUMECA 以及中国空气动力研究与发展中心研制的亚跨超和高超声速 CFD 软件平台等都是采用有限体积法。

为了能够更加高效地捕捉到间断,并且避免间断附近出现数值振荡,计算流体力学及计算数学等领域一直致力于研究稳定高效的数值计算方法。1983 年, Harten 提出了 TVD(Total Variation Diminishing)概念并构造了具有二阶精度的 TVD 格式, TVD^[6-10]概念被广泛应用到构造无波动激波捕捉格式的构造。TVD 类格式的发展以及计算机硬件技术的进步使得 CFD 技术在二十世纪八十年代中后期以来取得了迅猛的发展,并在航空、航天领域取得了极为广泛的应用,可以说 TVD 类格式的出现奠定了目前计算流体力学在工程应用中的地位。在一般问题中,在流动均匀区域计算精度达到二阶就能够模拟实际的流动,然而随着航空航天技术的发展,

应用问题日趋复杂化,例如高超音速环境使得叶轮机械的气动加热问题严重;另外,在激波与附面层的干扰区,不仅需要高分辨率的捕捉激波位置,准确的计算出物理粘性也很重要;此外,还有湍流、热流以及摩阻等方面的工程问题,这些都使得目前基于 TVD 性质发展的并得到广泛应用的一类二阶精度格式难以满足工程需要。为真实刻画流场内流动细节,人们纷纷要求采用高精度数值离散方法。因为高精度数值方法的耗散误差和色散误差较小,这使得其差分方程与微分方程之间差别减小,从而在同样条件下高阶数值能够分辨出更加精细的流场结构,捕捉到更细微的结构变化。高精度数值方法的的优势还体现在它能够降低对网格数目的要求。因此,发展高精度(三阶以上)计算方法研究已经成为计算流体力学的一个重要发展方向。紧致型 WENO 格式以其高精度和紧致特性成为其中的一个研究方向。

1 高阶迎风紧致型 WENO 格式

紧致型 WENO 格式是一种基于 WENO 格式的不同数值通量加权平均的非线性重构思想的新格式^[11-14]。与 WENO5 构造过程类似,在最大模板 $S = \{x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, x_{j+2}\}$ 上构造包含 3 个数值通量的 5 阶紧致重构公式

$$\frac{3}{10}\hat{f}_{j-1/2} + \frac{3}{5}\hat{f}_{j+1/2} + \frac{1}{10}\hat{f}_{j+3/2} =$$

$$\frac{1}{30}f_{j-1} + \frac{19}{30}f_j + \frac{1}{3}f_{j+1}$$

特别地,由上式易得到

$$\hat{f}_{j+1/2} = s_{j+1/2} - \frac{1}{600} \frac{\partial^5 f}{\partial x^5} \bigg|_{x=x_j} \Delta x^5 + O(\Delta x^6)$$

通过比较两个误差公式,虽然均为重构 5 阶通量重构,但紧致格式的误差较小。利用紧致格式重构数值通量,能获得较高分辨率和计算精度。

紧致格式一般为隐式的,使用时需求解方程组。尽管常用的紧致格式对应的方程组一般为三对角方程组,而这类方程组有比较快速有效的求解算法,但是相比显式格式,其时间上的效率还是略差。由于上述格式包含三个数值通量,因此需要一个三对角方程组的解。为提高计算效率,我们如下考虑二对角 5 阶紧致数值通量重构公式

$$\frac{2}{5}\hat{f}_{j-1/2} + \frac{3}{5}\hat{f}_{j+1/2} =$$

$$\frac{3}{60}f_{j-1} + \frac{47}{60}f_j + \frac{11}{60}f_{j+1} - \frac{1}{60}f_{j+2}$$

$$\hat{f}_{j+1/2} = s_{j+1/2} - \frac{1}{300} \frac{\partial^5 f}{\partial x^5} \Big|_{x=x_j} \Delta x^5 + O(\Delta x^6)$$

类似于五阶 WENO 格式,三阶非紧致格式可用于构建的五阶紧致格式。然而,我们考虑非紧致格式与紧致格式混合的方式,对于子模板可以有如下选择方案:

子模板 $S_0 = \{x_{j-1}, x_j\}$ 上构造 3 阶紧致格式

$$\frac{2}{3}\hat{f}_{j-1/2} + \frac{1}{3}\hat{f}_{j+1/2} = \frac{1}{6}f_{j-1} + \frac{5}{6}f_j$$

子模板 $S_1 = \{x_j, x_{j+1}\}$ 上构造 3 阶紧致格式

$$\frac{1}{3}\hat{f}_{j-1/2} + \frac{2}{3}\hat{f}_{j+1/2} = \frac{5}{6}f_j + \frac{1}{6}f_{j+1}$$

子模板 $S_2 = \{x_j, x_{j+1}, x_{j+2}\}$ 上构造 3 阶显式格式

$$\hat{f}_{j+1/2} = \frac{1}{3}f_j + \frac{5}{6}f_{j+1} - \frac{1}{6}f_{j+2}$$

由上述 3 个子模板的线性组合可得到 5 阶紧致格式,因此可得到理想权重为 $\gamma_0 = \frac{3}{10}, \gamma_1 = \frac{6}{10}, \gamma_2 = \frac{1}{10}$ 。

利用与 WENO 相同的光滑度量因子可得到非线性权重为

$$\omega_k = \frac{\alpha_k}{\sum \alpha_k}, k=0,1,2$$

而 $\alpha_k = \frac{\gamma_k}{(\beta_k + \varepsilon)^2}, k=0,1,2$

利用理想权重系数 γ_0, γ_1 和 γ_2 ,加权总和的五阶紧致格式。最后对上述子模板上的数值通量重构公式进行加权平均得到紧致型 WENO5 的数值通量重构公式为

$$(\frac{2}{3}\omega_1 + \frac{1}{3}\omega_2)\hat{f}_{j-1/2} + (\frac{1}{3}\omega_1 + \frac{2}{3}\omega_2 + \omega_3)\hat{f}_{j+1/2} =$$

$$\frac{\omega_1}{6}f_{j-1} + \frac{1}{6}(5\omega_1 + 5\omega_2 + 2\omega_3)f_j + \frac{1}{6}(\omega_2 + 5\omega_3)f_{j+1} -$$

$$\frac{\omega_3}{6}f_{j+2}$$

将改进的紧致型 WENO5 格式推广到双曲守恒型方程组

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0$$

这里向量 $U = (\rho, \rho u, E)^T$ 为守恒变量, $F(U) = (\rho u, \rho u^2 + p, u(E + p))^T$ 为通量向量。

1) 使用数值通量 Lax-Fridrichs 分裂。先将通量分为正负通量 $F = F^+ + F^-$ 。

2) 在每一个固定点 $x_{j+1/2}$,利用 j 点与 $j+1$ 点的算术平均或 Roe 平均计算平均状态量 $U_{j+1/2}$ 。

3) 计算相应的特征值 $x_{j+1/2}$ 、左特征向量和右特征向量。

4) 原守恒通量映射到特征空间中进行局部特征分解,可得到如下基于特征变量的紧致型 WENO 重构公式。

$$w = l_{j+1/2}^{(k)} F^+$$

对于正通量而言,可以得到如下紧致型 WENO5 通量重构公式(方便起见省略上角标的正负标号):

$$a_{j+1/2} l_{j+1/2}^{(k)} F_{j-1/2} + b_{j+1/2} l_{j+1/2}^{(k)} F_{j+1/2} = \\ c_{j+1/2} l_{j+1/2}^{(k)} F_{j-1} + d_{j+1/2} l_{j+1/2}^{(k)} F_j + e_{j+1/2} l_{j+1/2}^{(k)} F_{j+1} + \\ f_{j+1/2} l_{j+1/2}^{(k)} F_{j+2}$$

其中上述系数与公式各系数相对应,利用 $w = l_{j+1/2}^{(k)} F^+$ 计算非线性权重。于是可得到块二对角的紧致型 WENO 公式^[7-22],特别地在边界处利用 WENO 显式重构计算

因此可得到迭代公式为

$$\hat{f}_{j+1/2} = B_j^{-1} (\hat{f}_{j+1/2}^{CWENO5} - A_j \hat{f}_{j-1/2}) \quad j=1, \dots, n-1$$

可得到正通量 $\hat{f}_{j+1/2}^+ w = l_{j+1/2}^{(k)} F^+$:

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ A_1 & B_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & A_{n-1} & B_{n-1} & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{f}_{1/2} \\ \hat{f}_{3/2} \\ \vdots \\ \hat{f}_{n-1/2} \\ \hat{f}_{n+1/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{f}_{1/2}^{CWENO5} \\ \hat{f}_{3/2}^{CWENO5} \\ \vdots \\ \hat{f}_{n-1/2}^{CWENO5} \\ \hat{f}_{n+1/2}^{CWENO5} \end{bmatrix}$$

而由对称性知,在模板 $\{I_{j-1}, I_j, I_{j+1}, I_{j+2}\}$ 上关于边界点 $x_{j+1/2}$ 得到 $\hat{f}_{j+1/2}^-$ 计算公式。类似地可得到负通量的迭代公式

$$\hat{f}_{j+1/2} = B_j^{-1} (\hat{f}_{j+1/2}^{CWENO5} - A_j \hat{f}_{j+3/2}) \quad j=n-1, \dots, 1$$

2 数值算例

2.1 一维线性对流方程

在计算区域 $[-1, 1]$ 上求解如下一维线性对流方程:

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0 \\ u(x, 0) = \sin(\pi x) \end{cases}$$

周期边界条件; 计算时间为 $t=1$, CFL 数为 0.1, L_1 定义为:

$$L_1 = \Delta x \cdot \sum_{i=1}^n |u(x_j, t^n) - u_j^n|$$

表 1 给出 L_1 误差和计算精度。可以看出, WENO5 格式、原三对角紧致型 WENO 格式和改进的二对角紧致型 WENO5 格式实际精度实际精度小于 5 阶理论精度,最为接近的原紧致型 WENO 格式,但改进的格式与其相差不大,均高于 WENO5 格式。

表 1 $u(x,0) = \sin(\pi x)$ 的 L_1 误差和精度
Tab. 1 L_1 error and accuracy for $u(x,0) = \sin(\pi x)$

Methods	N	L_1 error	L_1 error
WENO5-RK3	10	0.0415	—
	20	4.34×10^{-3}	3.52
	40	4.87×10^{-4}	4.10
	80	8.41×10^{-6}	4.19
	160	3.87×10^{-7}	4.75
Compact WENO5-RK3	10	0.0396	—
	20	3.41×10^{-3}	3.99
	40	2.13×10^{-4}	4.19
	80	8.16×10^{-6}	4.52
	160	3.73×10^{-7}	4.82
New compact WENO5-RW3	10	0.0377	—
	20	3.11×10^{-3}	3.93
	40	2.13×10^{-4}	4.18
	80	7.04×10^{-6}	4.48
	160	3.33×10^{-7}	4.81

2.2 Shu-Osher 问题

Shu-Osher 问题即运动激波与密度波干扰问题。此问题描述的是马赫数为 3 的运动激波和空间呈现正弦扰动形式的密度波的相互干扰。此模型主要用来测试格式分辨率,包括对激波和小尺度波的分辨率。控制方程是一维守恒律的 Euler 方程组,初始条件为

$$\begin{cases} \rho = 3.857143, u = 2.629369, p = 10.333333x < 1 \\ \rho = 1 + 0.2\sin(5x), u = 0, p = 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

计算区域为 $x \in [0, 10]$, 网格数为 200 的均匀网格; 计算时间为 $t = 1.8$ 。

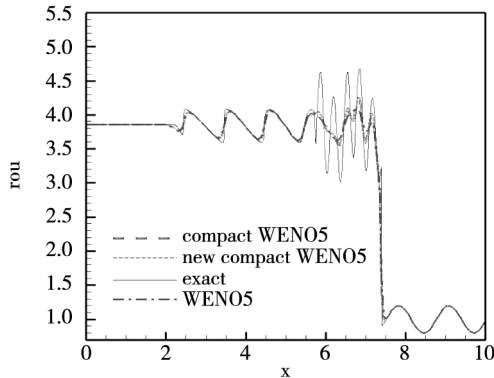


图 1 密度全局图

Fig. 1 Density global figure

图 1 和 2 分别为由 WENO5 格式、原紧致型 WENO5 格式、本文的紧致型 WENO5 格式以及 WENO5 格式利用 2000 个计算点计算得到的密度全局图和局部图。由图 1 和图 2 不难看出本文的紧致型

WENO5 较原紧致型 WENO5 格式具有更优的分辨率,可以准确捕捉间断和正弦扰动。

2.3 激波反射问题

激波反射问题的控制方程为二维 Euler 方程。该问题主要考虑一入射角为 29° 、马赫数为 2.9 的斜激波入射在平板上并反射的物理过程。计算区域为 $[0, 4] \times [0, 1]$, 初始条件取超音速自由流流入左边界的值,底部为反射边界条件,右端为超音速出流边界条件。左边界和顶边界采用 Dirichlet 条件 $(\rho, u, v, p)_{(0,y,t)} = (1, 2.9, 0, 1.4)$ $(\rho, u, v, p)_{(x,1,t)} = (2.379953, 2.61934, -0.50632, 2.139471)$

为更加清楚展示各种格式的计算精度,取少量网格点即可达到格式验证的目的。本节取 400×100 个计算点,当迭代误差小于 10^{-6} 认为达到定常解,图 3 为本文构造的紧致 WENO5 格式的密度计算结果。

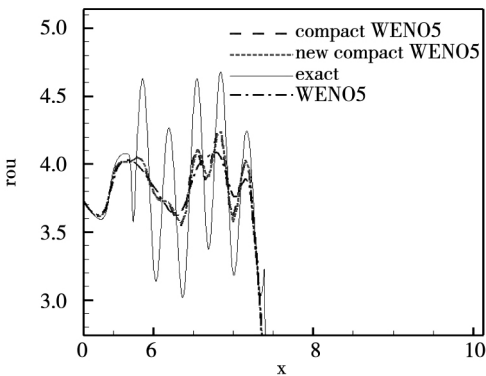


图 2 密度局部图

Fig. 2 Density local figure

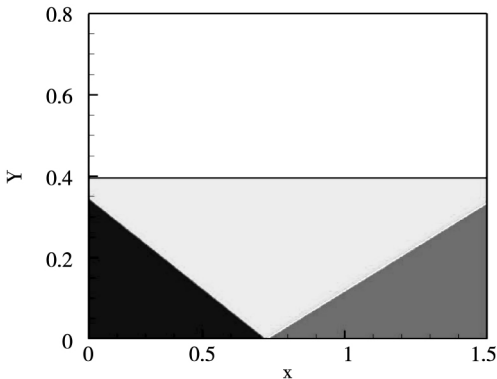


图 3 本文的紧致 WENO5 格式的密度计算结果

Fig. 3 Density calculation results of present compact WENO5 scheme

很明显,本文的紧致型 WENO 格式具有较强的捕捉间断能力,但就计算时间而言,原紧致型 WENO 格式计算时间要高出本文格式很多,这在全三维计算中将会遇到很大困难。

表 2 为针对激波反射问题, WENO5 格式、原紧致型 WENO5 格式及本文的紧致型 WENO5 三种格式的计算时间。对于计算时间而言, 在二维计算中, 本文的格式的收敛性受到了一定的影响, 但计算的总时间也仅仅增加了不到 15%, 大大低于紧致 WENO5 格式的计算时间。

表 2 计算时间的对比
Tab. 2 Comparison of calculation times

Schemes	WENO5	Compact	New
Times/s	2 106.65	2 406.85	2 031.21

4 结 论

本论文主要研究流体力学的高精度高分辨率差分格式。对于两类高精度高分辨率差分格式 WENO 格式和紧致型 WENO 格式予以了分析讨论。通过对不同数值格式的考察和分析, 从非线性谱分析出发, 构造了二对角的紧致型 WENO 格式。针对原有的三对角紧致型 WENO 格式进行了研究和改进。紧致格式具有基架点少、分辨率高的优点, 而 WENO 格式具有较强的数值稳定性, 将二者优点结合的紧致型 WENO 格式可以说是较为优秀的新型高精度计算格式。但由于三对角的紧致型 WENO 格式需要求解三对角方程组, 且存在大量矩阵的逆运算, 势必会影响计算速度, 因此本章构造基于两个通量重构、四个基架点的计算公式的二对角紧致型 WENO 格式。这样避免了矩阵求逆过程, 提高了计算效率, 计算速度仅高出 WENO5 的 15%。改进的格式较原格式计算时间大大降。

下一步作者将试着将推广到高维守恒律方程方程组问题以及叶轮机械数值模拟平台当中, 现公式推到已经完成, 正在进行数值实验, 以得到较优结果。

参 考 文 献:

- [1] 陆金甫. 偏微分方程数值解法 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
- [2] 袁光伟, 杭旭登, 盛志强, 岳晶岩. 辐射扩散计算方法若干研究进展 [J]. 计算物理, 2009, 26 (4): 475.
- [3] 欧阳颀. 非线性科学与斑图动力学导论 [M]. 北京: 北京大学出版社, 2010.
- [4] 刘儒勋, 舒其望. 计算流体力学的若干新方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2003.
- [5] 姚慧丽, 宋晓秋, 李兴华. 一类半线性微分方程的渐进概自守温和解 [J]. 哈尔滨理工大学学报, 2012, 17 (1): 72.
YAO Huili, SONG Xiaoqiu, LI Xinghua. Asymptotically Almost Automorphic Mild Solutions to a Class of Semilinear Differential Equations [J]. Journal of Harbin University of Science and Technology, 2012, 17 (1): 72.
- [6] 姚慧丽, 卜宪江, 宋晓秋. 一类微分方程的指数增长的温和渐进概自守解 [J]. 哈尔滨理工大学学报, 2014, 19 (5): 23.
YAO Huili, BU Xianjiang, SONG Xiaoqiu. Exponentiauy Mild Asymptotically Almost Automorphic Solutions for a Class of Differential Equation [J]. Journal of Harbin University of Science and Technology, 2014, 19 (5): 23.
- [7] WARMING R F. Flux Vector Splitting of the Inviscid Gas-Dynamic Equation with Application of Finite Difference Method [J]. Journal of Computational, 1981, 40: 263.
- [8] GODONOV S K. A Difference Schemes for Numerical Computation of Discontinuous Solution of Hydrodynamics Equations [J]. Math. Sbornik, 1959, 47: 271.
- [9] ENGQUIST, OSHER S. Stable and Entropy Satisfying Approximation for Transonic Flow Calculation [J]. Mathematics of Computation, 1980, 34: 45.
- [10] COCKBURN B, LIN S Y, SHU C W. TVB Runge-Kutta Local Projection Discontinuous Galerkin Finite Element Method for Conservation Laws III: One-Dimensional Systems [J]. J. Comput. Phys., 1989, 84: 90.
- [11] COCKBURN B, HOU S, SHU C W. TVB Runge-Kutta Local Projection Discontinuous Galerkin Finite Element Method for Conservation Laws IV [J]. Math. Comput., 1990, 54: 545.
- [12] LIU H, XU H, GONG H. Modeling the Asymmetry in Traffic Flow (b): Macroscopic Approach [J]. Appl. Math. Model, 2013, 37 (22): 9441.
- [13] ZHU J, QIU J X. A New Fifth Order Finite Difference WENO Scheme for Solving Hyperbolic Conservation Laws [J]. J. Comput. Phys., 2016, 318: 110.
- [14] LIU X, ZHANG S, ZHANG H, SHU C W. A New Class of Central Compact Schemes with Spectral-like Resolution II: Hybrid Weighted Nonlinear Schemes [J]. J. Comput. Phys., 2015, 284: 133.
- [15] PIROZZOLI S. Conservative Hybrid Compact-WENO Schemes for Shock-Turbulence Interaction [J]. J. Comput. Phys., 2002, 178 (1): 81.
- [16] QIU J X, DUMBSER M, SHU C W. The Discontinuous Galerkin Method with Lax-Wendroff type Time Discretizations [J]. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 2005, 194: 4528.
- [17] LAX P D. Hyperbolic System of Conservation Laws II [J]. Comm. Pure and Applied Mathematics. 1957, 10: 537.
- [18] ZHANG X, SHU C W. On Maximum-Principle-Satisfying High Order Schemes for Scalar Conservation Laws [J]. J. Comput. Phys., 2010, 229 (9): 3091.
- [19] ZHANG X, SHU C W. Maximum-Principle-Satisfying and Positivity-Preserving High-Order Schemes for Conservation Laws: Survey and New Developments Proc. R. Soc. A [J]. Math. Phys. Eng. Sci., 2011, 467 (2): 2752.
- [20] LIU Y J, SHU C W, TADMOR E, Zhang M P. Central Discontinuous Galerkin Methods on Overlapping Cells with A Non-Oscillatory Hierarchical Reconstruction [J]. SIAM J. Numer. Anal., 2007, 45: 2442.
- [21] WANG, D., ZHANG, L., NIE, Q. Array-representation Integration Factor Method for High-dimensional Systems [J]. J. Comput. Phys., 2014, 258: 585.
- [22] WANG, D., CHEN, W., NIE, Q. Semi-implicit Integration Factor Methods on Sparse Grids for High Dimensional Systems [J]. J. Comput. Phys., 2015, 292: 43.

(编辑: 王 萍)