

一类单调基因参数可调三角模

乌伦华, 赵辉, 王月
(哈尔滨理工大学 理学院, 哈尔滨 150080)

摘要:为了研究优化 Zadeh 算子, 给出一类单调基因参数可调三角模的定义。先定义了一种由单调函数经初等运算生成的广义 T 三角模 F_λ , 再利用对偶性, 定义广义 S 三角模 G_λ , 统一了部分作者提出的优化 Zadeh 算子; 应用该定义生成一对新的三角模, 验证该定义用于构造模糊算子的可行性, 为三角模的构造提供了新方向; 研究部分算子随参数 λ 调整的变化情况, 以及和 Zadeh 算子的关系。 F_λ 和 G_λ 能够使模糊集的交并运算更加合理, 提高了数据的利用率, 避免信息丢失。在三角模 G_λ 的基础上给出了 $g-\lambda$ 测度的定义及其定理, 由此丰富了模糊测度的理论。

关键词: T 三角模; S 三角模; Zadeh 算子; 模糊测度

DOI: 10.15938/j.jhust.2023.01.018

中图分类号: O159 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2023)01-0146-08

A Parameter-tunable Triangular Norm with Monotonic Genes

WU Lunhua, ZHAO Hui, WANG Yue

(College of Science, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: In order to study the optimization of Zadeh operator, a definition of parameter-tunable triangular norm with monotonic genes is given. First, we defined a kind of triangular norm F_λ in the general sense generated by monotone functions using elementary operations, and then a definition of triangular conorm G_λ in the general sense is given by using duality. This type of definition unifies the optimal Zadeh operator proposed by some authors. Next, this definition is applied to generate a new pair of triangular norms. It is proved that the triangular norm and triangular conorm conditions are satisfied to verify the feasibility of the definition for constructing fuzzy operators, which gives new direction in the construction of triangular norms. Finally, we studied the variation of some operators parameter tuning and the relationship with the Zadeh operator. F_λ and G_λ make the intersection and merging of fuzzy sets more reasonable, and the data usage more efficient to avoid information loss. On the basis of triangular conorm G_λ , the definition and theorem of $g-\lambda$ measure are given, which enriches the theory of fuzzy measure.

Keywords: triangular norm; triangular conorm; Zadeh operator; fuzzy measure

0 引言

1942 年法国学者 Menger^[1]推广经典的三角不等式时引入了三角模的概念, t -模 (triangular norm)

和 t -余模 (triangular conorm) 统称为三角模, 分别是 $[0, 1]$ 区间上满足交换律、结合律、单调性、边界条件的二元映射, t -余模也称 s -模; 1965 年, Zadeh^[2]发表了题为“Fuzzy sets”的开创性论文, 建立了模糊集理论这一全新的研究领域, 首先提出用 $\min$ 和 $\max$

收稿日期: 2021-09-30

基金项目: 四川省科技计划项目 (2016JZ0014-1); 黑龙江省自然科学基金 (A201214).

作者简介: 乌伦华 (1998—), 女, 硕士研究生;

王月 (1997—), 女, 硕士研究生.

通信作者: 赵辉 (1963—), 男, 教授, 硕士研究生导师, E-mail: mathwindow@163.com.

作为模糊集的交通算和并运算,作为基本的模糊算子,用来聚合模糊集的隶属函数信息;Zadeh 后多次指出,模糊算子的选择应针对具体问题而定^[3];1965 年,Ling^[4]给出了 Archimedes t -模的表示定理,提供了设计大量 Archimedes t -模的方法;1974 年,日本学者 Sugeno^[5]首次提出一般形式的模糊测度,用比较弱的单调性和连续性来替代可加性,从而定义了模糊测度;1980 年,Yager^[6]提出了一类广义模糊集算子,改进了模糊集合的交并运算;上世纪八十年代后,大家普遍将连续的 t -模和 s -模作为模糊集的交通并运算的一般形式;1992 年,李中夫教授^[7]提出一种方法,能够在实际问题中应用模糊集理论选取交、并算子,并且便于在接收新信息时,对原有的算子进行修正;1999 年,Eskil 等^[8]根据具有含参三角模算子的模糊推断系统,及其在机械臂控制中的性能,给出了一种根据经验数据来选取三角模算子的方法;2002 年,李仁杰等^[9]分析比较了采用不同模糊算子的模糊推理方法,进一步研究其推理结果差异和计算机控制仿真效果;2003 年,张世强^[10]给出了一类连续模糊算子,从应用的观点出发,分析了常用的三角模与连续模糊算子之间的关系;2004 年,Deschrijver 等^[11]扩展了三角模的概念,使之符合直觉模糊集理论,以及 Archimedes 性质和幂零的概念;同年,Murofushi T 等^[12]给出了非可加测度理论中 Egoroff 定理的必要条件和充分条件;2009 年,陈成等^[13]提出了自适应阈值的图像模糊边缘检测算法,算法结果与 canny 算子,Pal-King 算子所做的边缘检测结果相比有较好的效果;2011,J Casasnovas 和 JV Riera^[14]通过扩展离散集合上的三角模,在离散模糊数上定义了几种二元运算;同年,许雪燕^[15]对模糊综合评价过程进行了三方面改进,在模糊算子方面,考虑幂算子、非线性算子;2015 年,刘琳^[16]研究了模糊测度 g_λ 的无穷级数敛散性;2016 年,张倩等^[17]使用模糊综合评判方法评价校园环境等级,分析比较了常见的 7 种模糊算子;2017 年,Peng 等^[18]提出了犹豫直觉模糊加权平均算子,和基于 Archimedes t -模和 s -模的犹豫直觉模糊加权平均算子来聚合决策信息,提高了直觉模糊信息的决策效率;2018 年,刘红彬等^[19]提出了三角模糊数幂平均算子和三角模糊数幂有序加权平均算子,并研究了它们在群决策中的应用;2020 年,Kalina^[20]明确地给出了根据一个单调递增且具有交换律和结合律的算子来构造新 s -模的 4 个公式;同年,赵辉^[21]给出一种较理想的模糊拟和算子形式,并基于模糊概率空间给出了 Sugeno 拟和

概率积分的定义、定理,验证了若干定理,证明其可行性;

本文主要给出一类参数可调的三角模的定义,定义了一种由单调函数经初等运算生成的广义 T 三角模 F_λ ,再利用对偶性,给出广义 S 三角模 G_λ 的定义,统一了部分作者提出的优化 Zadeh 算子;接下来应用该定义生成一对新的三角模,证明其满足 t -模与 s -模条件,验证该定义用于构造模糊算子的可行性,并证明该三角模具有的一些性质;随后研究部分算子随单调函数和参数 λ 调整的变化情况,通过仿真结果与 Zadeh 算子进行比较,尝试在不丢失信息的情况下用 F_λ 和 G_λ 拟合 Zadeh 算子,使得模糊集的交通并运算更加合理,提高数据的利用率,避免信息丢失。在 G_λ 三角模的基础上给出了 g - λ 测度的定义及其定理,由此丰富了模糊测度的理论。

1 预备知识

定义 1^[22] 映射 $T: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$,若 $\forall a,b,c \in [0,1]$,满足如下条件:

- 1) 交换律: $T(a,b) = T(b,a)$;
- 2) 结合律: $T(a,T(b,c)) = T(T(a,b),c)$;
- 3) 单调性: 若 $a_1 \leq a_2, b_1 \leq b_2$,则有 $T(a_1,b_1) \leq T(a_2,b_2)$;
- 4) 边界条件 $T(1,a) = a$ 。

则称 T 为 T 三角模,或称 T 范数。

定义 2^[22] 映射 $S: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$,若 $\forall a,b,c \in [0,1]$,满足如下条件:

- 1) 交换律: $S(a,b) = S(b,a)$;
- 2) 结合律: $S(a,S(b,c)) = S(S(a,b),c)$;
- 3) 单调性: 若 $a_1 \leq a_2, b_1 \leq b_2$,则有 $S(a_1,b_1) \leq S(a_2,b_2)$;
- 4) 边界条件: $S(0,a) = a$ 。

则称 S 为 S 三角模,或称 S 范数。

利用结合律可以把三角模从二元函数推广到 n 元函数:

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n) = T(x_1, T(x_2, T(\dots, T(x_{n-1}, x_n))));$$

$$S(x_1, x_2, \dots, x_n) = S(x_1, S(x_2, S(\dots, S(x_{n-1}, x_n))))。$$

定义 3^[23] 设 X 为非空集合, $\mathcal{F}$ 为由 X 子集构成的 σ -代数, 集函数 $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty)$ 是 $(X, \mathcal{F})$ 上的一个模糊测度, 当且仅当满足以下条件:

- 1) $\mu(\emptyset) = 0$;
- 2) (单调性)
 $A, B \in \mathcal{F}, A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$;

3)(下连续性)

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots, A_n \in \mathbf{F}, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbf{F}, n=1,$$

$$2, \cdots \Rightarrow \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n);$$

4)(上连续性)

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots, A_n \in \mathbf{F}, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbf{F}, n=1, 2,$$

$$\cdots, \text{且} \exists n_0 \text{ 使得 } \mu(A_{n_0}) < \infty \Rightarrow \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

当满足 1), 2), 3) 时, μ 称为下半连续模糊测度; 当满足 1), 2), 4) 时, μ 称为上半连续模糊测度。

2 主要结果及证明

首先, 给出一类三角模的定义。

定义 4 设映射 $F_\lambda: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, 对 $\forall x, y \in [0, 1], \lambda \in [0, +\infty)$, $F_\lambda(x, y) = f^{-1}(f(x) + f(y) + \lambda f(x)f(y))$, 其中 $f: [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ 为单调递减函数, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, 且满足 $f(1) = 0$, 则称映射 F_λ 为 F_λ 算子。

定理 1 F_λ 算子是 $[0, 1]$ 上的 t -模。

证明: $\forall x, y \in [0, 1]$, 算子 F_λ 须满足 t -模的 4 个条件:

1) 交换律: $F_\lambda(x, y) = F_\lambda(y, x)$ 显然;

2) 结合律:

$$\begin{aligned} & F_\lambda(x, F_\lambda(y, z)) \\ &= F_\lambda(x, f^{-1}(f(y) + f(z) + \lambda f(y)f(z))) \\ &= f^{-1}[f(x) + (f(y) + f(z) + \lambda f(y)f(z)) + \\ & \quad \lambda f(x)(f(y) + f(z) + \lambda f(y)f(z))] \\ &= f^{-1}[f(x) + f(y) + f(z) + \lambda f(x)f(y) + \\ & \quad \lambda f(x)f(z) + \lambda f(y)f(z) + \lambda^2 f(x)f(y)f(z)] \\ &= F_\lambda(F_\lambda(x, y), z); \end{aligned}$$

3) 单调性: 设 $x_1 < x_2, y_1 < y_2$, 由

$$\begin{aligned} & F_\lambda(x, y) = f^{-1}(f(x) + f(y) + \lambda f(x)f(y)) \\ &= f^{-1}\left[\frac{1}{\lambda}[(1 + \lambda f(x))(1 + \lambda f(y)) - 1]\right] \end{aligned}$$

易得 $F_\lambda(x_1, y_1) < F_\lambda(x_2, y_2)$;

4) 边界条件

$$\begin{aligned} & F_\lambda(1, y) = f^{-1}(f(1) + f(y) + \lambda f(1)f(y)) \\ &= f^{-1}(f(y)) = y \end{aligned}$$

因此 $F_\lambda(x, y)$ 满足 t -模条件, 说明由定义 1 可以生成一类 t -模, 可供参考的单调函数 $f(x)$ 有:

$$-\tan\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}\right), \frac{1-x}{x}, \ln \frac{1}{x} \text{ 等}.$$

定义 5 设映射 $G_\lambda: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, 对 $\forall x, y \in [0, 1], \lambda \in [0, +\infty)$, $G_\lambda(x, y) = g^{-1}(g(x) + g(y) + \lambda g(x)g(y))$, 其中 $g: [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ 为单调递增函数, $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = +\infty$, 且满足 $g(0) = 0$, 则称映射 G_λ 为 G_λ 算子。

定理 2 G_λ 算子是 $[0, 1]$ 上的 s -模

证明: $\forall x, y \in [0, 1]$, 算子 $G_\lambda(x, y)$ 须满足 s -模的 4 个条件: 已证当 $f(x)$ 满足单调递减且 $f(1) = 0$ 时, 可由 $f(x)$ 生成 F_λ 算子, F_λ 算子是 $[0, 1]$ 上的 t -模; 令 $g(x) = f(1 - x)$, 则 $g(x)$ 是单调递增函数, 且 $g(0) = f(1) = 0$, 则由定理 1 的证明, 易得定理 2 成立。

定理 3 F_λ 算子和 G_λ 算子互为对偶算子。

证明: 设 $y = g(x) = f(1 - x), y^{-1}(x) = 1 - x$, 则 $x = 1 - f^{-1}(x)$, 又 $x = g^{-1}(x)$, 故 $g^{-1}(x) = 1 - f^{-1}(x)$ 。

$$\begin{aligned} G_\lambda(x, y) &= g^{-1}(g(x) + g(y) + \lambda g(x)g(y)) = \\ &= 1 - f^{-1}(g(x) + g(y) + \lambda g(x)g(y)) = \\ &= 1 - f^{-1}(f(1 - x) + f(1 - y) + \lambda f(1 - x)f(1 - y)) = \\ &= 1 - F_\lambda(1 - x, 1 - y) \end{aligned}$$

定理 4 F_λ 算子和 G_λ 算子满足零-壹律。

$$\begin{aligned} F_\lambda(1, 0) &= F_\lambda(0, 1) = F_\lambda(0, 0) = 0, F_\lambda(1, 1) = 1 \\ G_\lambda(1, 1) &= G_\lambda(0, 1) = G_\lambda(1, 0) = 1, G_\lambda(0, 0) = 0 \end{aligned}$$

证明:

$$\begin{aligned} F_\lambda(1, 0) &= f^{-1}(f(1) + f(0) + \lambda f(1)f(0)) = \\ &= f^{-1}(f(0)) = 0 \\ F_\lambda(1, 1) &= f^{-1}(f(1) + f(1) + \lambda f(1)f(1)) = \\ &= f^{-1}(0) = 1 \end{aligned}$$

故由交换律和单调性, 有 $F_\lambda(1, 0) = F_\lambda(0, 1) = F_\lambda(0, 0) = 0$

$$\begin{aligned} G_\lambda(1, 0) &= g^{-1}(g(1) + g(0) + \lambda g(1)g(0)) = \\ &= g^{-1}(g(1)) = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_\lambda(0, 0) &= g^{-1}(g(0) + g(0) + \lambda g(0)g(0)) = \\ &= g^{-1}(0) = 0 \end{aligned}$$

故由交换律和单调性, 有 $G_\lambda(1, 1) = G_\lambda(0, 1) = G_\lambda(1, 0) = 1$

接下来根据定理 1 和定理 2, 构造一对三角模。

推论 1 由 $f_0(x) = e^{\frac{1}{x}-1} - 1$, 生成的 $F_{0,\lambda}$ 算子, 是 $[0, 1]$ 上的 t -模:

$$\text{设 } F = \ln(\lambda e^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - 2} + (1 - \lambda)(e^{\frac{1}{x}-1} + e^{\frac{1}{y}-1} - 1))$$

$$\text{则 } F_{0,\lambda}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{1+F} & x, y \in (0, 1] \\ 0 & x=0 \text{ 或 } y=0 \end{cases}$$

特别地,当 $\lambda = 1$ 时,对应的 t -模 $F_{0,1}(x, y)$ 被姜欣格^[24]命名为模糊似乘算子,结合构建的可信测度空间重新定义了 Sugeno 模糊概率积分,最终应用于电池性能检测,丰富了模糊概率积分理论。

$$F_{0,1}(x, y) = \frac{1}{1 + \ln(e^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - 2})} = \frac{xy}{x + y - xy}$$

推论 2 由 $g_0(x) = f_0(1 - x) = e^{\frac{x}{1-x}} - 1$, 生成的 $G_{0,\lambda}$ 算子, 是 $[0, 1]$ 上的 s -模。

$$\text{设 } G = \ln(\lambda e^{\frac{x}{1-x} + \frac{y}{1-y}} + (1 - \lambda)(e^{\frac{x}{1-x}} + e^{\frac{y}{1-y}} - 1))$$

$$G_{0,\lambda}(x, y) = \begin{cases} \frac{G}{1 + G} & x, y \in [0, 1) \\ 1 & x = 1 \text{ 或 } y = 1 \end{cases}$$

引理 1 对 $\forall x, y \in [0, 1]$, 有: $F_\lambda(x, y) \leq \min(x, y)$, $G_\lambda(x, y) \geq \max(x, y)$ 。

证明: 由单调性和边界条件, 可得 $F_\lambda(x, y) \leq F_\lambda(x, 1) = x$, $F_\lambda(x, y) \leq F_\lambda(1, y) = y$, $G_\lambda(x, y) \geq G_\lambda(x, 0) = x$, $G_\lambda(x, y) \geq G_\lambda(0, y) = y$

$$\text{故 } F_\lambda(x, y) \leq \min(x, y), G_\lambda(x, y) \geq \max(x, y)$$

定理 5 $F_\lambda(a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}) \leq F_\lambda(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $G_\lambda(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \geq G_\lambda(a_1, \dots, a_n)$ 。

证明: 首先证明 $F_\lambda(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$,

由引理 1, 知 $n = 2$ 时 $F_\lambda(a_1, a_2) \leq \min\{a_1, a_2\}$ 成立; 假设 $n = k$ 时 $F_\lambda(a_1, a_2, \dots, a_k) \leq \min\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ 成立, 又由引理 1, 有

$$F_\lambda(a_1, a_2, \dots, a_{k+1}) = F_\lambda(F_\lambda(a_1, a_2, \dots, a_k), a_{k+1}) \leq \min(F_\lambda(a_1, a_2, \dots, a_k), a_{k+1}) \leq \min\{a_1, a_2, \dots, a_{k+1}\}$$

故由数学归纳法, 可得

$$F_\lambda(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\};$$

$$\text{又由 } F_\lambda(a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}) \leq \min\{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}\}$$

$$\min\{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}\} \leq \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

$$\text{可得 } F_\lambda(a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}) \leq F_\lambda(a_1, a_2, \dots, a_n)。$$

$$\text{同理, 可证 } G_\lambda(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\},$$

$$\text{进一步得到 } G_\lambda(a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}) \geq G_{0,1}(a_1, a_2, \dots, a_n)。$$

$$\text{另外, 可由单调递减函数 } f_1(x) = \ln \frac{1}{x}, f_2(x) =$$

$$\ln\left(\frac{e-1}{e^x-1}\right), f_3(x) = \ln\left(\frac{2-x}{x}\right), f_4(x) = \frac{1-x}{x} \text{ 分别生成}$$

$F_{i,\lambda} (i = 1, 2, 3, 4)$, 当 x 或 $y = 0$, 定义 $F_{i,\lambda} = 0$; 由对偶性, 可得 $G_{i,\lambda} (i = 1, 2, 3, 4)$ 。由于篇幅有限, 略去

$G_{i,\lambda}$ 的表达式及证明 $F_{i,\lambda}$ 和 $G_{i,\lambda} (i = 1, 2, 3, 4)$ 分别是 t -模和 s -模:

$$F_{1,\lambda}(x, y) = xy e^{-\lambda \ln x \ln y},$$

$$F_{2,\lambda}(x, y) = \ln\left(1 + \frac{(e^x - 1)(e^y - 1)}{e - 1} e^{-\lambda \ln \frac{e-1}{e^x-1} \ln \frac{e-1}{e^y-1}}\right),$$

$$F_{3,\lambda}(x, y) = \frac{2}{1 + \frac{(2-x)(2-y)}{xy} e^{\lambda \ln^2 \frac{2-x}{x} \ln^2 \frac{2-y}{y}}},$$

$$F_{4,\lambda}(x, y) = \frac{xy}{(1 - \lambda)(x + y - xy) + \lambda},$$

取 $\lambda = 0$ 时, $F_{1,0}(x, y) = xy$ 为普通实数乘法,

$$F_{2,0}(x, y) = \ln\left(1 + \frac{(e^x - 1)(e^y - 1)}{e - 1}\right) \text{ 为 Frank 算子,}$$

$$F_{3,0}(x, y) = \frac{xy}{1 + (1-x)(1-y)} \text{ 为 Einstein 算子,}$$

$$F_{4,\lambda}(x, y) = \frac{xy}{(1 - \lambda)(x + y - xy) + \lambda} \text{ 为 Hamacher 算子。}$$

由此说明, F_λ 和 G_λ 是一类广义 T 三角模和 S 三角模, 能够统一部分作者给出的优化 Zadeh 算子。

为了能够更清晰直观的分析 λ 对 $F_{0,\lambda}$ 和 $G_{0,\lambda}$ 的作用, 在 Matlab 中编写程序进行仿真, 得到 λ 在不同取值的下 $F_{0,\lambda}$ 和 $G_{0,\lambda}$ 的仿真结果 ($\lambda \geq 0$), 包括正视图、侧视图和等高线, 如图 1 ~ 10 所示。

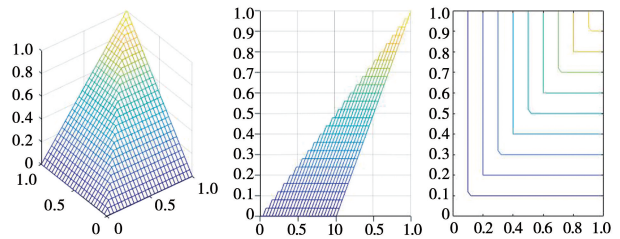


图 1 Zadeh 算子 $\wedge$

Fig. 1 Zadeh Operator

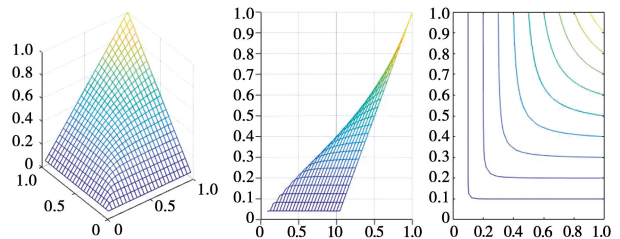
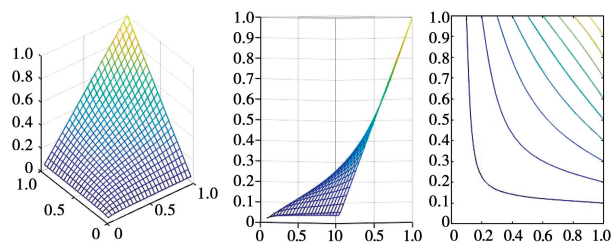
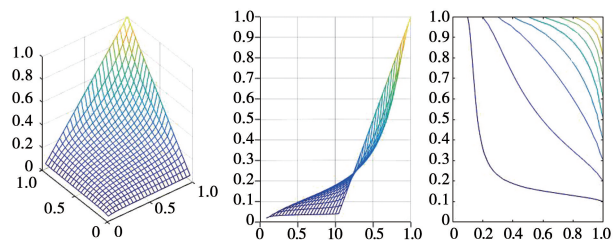
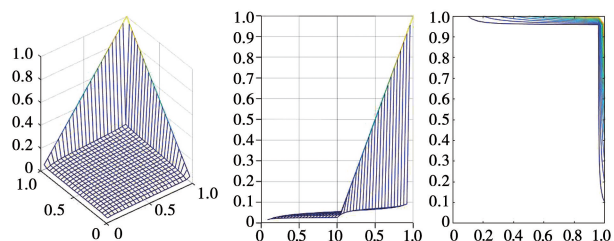
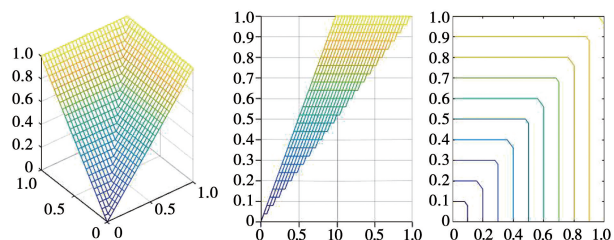
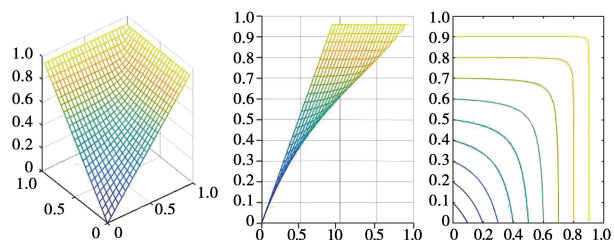
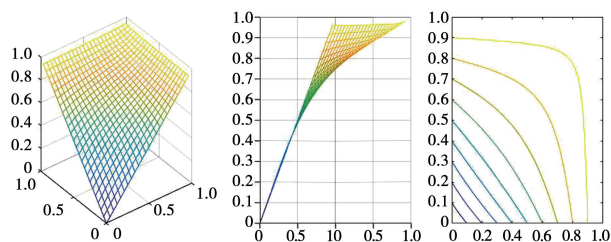
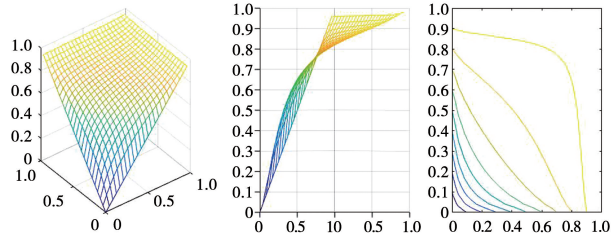
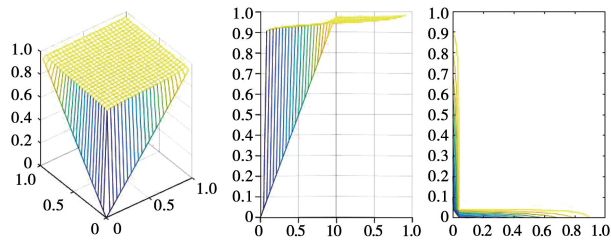


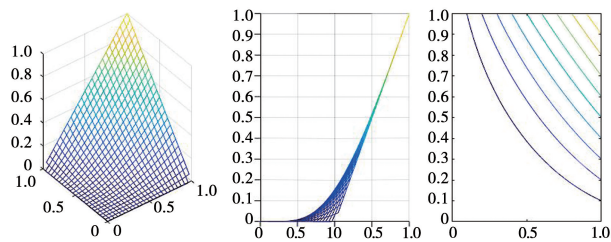
图 2 算子 $F_{0,0}$

Fig. 2 Operator $F_{0,0}$

图3 算子 $F_{0,5}$ Fig. 3 Operator $F_{0,5}$ 图4 算子 $F_{0,30}$ Fig. 4 Operator $F_{0,30}$ 图5 算子 $F_{0,107}$ Fig. 5 Operator $F_{0,107}$ 图6 Zadeh算子 V Fig. 6 Zadeh Operator V 图7 算子 $G_{0,0}$ Fig. 7 Operator $G_{0,0}$ 图8 算子 $G_{0,5}$ Fig. 8 Operator $G_{0,5}$ 图9 算子 $G_{0,30}$ Fig. 9 Operator $G_{0,30}$ 图10 算子 $G_{0,107}$ Fig. 10 Operator $G_{0,107}$

从仿真结果可以看出, $F_{0,\lambda}$ 和 $G_{0,\lambda}$ 算子在不丢失信息的情况下, 取 $\lambda=0$ 可接近 Zadeh 算子, 模拟 Zadeh 算子完成对数据的处理, 同时提高了数据的利用率, 避免丢失信息。随着 λ 增大, $F_{0,\lambda}$ 算子的等高线分布向右上方迁移, $G_{0,\lambda}$ 算子的等高线分布向左下方迁移。

对于 $F_{i,\lambda}$ ($i=1,2,3,4$), 仿真结果如图 11 ~ 15 所示:

图11 算子 $F_{1,1}$ Fig. 11 Operator $F_{1,1}$

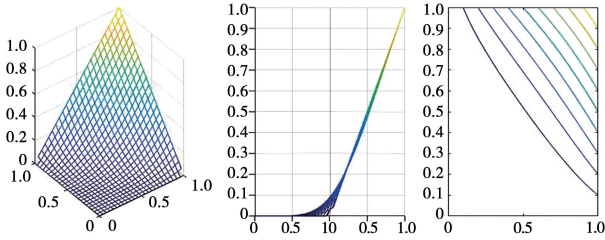


图 12 算子 $F_{2,1}$

Fig. 12 Operator $F_{2,1}$

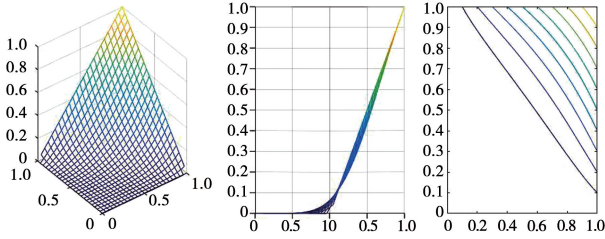


图 13 算子 $F_{3,1}$

Fig. 13 Operator $F_{3,1}$

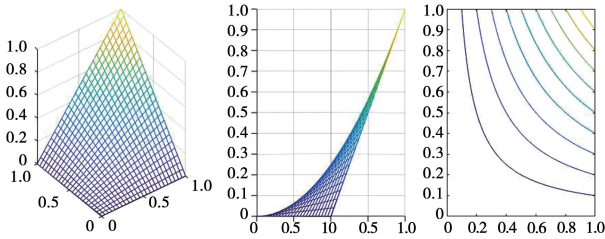


图 14 算子 $F_{4,1}$

Fig. 14 Operator $F_{4,1}$

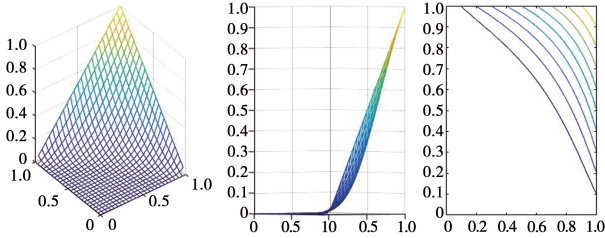


图 15 算子 $F_{2,4}$

Fig. 15 Operator $F_{2,4}$

由图 11 ~ 14 可见, F_λ 、 G_λ 和 $f(x)$ 、 $g(x)$ 分别一一对应, F_λ 和 G_λ 的等高线簇的曲率随 λ 变化而变化(图 1 ~ 10, 图 12, 图 15), 进而算子所代表的含义不同。在实际应用中, 随着问题的深入, 通过调试, 采用合适的算子和参数, 能够为具体问题提供更有针对性的帮助。

在 G_λ 算子的基础上, 给出一种非可加测度的定义。

定义 6 设 X 为非空集合, $\mathcal{F}$ 为由 X 子集构成的 σ -代数, $\lambda \in [0, +\infty)$, $g: [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ 为单调递增的连续函数, $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = +\infty$, 且满足 $g(0) = 0$, 集函数 $\mu^*: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ 称为 $(X, \mathcal{F})$ 上的 g - λ 测度, 若 μ^* 满足:

- 1) X 处为 1: $X \in \mathcal{F} \Rightarrow \mu^*(X) = 1$
- 2) 非可加性: $\forall A, B \in \mathcal{F}, A \cap B = \phi, \mu^*(A \cup B) = g^{-1}[g(\mu^*(A)) + g(\mu^*(B)) + \lambda g(\mu^*(A))g(\mu^*(B))]$
- 3) 上连续性: $\forall \{A_n\} \subset \mathcal{F}, A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots, \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}, \Rightarrow \mu^*(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(A_n)$
- 4) 下连续性: $\forall \{A_n\} \subset \mathcal{F}, A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}, \Rightarrow \mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(A_n)$

当 $g(x) = x$ 时, μ^* 是 λ - F 测度, 从这个意义上说 μ^* 是 λ - F 测度的推广。

当 $g(x)$ 为线性函数且 $\lambda = 0$ 时, μ^* 满足可加性, 并由连续性易得可列可加性成立, 此时测度 μ^* 是概率测度, 从这个意义上说测度 μ^* 是概率测度的扩张。

定理 6 设 μ 为 $(X, \mathcal{F})$ 上的 μ^* 测度, 则 μ 具有如下性质:

- 1) 单调性: $A, B \in \mathcal{F}$, 若 $A \subset B$, 有 $\mu(A) \leq \mu(B)$
- 2) 零可加性: 对 $\forall A, B \in \mathcal{F}, A \cap B = \phi$, 若 $\mu(A) = 0$, 则有 $\mu(A \cup B) = \mu(B)$ 。

- 3) 对 $\forall A, B \in \mathcal{F}$, 且 $A \cap B = \phi$, 有

$$g(\mu(A \cup B)) \geq g(\mu(A)) + g(\mu(B));$$

- 4) 对 $\forall A, B \in \mathcal{F}$, 有

$$g(\mu(A - B)) = \left[\frac{g(\mu(A)) - g(\mu(A \cap B))}{1 + \lambda g(\mu(A \cap B))} \right]$$

$\forall i \neq j$ 时, $A_i \cap A_j = \phi$, 则有

$$g[\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)] = \frac{1}{\lambda} \left[\prod_{k=1}^{\infty} [1 + \lambda g(\mu(A_k))] - 1 \right]$$

证明:

- 1) 若 $A, B \in \mathcal{F}$, 且 $A \subset B$, $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$, 则有 $B = A \cup (B - A)$ 且 $A \cap (B - A) = \phi$, 由定义 6,

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \mu(A \cup (B - A)) = g^{-1}[g(\mu(A)) + \\ &g(\mu(B - A)) + \lambda g(\mu(A))g(\mu(B - A))] \geq \\ &g^{-1}(g(\mu(A))) \geq \mu(A) \end{aligned}$$

- 2) 对 $\forall A, B \in \mathcal{F}$, 且 $A \cap B = \phi$, 若 $\mu(A) = 0$, 由定义 6, $g(0) = 0$, 则有

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B) &= g^{-1}[g(\mu(A)) + g(\mu(B)) + \\ &\lambda g(\mu(A))g(\mu(B))] = g^{-1}[g(0) + g(\mu(B)) + \\ &\lambda g(0)g(\mu(B))] = g^{-1}(g(\mu(B))) = \mu(B) \end{aligned}$$

特别地, 当 $B = \phi$, 有 $\mu(\phi) = 0$, 结合单调性可知

μ^* 是模糊测度。

3) 对 $\forall A, B \in F$, 且 $A \cap B = \phi, \lambda \in [0, \infty)$,

$$g(\mu(A \cup B)) = g(\mu(A)) + g(\mu(B)) +$$

$$\lambda g(\mu(A))g(\mu(B)) \geq g(\mu(A)) + g(\mu(B))$$

4) 由 $A = (A - B) \cup (A \cap B)$, 则有

$$\mu(A) = g^{-1}[g(\mu(A - B)) + g(\mu(A \cap B))] +$$

$$\lambda g(\mu(A - B))g(\mu(A \cap B))]$$

整理可得 $\mu(A - B)$ 。

5) 因 $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \phi$, 由定义 7, 有

$$g[\mu(A_1 \cup A_2)] = g(\mu(A_1)) + g(\mu(A_2)) +$$

$$\lambda g(\mu(A_1))g(\mu(A_2)) = \frac{1}{\lambda} \{ [1 + \lambda g(\mu(A_1))] [1 + \lambda g(\mu(A_2))] - 1 \}$$

$$\text{假设 } g[\mu(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i)] = \frac{1}{\lambda} [\prod_{i=1}^{k-1} [1 + \lambda g(\mu(A_i))] - 1] \text{ 成立,}$$

$$g[\mu(\bigcup_{i=1}^k A_i)] = g\{\mu[(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i) \cup A_k]\} =$$

$$g(\mu(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i)) + g(\mu(A_k)) + \lambda g(\mu(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i))g(\mu(A_k)) =$$

$$g(\mu(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i)) [1 + \lambda g(\mu(A_k))] + g(\mu(A_k)) =$$

$$\frac{1}{\lambda} [\prod_{i=1}^{k-1} [1 + \lambda g(\mu(A_i))] - 1] [1 + \lambda g(\mu(A_k))] + g(\mu(A_k)) =$$

$$\frac{1}{\lambda} [\prod_{i=1}^k [1 + \lambda g(\mu(A_i))] - [1 + \lambda g(\mu(A_k))]] + g(\mu(A_k)) =$$

$$\frac{1}{\lambda} [\prod_{i=1}^k [1 + \lambda g(\mu(A_i))] - 1 - \lambda g(\mu(A_k)) + \lambda g(\mu(A_k))] =$$

$$\frac{1}{\lambda} [\prod_{i=1}^k [1 + \lambda g(\mu(A_i))] - 1]$$

由数学归纳法, $\forall n \geq 2$, 恒有

$$g[\mu(\bigcup_{k=1}^n A_k)] = \frac{1}{\lambda} [\prod_{k=1}^n [1 + \lambda g(\mu(A_k))] - 1]$$

又由 μ 和 $g(x)$ 的连续性, 得

$$g[\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)] = g[u(\lim_{n \rightarrow \infty} \bigcup_{k=1}^n A_k)] =$$

$$g[\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\bigcup_{k=1}^n A_k)] =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(\mu(\bigcup_{k=1}^n A_k)) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} [\prod_{k=1}^n [1 + \lambda g(\mu(A_k))] - 1] =$$

$$\frac{1}{\lambda} [\prod_{k=1}^{\infty} [1 + \lambda g(\mu(A_k))] - 1]$$

$$\text{即 } g[\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)] = \frac{1}{\lambda} [\prod_{k=1}^{\infty} [1 + \lambda g(\mu(A_k))] - 1]。$$

综上所述, 测度 μ^* 为模糊测度, 称 (X, F) 为 g - λ 模糊可测空间, (X, F, μ^*) 为 g - λ 模糊测度空间。

3 结 论

本文给出一种构造参数可调的 T 三角模的方法, 先定义了一种由单调函数经初等运算生成的广义 T 三角模 F_λ , 利用对偶性, 定义了广义 S 三角模 G_λ , 统一了部分作者提出的优化 Zadeh 算子, 为三角模的构造提供了新方向。应用该方法构造一对新的三角模作为优化 Zadeh 算子, 通过仿真结果与 Zadeh 算子进行比较, 找到了在不丢失信息的情况下能够拟合 Zadeh 算子的 F_λ 和 G_λ 。在 S 三角模 G_λ 的基础上引入了 g - λ 测度, 对其性质进行了探讨, 对于 g - λ 测度的实际应用, 将在后续的具体问题中作为重点, 进行深入研究。

参考文献:

- [1] MENDER K. Statistical Metrics[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1942, 28(12):535.
- [2] ZADEH L A. Fuzzy sets[J]. Information & Control, 1965, 8(3):338.
- [3] EBELLMAN R, ZADEH L A. Local and Fuzzy Logics [J]. Modern Uses of Multiple-Valued Logic, 1977, 38(3):103.
- [4] LING Cho-hsin. Representation of Associative Functions [J]. Publ. Math. Debrecen 12, 1965, 14(6): 189.
- [5] MSUGENO. Theory of Fuzzy Integrals and Its Applications. Ph. D dissertation[D]. Tokyo Institute of Technology, 1974.
- [6] YAGER RR. On a General Class of Fuzzy Connectives [J]. Fuzzy Sets & Systems, 1980, 4(3):235.
- [7] 李中夫. 选取模糊集并交算子的一种方法[J]. 模糊系统与数学, 1992, 6(2):31.
- LI Zhongfu. An Approach to Selecting Operators for Union and Intersection of Fuzzy Subsets. [J]. Fuzzy system and Mathematics, 1992, 6(2):31.
- [8] TESKIL M, EFE M O, KAYNAK O. T-Norm Adaptation in Fuzzy Logic Systems Using Genetic Algorithms [C]// Proceedings of the IEEE International Symposium on. IEEE, 1999.
- [9] 李仁杰, 刘峰, 辛明影, 等. 基于不同模糊算子的模糊推理方法及效果分析[J]. 东北农业大学学报, 2002(1):90.
- LI Renjie, LIU Feng, XIN Mingying, et al. Fuzzy reasoning method and effect analysis basing on different fuzzy counter. [J]. Journal of Northeast Agricultural University, 2002(1):90.

- [10] 张世强. 一类连续模糊算子及其应用[J]. 中国工程科学, 2003(9):27.
ZHANGShiqiang. A Sort of Continued Fuzzy Operators and Its Application [J]. Strategic Study of CAE, 2003 (9):27.
- [11] DESCHRIJVER G, CORNELIS C, KERRE E E. On the Representation of Intuitionistic Fuzzy T-norms and T-conorms [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2004,12(1):45.
- [12] MUROFUSHI T, UCHINO K, ASAHINA S. Conditions for Egoroff's Theorem in Non-additive Measure Theory [J]. Fuzzy Sets & Systems, 2004, 146(1):135.
- [13] 陈成, 杨晨晖, 聂文等. 基于浮游植物图像的模糊算子边缘检测算法[J]. 计算机技术与发展, 2009, 19(3):22.
CHEN Cheng, YANG Chenhui, NIE Wen, et al. Based on Marine Phytoplankton Cells Images of Fuzzy Operator Edge Detection Algorithm [J]. Computer Technology and Development, 2009,19(3):22.
- [14] CASASNOVAS J, RIERA J V. Extension of Discrete T-norms and T-conorms to Discrete Fuzzy Numbers [J]. Fuzzy Sets & Systems, 2011, 167(1):65.
- [15] 许雪燕. 模糊综合评价模型的研究及应用[D]. 成都: 西南石油大学, 2011.
- [16] 刘琳. g_{λ} 模糊测度和模糊积分的进一步研究及应用[D]. 哈尔滨: 哈尔滨理工大学, 2015.
- [17] 张倩, 王学平. 模糊综合评价中几类模糊算子的比较[J]. 模糊系统与数学, 2016, 30(3):165.
ZHANG Qian, WANGXueping. The Comparison of Some Fuzzy Operators Used in Fuzzy Comprehensive Evaluation Models [J]. Fuzzy system and Mathematics, 2016, 30(3):165.
- [18] PENG J J, WANG J Q, WU X H, et al. Hesitant Intuitionistic Fuzzy Aggregation Operators Based on the Archimedean t-Norms and t-Conorms[J]. International Journal of Fuzzy Systems, 2017, 19(3):1.
- [19] 刘红彬, 姜乐, 蒋宗彩. 基于三角模糊数幂平均算子的群决策方法[J]. 统计与决策, 2018, 34(1):45.
LIU Hongbin, JIANG Le, JIANG Zongcai. Group Decision-making Method Based on Triangular Fuzzy Number Power Average Operator[J]. Statistics & Decision, 2018, 34(1):45.
- [20] KALINA M. Constructions for T-conorms and T-norms on Interval-valued and Interval-valued Intuitionistic [J]. Fuzzy Sets by Paving, 2020, 26(3):1.
- [21] 赵辉, 单云霄, 姜欣格. γ -模糊算子的 Sugeno 概率积分研究[J]. 哈尔滨理工大学学报, 2020, 25(4):151.
ZHAO Hui, SHAN Yunxiao, JIANG Xinge. Sugeno Probability Integral of γ -fuzzy Operator [J]. Journal of Harbin University of Science and Technology, 2020, 25(4):151.
- [22] EPKLEMENT, KOLES, ANNA. A Generalization of Universal Integrals by Means of Level Dependent Capacities [J]. Knowledge-Based Systems, 2013, 38(2):14.
- [23] MBERRES. Lambda-additive Measures on Measurable Spaces[J]. Sets and Systems, 1988, 27(2):159.
- [24] 姜欣格. 似乘算子模糊概率积分的研究和在电池性能检测中的应用[D]. 哈尔滨: 哈尔滨理工大学, 2020.

(编辑: 温泽宇)