

一类半线性微分方程的渐近概自守温和解

姚慧丽, 宋晓秋, 李兴华

(哈尔滨理工大学 应用科学学院, 黑龙江 哈尔滨 150080)

摘要:在解决某些实际问题的时候,渐近概自守函数比渐近概周期函数更具有现实意义. 为了研究渐近概自守函数在微分方程中的应用,依据不动点定理和 N' Guerekata 教授关于微分方程的研究,给出了一类半线性微分方程的渐近概自守温和解的存在性和唯一性.

关键词:半线性微分方程; 渐近概自守函数; C_0 半群; 温和解; 不动点

中图分类号: O175 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2012)01-0113-03

Asymptotically Almost Automorphic Mild Solutions to a Class of Semilinear Differential Equations

YAO Hui-li, SONG Xiao-qiu, LI Xing-hua

(School of Applied Sciences, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: At the time of solving some practical problems, asymptotically almost automorphic functions and more practical than asymptotically almost periodic functions. In order to study asymptotically almost automorphic functions applied to the differential equations, the existence and uniqueness of asymptotically almost automorphic mild solutions to a class of semilinear differential equations are discussed using fixed point theorem and Professor N' Guerekata study on differential equations.

Key words: semilinear differential equations; asymptotically almost automorphic function C_0 -semigroup; mild solution; fixed-point

0 引言

对于半线性微分方程的渐近概周期解和伪概周期解的存在性问题,已有大量文献进行了讨论^[1]. 但是当引入了渐近概自守函数的概念后^[2-3],半线性微分方程的渐近概自守解存在性问题的讨论就有必要了,本文主要讨论了半线性微分方程

$$x'(t) = Ax(t) + f(t, x(t)), t \in \mathbb{R} \quad (1)$$

其中, A 是半群 $\{T(t) : t \geq 0\}$ 的无穷小生成元的渐近

概自守温和解的存在性和唯一性问题.

本文 $\mathbb{R}$ 表示实数集, X 表示 Banach 空间.

1 预备知识

定义 1 假设 $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow X$ 是一个连续函数. 如果对于任意序列 $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, 存在一个子序列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得

$$g(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(t + t_n)$$

收稿日期: 2011-05-19

基金项目: 黑龙江省教育厅科学技术研究项目(125111110)

作者简介: 姚慧丽(1970—),女,博士,教授, E-mail: huili_yao@sohu.com;

宋晓秋(1986—),女,硕士研究生;

李兴华(1971—),女,硕士,副教授.

对于任何 $t \in R$ 是可以明确定义的,并且有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(t - t_n) = f(t)$$

对于每个 $t \in R$ 都成立,那么 f 称为是概自守的^[4-5]. 记所有这样的函数构成的集合为 $AA(R, X)$ 或简记为 $AA(X)$.

本文中定义:

$C_0(R, X) = \{h: R \rightarrow X \mid h \text{ 是一个连续函数且 } \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0\}$

定义2 假设 $f(t): R \rightarrow X$ 是一个连续函数. 如果它能够分解为

$$f(t) = g(t) + h(t), \quad t \in R$$

这里 $g \in AA(R, X)$, $h \in C_0(R, X)$. 此时称函数 f 是渐近概自守的,记为 $AAA(R, X)$.

定义3 设 X 是一个 Banach 空间, $T(t) (t \geq 0)$ 是 X 到 X 的一个单参数有界线性算子族. 如果

- 1) $T(0) = I$ (I 为 X 上的恒等算子);
- 2) $T(t+s) = T(t)T(s) \quad (\forall t, s \in R^+)$;
- 3) $T(t)$ 强连续,即对任意的 $x \in X$, 有 $\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x$,

则称 $T(t)$ 是 X 上的一个强连续有界线性算子半群,简称 c_0 半群.

引理1^[6] 设 $f(t, x) = g(t, x) + \varphi(t, x)$ 是一个渐近概自守函数,这里有

$$g(t, x) \in AA(R^+ \times X, X)$$

$\varphi(t, x) \in C_0(R^+ \times X, X)$, 并且 $g(t, x)$ 在任何有界集 $K \subset X$ 上关于 $t \in R$ 是一致连续的,那么由 $x(t) \in AAA(R^+, X)$ 可以得到 $f(\cdot, x(\cdot)) \in AAA(R^+, X)$.
N' Guerekata 教授关于方程(1)得出了以下结论:

引理2^[7] 假设 $f \in AA(X)$, 方程(1)中线性算子 A 是一个指数稳定的 C_0 半群 $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ 的无穷小生成元,即存在常数 $K > 0$ 和 $\omega > 0$, 使得 $\|T(t)\| \leq Ke^{-\omega t}$, 那么方程(1)存在唯一的概自守温和解.

2 主要结果

定义4^[8-9] $x(t): R \rightarrow X$ 称为方程(1)的渐近概自守温和解,若 $x \in AAA(R, X)$ 且 $x(t)$ 满足对任意 $t \geq a (a \in R)$, 下面等式成立:

$$x(t) = T(t-a)x(a) + \int_a^t T(t-s)f(s, x(s))ds$$

其中 $T(t)$ 是一个 c_0 半群.

定理1 若方程(1)满足如下的假设:

(H₁) A 是一个具有指数稳定增长的 c_0 半群 $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ 的无穷小生成元,即存在常数 $K_0 > 0, \omega >$

0 满足:

$$\|T(t)\| \leq K_0 e^{-\omega t}, \quad (t \geq 0).$$

(H₂) $f: R \times X \rightarrow X$ 是一个渐近概自守的函数.

(H₃) f 关于 x 对 t 一致地满足 Lipschitz 条件,即对任何 $t \in R, x, y \in X$ 有

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\|,$$

这里 $L < \frac{\omega}{K_0}$. 则方程(1)存在唯一的渐近概自守温和解.

证明: 考虑如下定义的非线性算子 F :

$$(Fx)(t) = \int_{-\infty}^t T(t-s)f(s, x(s))ds$$

若 $x(s) \in AAA(R, X)$, 那么根据引理1和条件(H₂)可知,存在两个函数 $G \in AA(R, X)$, $\Phi \in C_0(R, X)$ 满足 $f = G + \Phi$. 所以 $(Fx)(t)$ 可以表示成: $(Fx)(t) = \tilde{G}(t) + \tilde{\Phi}(t)$, 这里

$$\tilde{G}(t) = \int_{-\infty}^t T(t-s)G(s)ds,$$

$$\tilde{\Phi}(t) = \int_{-\infty}^t T(t-s)\Phi(s)ds.$$

通过引理2中 N' Guerekata 教授的证明,容易知道 $t \rightarrow \tilde{G}(t)$ 是一个概自守函数.

下面证 $\tilde{\Phi}(t) \in C_0(R, X)$.

因为 $\Phi \in C_0(R, X)$, 所以存在 $M > 0$, 当 $x \in R \setminus [-M, M]$, 即 $|x| > M$ 时, 有 $\|\Phi\| < \varepsilon$. 由假设(H₁) $\|T(t)\| \leq K_0 e^{-\omega t} \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$, 可知对上述 ε , 存在 $M' > 0$, 当 $t > M'$ 时, 有 $\|T(t)\| < \varepsilon$. 令 $N = M + M'$

1) 当 $t < -N$ 时,

令 $u = t - s$, 由 $t - u < -N$, 有 $\|\Phi(t-u)\| < \varepsilon$,

所以

$$\left\| \int_{-\infty}^t T(t-s)\Phi(s)ds \right\| = \left\| \int_0^{\infty} T(t-u)\Phi(t-u)du \right\| < \varepsilon \frac{K_0}{\omega}$$

由 ε 的任意性知, $\lim_{t \rightarrow -\infty} \tilde{\Phi}(t) = 0$.

2) 当 $t > N$ 时,

$$\left\| \int_{-\infty}^t T(t-s)\Phi(s)ds \right\| \leq \left\| \int_{-\infty}^{-M} T(t-s)\Phi(s)ds \right\| + \left\| \int_{-M}^M T(t-s)\Phi(s)ds \right\| + \left\| \int_M^t T(t-s)\Phi(s)ds \right\|$$

以下对上述不等式右端分别加以证明:

(I) 令 $u = t - s, s = t - u \in (-\infty, -M)$,

$$\left\| \int_{-\infty}^{-M} T(t-s)\Phi(s)ds \right\| \leq \int_M^{\infty} \|T(u)\| \|\Phi(t-u)\| du \leq$$

$$\varepsilon \int_0^{\infty} K_0 e^{-\omega u} du = \varepsilon \frac{K_0}{\omega}$$

(II) $t > N = M + M', -M \leq s \leq M$, 有 $t - s > M'$,

则 $\|T(t-s)\| < \varepsilon$,

$$\left\| \int_{-M}^M T(t-s) \Phi(s) ds \right\| < \varepsilon \int_{-M}^M \|\Phi(s)\| ds$$

因为 $\|\Phi(s)\|$ 有界, 所以 $\int_{-M}^M \|\Phi(s)\| ds$ 有界.

(III) 令 $u = t - s, s = t - u \in [M, t]$, 所以有 $\|\Phi(t-u)\| < \varepsilon$, 则

$$\left\| \int_M^t T(t-s) \Phi(s) ds \right\| = \left\| \int_0^{t-M} T(u) \Phi(t-u) du \right\| < \varepsilon \int_0^\infty \|T(u)\| du < \varepsilon \frac{K_0}{\omega}$$

由以上及 ε 的任意性: $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\Phi}(t) = 0$.

综上所述 $\tilde{\Phi}(t) \in C_0(R, X)$.

从而 $(Fx)(t) = \tilde{G}(t) + \tilde{\Phi}(t)$ 是 R 上的一个渐近概自守函数. 也就是说, F 将 $AAA(R, X)$ 映射到 $AAA(R, X)$ 自身.

取 $x, y \in AAA(R, X)$, 有

$$\begin{aligned} \|Fx - Fy\| &= \left\| \int_{-\infty}^t T(t-s) [f(s, x(s)) - f(s, y(s))] ds \right\| \leq \\ &\sup_{t \in R} \int_{-\infty}^t \|T(t-s) [f(s, x(s)) - f(s, y(s))]\| ds \leq \\ &L \|x - y\| \sup_{t \in R} \int_{-\infty}^t \|T(t-s)\| ds \leq \\ &L \|x - y\| \int_{-\infty}^t K_0 e^{-\omega(t-s)} ds = \\ &\frac{LK_0}{\omega} \|x - y\| \end{aligned}$$

再由假设 (H_3) , 计算出 $\frac{LK_0}{\omega} < 1$, 故 F 是 $AAA(R, X)$ 上的一个压缩映射.

由 Banach 压缩映射原理知道 F 存在唯一的不动点 $x(t) \in AAA(R, X)$, 并且这个不动点对于所有 $t \in R$ 满足积分方程

$$x(t) = \int_{-\infty}^t T(t-s) (f(s, x(s))) ds.$$

取定 $a \in R$, 有

$$x(a) = \int_{-\infty}^a T(a-s) (f(s, x(s))) ds.$$

由于 $T(t-s) = T(t-a)(a-s)$, $t \geq a \geq s$, 这说明

$x(t)$ 满足方程 (1), 从而 $x(t)$ 是方程 (1) 的一个温和解.

最后, 我们来证一下唯一性^[10]. 假设 $y(t)$ 也是方程 (1) 的一个温和解, 即 $y(t)$ 也满足方程 (1), 用 x 替换为 y . 令 $a \rightarrow -\infty$ 可知

$$y(t) = \int_{-\infty}^t T(t-s) (f(s, y(s))) ds, t \in R$$

又因为 $y(t)$ 在 R 上是有界的并且 $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ 是指数稳定的半群, 故在 R 上 $x(t) \equiv y(t)$.

综上所述, 根据定义四, $x(t)$ 是方程 (1) 的唯一的渐近概自守温和解.

参考文献:

- [1] LIANG Jin, ZHANG Jun, XIAO Ti-Jun. Composition of Pseudo Almost Automorphic And Asymptotically Almost Automorphic functions [J]. Math. Anal. Appl, 2008, 340(2): 1493-1499.
- [2] GUEREKATA G M N'. Topics In Almost Automorphy Springer - Verlag [J]. New York, 2005, 132(2): 113-129.
- [3] GUEREKATA G M N'. Almost Automorphic Functions and Almost Periodic Functions in Abstract Spaces [J]. Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York-Bedim-Moscow, 2001, 34(2): 149-159.
- [4] VEECH W A, Almost Automorphic Functions [J]. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1963, 340(4): 462-464.
- [5] BOHR H. On the Definition of Almost Periodicity [J]. Analyse-Math., 1951, 19(1): 11-27.
- [6] LIANG Jin, GUEREKATA G M N', XIAO Ti-Jun, Jun Zhang. Some Properties of Pseudo Almost Automorphic Functions and Applications to Abstract Differential Equations [M]. Nonlinear Analysis Theory Methods and Applications, in press, 2008: 20-29.
- [7] G. M. N' Guerekata, Existence and Uniqueness of Almost Automorphic Mild solutions to Some Semilinear Abstract differential equations [J]. Semigroup Form, 2004, 69(1): 80-86.
- [8] 姚慧丽, 一类半线性微分方程的调和伪概周期解 [J], 哈尔滨理工大学学报, 2002, 7(4): 98-100.
- [9] GUEREKATA G M N', Existence and Uniqueness of Almost Automorphic Mild Solution to Some Semilinear Abstract Differential Equations [J]. Semigroup Form 69, 2004, (1): 81-86.
- [10] 严星, 姚慧丽, 高文建. 一类半线性微分方程的温和渐近概周期解 [J]. 哈尔滨商业大学学报: 自然科学版, 2008, 24(5): 604-606.

(编辑: 付长缨)