

广义正交矩阵的性质

孟姗姗, 计东海

(哈尔滨理工大学 理学院, 哈尔滨 150080)

摘要:为了推广正交矩阵理论,利用赋范线性空间中的广义正交性,引入了广义正交矩阵的概念,并对几类广义正交矩阵及其性质进行了讨论,给出了广义 Birkhoff 正交矩阵可逆的充分条件。

关键词:广义正交矩阵; Birkhoff 正交; 等腰正交

DOI:10.15938/j.jhust.2023.01.019

中图分类号: O177.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2023)01-0154-05

Properties of Generalized Orthogonal Matrices

MENG Shanshan, JI Donghai

(School of Science, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: In order to generalize the orthogonal matrix theory, using the generalized orthogonality in normed linear space, the concept of generalized orthogonal matrix is introduced. Several kinds of generalized orthogonal matrices and their properties are discussed, and the sufficient conditions for the invertibility of generalized Birkhoff orthogonal matrices are given.

Keywords: generalized orthogonal matrix; Birkhoff orthogonality; isosceles orthogonality

0 引言

正交矩阵作为理工各学科领域研究中的一个重要工具,在许多领域中发挥着重要的作用。实方阵为正交矩阵的充分必要条件是其行向量组或列向量组为标准正交组,实际上这种正交是内积空间意义下的正交。因为广义正交理论是内积空间正交性在一般赋范线性空间中的推广^[1-8],所以可以在一般的赋范线性空间中讨论几种广义正交的性质,如与广义正交性质密切相关的几何常数性质^[9-10]、 C^* -代数上的性质^[11-12]、算子空间上各种算子的广义正交性^[13-17]等,这使得我们可以将正交矩阵的概念推广到赋范线性空间中,给出广义正交矩阵的概念。

本文借助于赋范线性空间中的广义正交性,将

正交矩阵理论加以推广,并展开讨论。

1 预备知识

定义 1^[1] 设 X 是一个赋范线性空间, $x, y \in X$, 如果对任意 $\alpha \in \mathbb{R}$ 都有

$$\|x + \alpha y\| \geq \|x\|, \quad (1)$$

则称 x Birkhoff 正交于 y , 记作 $x \perp_B y$ 。

定义 2^[2] 设 X 是一个赋范线性空间, $x, y \in X$, 如果有

$$\|x + y\| = \|x - y\|, \quad (2)$$

则称 x 等腰正交于 y , 记作 $x \perp_I y$ 。

定义 3 设 $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ 是 n 维实赋范线性空间, $G = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的向量组, 若对任意的非零行向量 $\eta_i, \eta_j \in G (i \neq j)$ 都有 $\eta_i \perp_B \eta_j$ 且

收稿日期: 2021-11-27

基金项目: 国家自然科学基金(11571085)。

作者简介: 计东海(1964—),男,博士,教授,博士研究生导师。

通信作者: 孟姗姗(1997—),女,硕士研究生, E-mail: 15266914353@163.com.

$\eta_j \perp_B \eta_i$ 成立,则称 G 为 X 上的广义 Birkhoff 正交组。若对任意的非零行向量 $\eta_i \in G$ 还有 $\|\eta_i\| = 1$ 成立,则称 G 为 X 上的广义 B 正交组。

定义4 设 $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ 是 n 维实赋范线性空间, $G = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的向量组,若对任意的非零行向量 $\eta_i, \eta_j \in G (i \neq j)$ 都有 $\eta_i \perp \eta_j$ 成立,则称 G 为 X 上的广义等腰正交组。若对任意的 $\eta_i \in G$ 还有 $\|\eta_i\| = 1$ 成立,则称 G 为 X 上的广义 I 正交组。

定义5 令 $n \times n$ 矩阵 $A = [\alpha_1 \cdots \alpha_n]^T$, 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^n$ 。若 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 为 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ 空间上的广义 Birkhoff 正交组,则称矩阵 A 为广义 Birkhoff 正交矩阵。若 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 为 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ 空间上的广义 B 正交组,则称矩阵 A 为广义 B 正交矩阵。

定义6 令 $n \times n$ 矩阵 $A = [\alpha_1 \cdots \alpha_n]^T$, 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^n$ 。若 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 为 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ 空间上的广义等腰正交组,则称矩阵 A 为广义等腰正交矩阵。若 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 为 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ 空间上的广义 I 正交组,则称矩阵 A 为广义 I 正交矩阵。

从定义易知,当 X 为内积空间时,广义正交矩阵就是正交矩阵,且矩阵的广义正交性与空间的范数存在着必然的联系,甚至可以认为矩阵的广义正交性由范数确定。对于 $\|\cdot\|_p (1 < p < \infty)$ 范数,广义正交矩阵总是存在的,如单位阵等。一般来说,广义正交矩阵具有正交矩阵的某些性质,但是与正交矩阵也有很大的不同,本文将对广义正交矩阵相关的性质进行初步讨论。

定理1^[18] 赋范线性空间 X 上的 Birkhoff 正交是左唯一(右唯一)的当且仅当 X 是严格凸(光滑)的。

定理2^[18] 赋范线性空间 X 上的 Birkhoff 正交是右可加的当且仅当 X 是光滑的。

2 主要结果

2.1 可逆性

根据定义,我们容易知道,当范数不同时,同一个矩阵的广义正交性是不同的。同时,不同范数意义下的广义正交矩阵性质也不尽相同。比如正交矩阵一定可逆,而广义正交矩阵的可逆性就与范数有关系。

例1 在赋范线性空间 $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_y)$ 中,对任意的 $x' = (x, y, z) \in X$, 规定:

$$\|x'\| = \max\{|y|, |x| + (1 - \gamma)|y|, |z|\} \quad (3)$$

其中 $\gamma \in [0, 1]$ 。

下面我们说明在 X 中存在广义 Birkhoff 正交矩阵不可逆。

令 $\gamma = \frac{1}{2}$, 则 X 的单位球面在 xoy 平面的投影为六边形。我们考虑这个投影平面 X_1 。空间 X_1 的单位球面如图1所示,由图可以看出其端点分别为 $\pm(1, 0)$ 、 $\pm(\frac{1}{2}, 1)$ 、 $\pm(-\frac{1}{2}, 1)$ 。

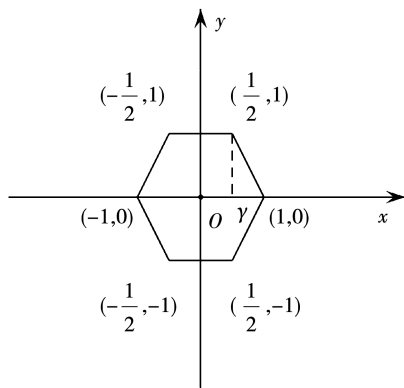


图1 X_1 单位球面

Fig. 1 Unit sphere of X_1

在 X_1 中,有 $(1, 0)$ Birkhoff 正交于 $(\frac{1}{2}, 1)$, $(\frac{1}{2}, 1)$ Birkhoff 正交于 $(-\frac{1}{2}, 1)$, $(1, 0)$ Birkhoff 正交于 $(-\frac{1}{2}, 1)$, 且它们之间的 Birkhoff 正交具有对称性。

则在空间 X 中, $\{(1, 0, 0), (\frac{1}{2}, 1, 0), (-\frac{1}{2}, 1, 0)\}$ 为广义 Birkhoff 正交组,但形成的广义 Birkhoff 正交矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{不可逆。}$$

上述例子表明,广义 Birkhoff 正交矩阵不一定可逆,但在一定条件下,广义 Birkhoff 正交矩阵是可逆的,下给出定理证明。

定理3 令 $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, 为 X 上的广义 Birkhoff 正交矩阵,若 X 严格凸,则 A 可逆。

证明: 1) 当 $n = 2$ 时,结论是显然的。设 $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ 为 X 上的广义 Birkhoff 正交组,则对于广义

正交矩阵 $A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$ 有

$$\alpha_1 \perp_B \alpha_2, \alpha_2 \perp_B \alpha_1 \quad (4)$$

若 A 不可逆, 则存在 $k \in \mathbb{R} (k \neq 0)$ 使得

$$\alpha_1 = k\alpha_2 \quad (5)$$

则有

$$k\alpha_2 \perp_B \alpha_2, \alpha_2 \perp_B k\alpha_2 \quad (6)$$

与 Birkhoff 正交定义矛盾。所以 A 可逆。

2) 假设 $n \geq 3$ 。

设 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ 为 X 上的广义 Birkhoff 正交组, 则对于广义 Birkhoff 正交矩阵 $A = [\alpha_1 \cdots \alpha_n]^T$, 若 A 不可逆, 则存在不全为零的 $k_2, k_3, \dots, k_n \in \mathbb{R}$, 使得

$$\alpha_1 = k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + \cdots + k_n\alpha_n \quad (7)$$

因为空间 X 是严格凸的, 所以 X 上的 Birkhoff 正交具有左唯一性。又因为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 之间的 Birkhoff 正交是对称的, 所以 X 上的 Birkhoff 正交也是右唯一的。

由定理 1 可以推出空间 X 是光滑的, 所以根据定理 2 知空间 X 上的 Birkhoff 正交是右可加的。进而由 $\alpha_1 \perp_B \alpha_2, \alpha_1 \perp_B \alpha_3, \dots, \alpha_1 \perp_B \alpha_n$ 及 X 上 Birkhoff 正交的齐次性与可加性知

$$\alpha_1 \perp_B k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + \cdots + k_n\alpha_n \quad (8)$$

$$\alpha_1 \perp_B \alpha_1 \quad (9)$$

与 Birkhoff 正交的定义矛盾, 所以 A 可逆。

2.2 转置矩阵的性质

为方便下文讨论, 先求得 $\ell_p^2 (1 < p < \infty, p \neq 2)$ 空间上的广义 Birkhoff 正交组与广义 B 正交组。

引理 1 $\ell_p^2 (1 < p < \infty, p \neq 2)$ 空间中非零行向量组 $\{\alpha, \beta\}$ 为广义 Birkhoff 正交组当且仅当满足下列条件之一:

$$1) \alpha = \pm(x_1, 0) \text{ 且 } \beta = \pm k(0, 1);$$

$$2) \alpha = \pm(x_1, x_1) \text{ 且 } \beta = \pm k(1, -1)。$$

证明: 由文 [19] 知: 对任意的 $\alpha, \beta \in \ell_p^2 (1 < p < \infty, p \neq 2)$, 设 $\alpha = (x_1, x_2)$,

1) 当满足 $\alpha \perp_B \beta$ 条件时, 有

$$\beta = k \left(1, -\frac{|x_1|^{p-2}x_1}{|x_2|^{p-2}x_2} \right) \quad \forall k \in \mathbb{R} \quad (10)$$

2) 若 $\beta = (y_1, y_2)$ 满足 $\beta \perp_B \alpha$, 则 y_1, y_2 满足方程组:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{|y_1|^{p-2}y_1}{\|\beta\|^{p-1}} &= \pm \frac{-x_2}{\|(-x_2, x_1)\|_q} \\ \frac{|y_2|^{p-2}y_2}{\|\beta\|^{p-1}} &= \pm \frac{x_1}{\|(-x_2, x_1)\|_q} \end{aligned} \right. \quad (11)$$

则根据这 2 个条件可以求得: 对任意的非零行

向量 $\alpha, \beta \in \ell_p^2 (1 < p < \infty, p \neq 2)$, $\alpha \perp_B \beta$ 且 $\beta \perp_B \alpha$ 当且仅当满足以下条件之一:

$$1) \alpha = \pm(x_1, 0) \text{ 且 } \beta = \pm k(0, 1);$$

$$2) \alpha = \pm(x_1, x_1) \text{ 且 } \beta = \pm k(1, -1)。$$

引理 2 $\ell_p^2 (1 < p < \infty, p \neq 2)$ 空间中非零行向量组 $\{\alpha, \beta\}$ 为广义 B 正交组当且仅当满足下列条件之一:

$$1) \alpha = \pm(1, 0) \text{ 且 } \beta = \pm(0, 1);$$

$$2) \alpha = \pm\left(\frac{1}{2^{1/p}}, \frac{1}{2^{1/p}}\right) \text{ 且 } \beta = \pm\left(\frac{1}{2^{1/p}}, \frac{-1}{2^{1/p}}\right)。$$

证明: 由引理 1, 令 $\|\alpha\| = \|\beta\| = 1$, 则对任意的非零行向量 $\alpha, \beta \in \ell_p^2 (1 < p < \infty, p \neq 2)$, $\alpha \perp_B \beta$ 且 $\beta \perp_B \alpha$ 当且仅当满足以下条件之一:

$$1) \alpha = \pm(1, 0) \text{ 且 } \beta = \pm(0, 1);$$

$$2) \alpha = \pm\left(\frac{1}{2^{1/p}}, \frac{1}{2^{1/p}}\right) \text{ 且 } \beta = \pm\left(\frac{1}{2^{1/p}}, \frac{-1}{2^{1/p}}\right)。$$

结论 广义 Birkhoff 正交矩阵的转置不一定是广义 Birkhoff 正交矩阵。

证明: 不妨设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, 由引理 1 知 $\{(2, 2), (1, -1)\}$ 为 $\ell_p^2 (1 < p < \infty, p \neq 2)$ 空间上的广义 Birkhoff 正交组, 所以 A 为广义 Birkhoff 正交矩阵。此时 $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, 但 $\{(2, 1), (2, -1)\}$ 不是广义 Birkhoff 正交组, 进而 A 的转置不是广义 Birkhoff 正交矩阵。

由求得的广义 B 正交组可以得到如下结论:

定理 4 $\ell_p^2 (1 < p < \infty, p \neq 2)$ 空间中, 广义 B 正交矩阵的转置是广义 B 正交矩阵, 广义 B 正交矩阵的逆是广义 Birkhoff 正交矩阵。

2.3 保正交性

定理 5 在 $\ell_p^2 (1 < p < \infty, p \neq 2)$ 空间中, 令 A 为其上的广义 B 正交矩阵, 若 $\{\alpha, \beta\}$ 为 $\ell_p^2 (1 < p < \infty, p \neq 2)$ 空间上的广义 Birkhoff 正交组, 则 $\{A\alpha^T, A\beta^T\}$ 也是 $\ell_p^2 (1 < p < \infty, p \neq 2)$ 空间上的广义 Birkhoff 正交组。

证明: 当广义 B 正交矩阵 A 中行向量为引理 2 中的情况 1) 时, 结论是显然的。下面验证当 A 中行向量为 2) 的情况。

不妨设 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2^{1/p}} & \frac{1}{2^{1/p}} \\ \frac{1}{2^{1/p}} & -\frac{1}{2^{1/p}} \end{bmatrix}$, 当广义 Birkhoff 正交组为 $\{\pm(x_1, 0), \pm k(0, 1)\}$ 时,

$$A\alpha^T = \pm \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{1/p}x_1} \\ \frac{1}{2^{1/p}x_1} \end{pmatrix}, A\beta^T = \pm k \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{1/p}} \\ -\frac{1}{2^{1/p}} \end{pmatrix} \quad (12)$$

根据引理1,此时 $\{A\alpha^T, A\beta^T\}$ 为 ℓ_p^2 ($1 < p < \infty$, $p \neq 2$)空间上的广义Birkhoff正交组。当广义Birkhoff正交组为 $\{\pm(x_1, x_1), \pm k(1, -1)\}$ 时,

$$A\alpha^T = \pm \begin{pmatrix} \frac{2}{2^{1/p}x_1} \\ 0 \end{pmatrix}, A\beta^T = \pm k \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{2^{1/p}} \end{pmatrix} \quad (13)$$

根据引理1,此时 $\{A\alpha^T, A\beta^T\}$ 为 ℓ_p^2 ($1 < p < \infty$, $p \neq 2$)上的广义Birkhoff正交组。

2.4 广义正交矩阵之间的关系

定理6 ℓ_p^2 ($1 < p < \infty$, $p \neq 2$)空间中,广义Birkhoff正交矩阵一定是广义等腰正交矩阵,广义B正交矩阵一定是广义I正交矩阵。

证明:当 ℓ_p^2 ($1 < p < \infty$, $p \neq 2$)空间中的广义Birkhoff正交矩阵A中行向量为引理1中的情况1)时,结论是显然的。下面验证当A中行向量为2)的情况。

当A中行向量为2)这种情况时, $A = \pm \begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ k & -k \end{pmatrix}$ 或 $A = \pm \begin{pmatrix} k & -k \\ x_1 & x_1 \end{pmatrix}$ 。此时有

$$\|(x_1 + k, x_1 - k)\|_p = \|(x_1 - k, x_1 + k)\|_p \quad (14)$$

所以根据等腰正交的定义可知A为 ℓ_p^2 ($1 < p < \infty$, $p \neq 2$)空间上的广义等腰正交矩阵。

对于广义B正交矩阵来说,也可得到广义B正交矩阵为广义I正交矩阵,因为讨论过程与上述过程类似,所以不再进行展开说明。

引理3 若A, C为 ℓ_p^2 ($1 < p < \infty$, $p \neq 2$)空间上的广义B正交矩阵,则乘积AC为 ℓ_p^2 ($1 < p < \infty$, $p \neq 2$)空间上的广义Birkhoff正交矩阵。

注:若A, C为广义B正交矩阵,则乘积AC不一定是广义B正交矩阵。比如 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{1/p}} & \frac{1}{2^{1/p}} \\ \frac{1}{2^{1/p}} & -\frac{1}{2^{1/p}} \end{pmatrix}$,

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{1/p}} & -\frac{1}{2^{1/p}} \\ \frac{1}{2^{1/p}} & \frac{1}{2^{1/p}} \end{pmatrix} \text{ 时,}$$

$$AC = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{1/p}} & \frac{1}{2^{1/p}} \\ \frac{1}{2^{1/p}} & -\frac{1}{2^{1/p}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{1/p}} & -\frac{1}{2^{1/p}} \\ \frac{1}{2^{1/p}} & \frac{1}{2^{1/p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{2^{2/p}} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{2^{2/p}} \end{pmatrix} \quad (15)$$

当 $p > 2$ 时,AC中行向量的范数均大于1,所以不是广义B正交矩阵。

上述内容是在赋予广义B正交矩阵A, C相同的 $\|\cdot\|_p$ 范数时得到的结论,当A, C赋不同的范数时乘积的广义正交性是否有所不同呢? 下面进行讨论。

定理7 设A为 $\ell_{p_1}^2$ ($1 < p_1 < \infty$, $p_1 \neq 2$)空间上的广义B正交矩阵, C为 $\ell_{q_1}^2$ ($1 < q_1 < \infty$, $q_1 \neq 2$)空间上的广义B正交矩阵,且 p_1, q_1 满足条件: $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = 1$,则此时乘积AC为 ℓ_p^2 ($1 < p < \infty$, $p \neq 2$)空间上的广义B正交矩阵。

证明:根据引理2中的几种情况,分别进行讨论:

(i) 当A, C中行向量均为情况1)时, $AC = \pm A$ 或 $\pm C$,结论显然成立。

(ii) 当A中行向量为1)、C中行向量为2)这

种情况时,不妨设 $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{1/q_1}} & -\frac{1}{2^{1/q_1}} \\ \frac{1}{2^{1/q_1}} & \frac{1}{2^{1/q_1}} \end{pmatrix}$,则 $AC = \pm C$

或 $\pm \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{1/q_1}} & \frac{1}{2^{1/q_1}} \\ \frac{1}{2^{1/q_1}} & -\frac{1}{2^{1/q_1}} \end{pmatrix}$;

当A中行向量为2)、C中行向量为1)这种情况

时,不妨设 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{1/p_1}} & \frac{1}{2^{1/p_1}} \\ \frac{1}{2^{1/p_1}} & -\frac{1}{2^{1/p_1}} \end{pmatrix}$,则 $AC = \pm A$ 或

$\pm \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{1/p_1}} & \frac{1}{2^{1/p_1}} \\ -\frac{1}{2^{1/p_1}} & \frac{1}{2^{1/p_1}} \end{pmatrix}$ 。

结论均成立。

(iii) 当A, C中行向量均为情况2)时,不妨设

$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{1/p_1}} & \frac{1}{2^{1/p_1}} \\ \frac{1}{2^{1/p_1}} & -\frac{1}{2^{1/p_1}} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{1/q_1}} & -\frac{1}{2^{1/q_1}} \\ \frac{1}{2^{1/q_1}} & \frac{1}{2^{1/q_1}} \end{pmatrix}$

则

$AC = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{1/p_1}} & \frac{1}{2^{1/p_1}} \\ \frac{1}{2^{1/p_1}} & -\frac{1}{2^{1/p_1}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{1/q_1}} & -\frac{1}{2^{1/q_1}} \\ \frac{1}{2^{1/q_1}} & \frac{1}{2^{1/q_1}} \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{2^{1/p_1+1/q_1}} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{2^{1/p_1+1/q_1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{1/p_1+1/q_1-1}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2^{1/p_1+1/q_1-1}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

结论成立。

所以综上所述, AC 为 ℓ_p^2 ($1 < p < \infty, p \neq 2$) 空间上的广义 B 正交矩阵。

在定理 6 中我们已初步讨论了广义 Birkhoff 正交矩阵与广义等腰正交矩阵之间的关系, 我们进一步猜测: 对于由非零行向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 组成的 $n \times n$ 矩阵 M , 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \ell_p^n$ ($1 < p < \infty, p \neq 2$) 且满足条件 $\alpha_i \perp_B \alpha_j$ 或 $\alpha_j \perp_B \alpha_i$ ($1 \leq i, j \leq n, i \neq j$), 若 M 同时为 ℓ_p^n ($1 < p < \infty, p \neq 2$) 空间上的广义等腰正交矩阵, 则可以推出 M 为 ℓ_p^n ($1 < p < \infty, p \neq 2$) 空间上的广义 Birkhoff 正交矩阵。相关的内容我们正在考虑推广到一般赋范线性空间中, 但结论有可能不同, 还有待进一步讨论。

3 结 论

本文对正交矩阵进行推广, 借助于赋范线性空间中的广义正交理论, 建立了广义正交矩阵的概念, 得到严格凸的赋范线性空间中广义 Birkhoff 正交矩阵是可逆的结论, 同时在 ℓ_p^2 ($1 < p < \infty, p \neq 2$) 空间中得到广义 Birkhoff 正交组、广义 B 正交组, 并利用广义 Birkhoff 正交组、广义 B 正交组讨论了广义 Birkhoff 正交矩阵、广义 B 正交矩阵转置的性质、保正交性及广义 B 正交矩阵乘积矩阵的性质, 探讨了广义 Birkhoff 正交矩阵与广义等腰正交矩阵的关系, 并进一步提出猜测。

参考文献:

- [1] Birkhoff G. Orthogonality in Linear Metric Spaces [J]. Duke Mathematical Journal, 1935, 1(2): 171.
- [2] JAMES R C. Orthogonality in Normed Linear Spaces [J]. Duke Mathematical Journal, 1945, 12(2): 292.
- [3] ROBERTS B D. On the Geometry of Abstract Vector Spaces [J]. Tohoku Mathematic Journal, 1934, 39: 42.
- [4] JAMES R C. Orthogonality and Linear Functionals in Normed Linear Spaces [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1947, 61(2): 265.
- [5] SINGER I. Unghiuri Abstracte Si Functii Trigonometrice in Spatii Banach [J]. Bul. Stiint. Acad. R. P. R.

Sect. Stiint. Mat. Fiz, 1957(9): 29.

- [6] CARLSSON S O. Orthogonality in Normed Linear Spaces [J]. Arkiv För Matematik, 1962, 4(4): 297.
- [7] DIMINNIE C R. A New Orthogonality Relation for Normed Linear Spaces [J]. Mathematische Nachrichten, 1983, 114(1): 197.
- [8] ALONSO J, BENITEZ C. Area Orthogonality in Normed Linear Spaces [J]. Archiv Der Mathematik, 1997, 68(1): 70.
- [9] JI Donghai, WU Senlin. Quantitative Characterization of the Difference between Birkhoff Orthogonality and Isosceles Orthogonality [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2006, 323(1): 1.
- [10] ZUO Z F. On James Type Constants and the Normal Structure in Banach Spaces [J]. Mathematical Inequalities and Applications, 2020, 23(1): 341.
- [11] ARAMBASIC L, GUTERMAN A, KUZMA B, et al. Orthograph Related to Mutual Strong Birkhoff-James Orthogonality in C^* -Algebras [J]. Banach Journal of Mathematical Analysis, 2020, 14(4): 1751.
- [12] KOMURO N, SAITO K S, TANAKA R. On Symmetry of Birkhoff Orthogonality in the Positive Cones of C^* -Algebras with Applications [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2019, 474(2): 1488.
- [13] PAUL K, SAIN D, GHOSH P. Birkhoff-James Orthogonality and Smoothness of Bounded Linear Operators [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2016, 506: 551.
- [14] SAIN D, GHOSH P, PAUL K. On Symmetry of Birkhoff-James Orthogonality of Linear Operators on Finite-Dimensional Real Banach Spaces [J]. Operators and Matrices, 2017, 11(4): 1087.
- [15] WÓJCIK P. Birkhoff Orthogonality in Classical M-Ideals [J]. Journal of the Australian Mathematical Society, 2017, 103(2): 279.
- [16] ZAMANI A. Birkhoff-James Orthogonality of Operators in Semi-Hilbertian Spaces and Its Applications [J]. Annals Of Functional Analysis, 2019, 10(3): 433.
- [17] MAL A, SAIN D, PAUL K. On Some Geometric Properties of Operator Spaces [J]. Banach Journal of Mathematical Analysis, 2019, 13(1): 174.
- [18] ALONSO J, MARTINI H, WU Senlin. On Birkhoff Orthogonality and Isosceles Orthogonality in Normed Linear Spaces [J]. Aequationes Mathematicae, 2012, 83(1/2): 163.
- [19] 韩雪. 具有对称性的双正交元的存在性及其相关问题的研究 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨理工大学, 2009.

(编辑: 温泽宇)