

原料奶中细菌间相互作用的数学模型

李冬梅, 赵兵, 王树忠

(哈尔滨理工大学 应用科学学院, 黑龙江 哈尔滨 150080)

摘要:利用微分生物动力学理论分析原料奶中细菌生态演变的过程,建立了在温度影响下原料奶中乳酸菌和酵母菌相互作用的数学模型,并给出模型的平衡点稳定性充分条件,从而确定了牛奶变质的临界条件.

关键词:乳酸菌; 酵母菌; 稳定性; 温度; 临界条件

中图分类号: O175.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2012)01-0120-06

The Mathematical Model of the Interaction among Raw Milk Bacteria

LI Dong-mei, ZHAO Bing, WANG Shu-zhong

(School of Applied Sciences, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: This paper analyzes the ecological evolution of bacteria in raw milk by the differential biodynamic theory. It establishes the model of the interaction between the lactobacillus and yeast in raw milk under the influence of temperature. The sufficient conditions for stability of the model equilibrium is put out, and the critical conditions of milk deterioration has been identified.

Key words: lactobacillus; yeast; stability; temperature; critical condition

0 预备知识

牛奶丰富的营养物质为各种细菌提供了理想的生长条件,了解牛奶中的微生物在外界某些因素影响下的变化趋势对控制原料奶的质量是十分必要的.目前,有关牛奶细菌间相互作用的研究主要是利用试验的方法进行描述.夏全等对10份牛奶连续观察12h,通过观察感官、黏度、酸度、菌落总数等指标,给出牛奶变质的判断^[1].陈燕飞对刚采集的生牛奶进行试验室培养,通过试验观察到牛奶在自然发酵与酸败中,细菌由一种微生物群体接替另一种微生物群体的一系列生态演变过程,得到牛奶中的细菌变化规律^[2].郭秀微通过对原料奶第一个阶段变化规律的分析,建立了乳链球菌、乳酸杆菌以及它

们同营养物质乳糖之间相互作用的数学模型

$$\begin{cases} \frac{ds(t)}{dt} = -\frac{\mu_1(s)}{\delta_1}x - \frac{\mu_2(s)}{\delta_2}y - d_0s \\ \frac{dx(t)}{dt} = x(\mu_1(s) - d_1) - \varphi(x, y)y \\ \frac{dy(t)}{dt} = y(\mu_2(s) - d_2 + k\varphi(x, y)) \\ s(0) > 0, x(0) > 0, y(0) > 0 \end{cases}$$

其中: s 代表乳糖; x 代表乳链球菌; y 代表乳酸杆菌.给出唯一平衡点的局部稳定性分析,再通过数值模拟给出乳链球菌和乳酸杆菌的增殖情况分析^[3].但是模型中没有考虑温度对细菌变化的影响.本文在文^[4]基础上主要考虑了温度变化对牛奶细菌增长的影响.利用^[5]的试验分析方法得到了各阶段牛奶中细菌变化随温度参数变化的函数关系式,从

收稿日期: 2010-09-12

基金项目: 黑龙江省自然科学基金资助项目(A200502)

作者简介: 李冬梅(1962—),女,教授,硕士生导师, E-mail: dml_2004@yahoo.com.cn

赵兵(1983—),女,硕士研究生.

而建立了牛奶中乳酸菌、酵母菌和营养物质乳糖之间相互作用的数学模型. 利用微分生物动力学理论对模型进行了定性分析^[4-5], 给出了乳酸菌、酵母菌依赖温度的变化趋势.

1 模型建立

牛奶成分是细菌很好的营养基质, 随着温度的升高细菌会很快繁殖. 由于新采集的生牛乳 pH 为中性, 含有丰富的乳糖, 有利于在自然状态下的乳酸细菌如乳链球菌(*streptococcus lactis*) 快速繁殖. 它们发酵为乳糖, 产生了乳酸, 使牛乳中的 pH 值降低, 并引起蛋白质凝结成乳酪状. 较低的 pH 值最终抑制了乳链球菌的繁殖, 但被较能耐低 pH 值发酵乳糖的菌种乳杆菌(*lactobacillus*) 所代替, 完成乳糖发酵, 并使 pH 值继续下降. 接着是酵母菌在这种低 pH 值条件下利用乳酸而进行生长. 随着乳糖和乳酸的逐渐的消失, pH 值再度升高, 假单胞菌(*pseudomonas*) 和芽孢杆菌(*bacillus*) 能产生蛋白酶, 开始分解凝结了的牛奶蛋白质^[6], 当蛋白质利用完毕, 牛奶分解也就完成, 在这一阶段牛奶中产生大量的对人体有危害的细菌. 乳链球菌和乳酸杆菌大量繁殖的阶段称为发酵产酸阶段, 并把这两种菌统一作为乳酸菌考虑. 假设不考虑外界因素的污染对原料奶所产生的细菌繁殖的影响, 乳糖、乳酸菌和酵母菌在系统中相互作用符合种群动力学行为, 它们的关系如图 1 所示. 图中 s 代表乳糖, x 代表乳酸菌, y 代表酵母菌.

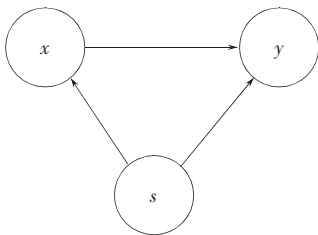


图 1 乳酸菌、酵母菌和乳糖相互作用关系

于是通过种群动力学分析方法^[4] 可得到数学模型表示如下

$$\left. \begin{aligned} \frac{ds(t)}{dt} &= -\frac{\mu_1(s)}{\delta_1}x - \frac{\mu_2(s)}{\delta_2}y - d_0s \\ \frac{dx(t)}{dt} &= x(\mu_1(s) - d_1 - \alpha_1x) - \varphi(x, y) + \psi_1(c, x) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= y(\mu_2(s) - d_2 - \alpha_2y) + k\varphi(x, y) + \psi_2(c, y) \\ s(0) &> 0, x(0) > 0, y(0) > 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中: $s(t)$ 为 t 时刻营养物质乳糖的浓度; $x(t)$ 为 t 时刻乳酸菌种群的浓度; $y(t)$ 为 t 时刻酵母菌种群的浓度; $\mu_1(s)$ 为乳酸菌的增长速率; $\mu_2(s)$ 为酵母菌的增长速率; δ_1^{-1} 为乳酸菌对乳糖的消耗率; δ_2^{-1} 为酵母菌对乳糖的消耗率; d_0 为营养物质乳糖被其他菌种利用的损失率; d_1 为乳酸菌的死亡率; d_2 为酵母菌的死亡率; $\varphi(x, y)$ 为酵母菌对乳酸菌的影响函数; k 为酵母菌消化系数, 即酵母菌对乳酸菌的影响系数; α_1 为乳酸菌对自身生长的限制系数; α_2 为酵母菌对自身生长的限制系数; $\psi_1(c, x)$ 为温度 c 对乳酸菌的影响函数; $\psi_2(c, y)$ 为温度 c 对酵母菌的影响函数; $\delta_1, \delta_2, d_0, d_1, d_2$ 均为大于零的常数; $s(0), x(0), y(0)$ 为初始值, 分别记为 s_0, x_0, y_0 .

在由乳糖、乳酸菌和酵母菌构成的系统中, 营养物质乳糖越丰富, 乳酸菌和酵母菌的增长越快, 于是可以把乳酸菌的相对增长速率 $\mu_1(s)$ 以及酵母菌的相对增长速率 $\mu_2(s)$ 看作是乳糖的增函数. 不妨取为 Monod 增长函数, 即

$$\mu_1(s) = \frac{m_1s}{s + l_1} \quad (2)$$

其中: m_1 为乳酸菌最大生长速率; l_1 为常数, 且 $m_1 > 0, l_1 > 0$.

$$\mu_2(s) = \frac{m_2s}{s + l_2} \quad (3)$$

其中: m_2 为酵母菌最大生长速率; l_2 为常数, 且 $m_2 > 0, l_2 > 0$.

同时在这个系统中, 开始由于乳酸菌的抑制酵母菌生长, 所以酵母菌开始繁殖缓慢, 之后乳酸菌活力下降酵母菌开始大量繁殖, 且乳酸菌和酵母菌都是简单的细菌, 不妨取酵母菌对乳酸菌的影响函数 $\varphi(x, y)$ 为

$$\varphi(x, y) = pxy \quad (4)$$

其中 p 为比例系数, 且 $p > 0$.

生牛奶在 $4 \sim 6^\circ\text{C}$ 下贮存 24 h, 生牛奶中细菌数基本不变^[7]. 贮存温度超过 20°C , 生牛奶贮存时间超过 4 h 的牛奶抑菌期后细菌总数增长迅速如表 1 所示^[8], 对应的细菌平均数散点图如图 2 所示. 由于乳酸菌是原核细菌, 因此乳酸菌也是细菌的一种, 其变化特征也符合细菌随温度变化规律, 由细菌的变化情况就可以看出乳酸菌的变化情况. 生牛奶中的微生物包括细菌、真菌和酵母菌. 在低于水的冰点或者高于 47°C 的温度下, 酵母菌一般不生长, 最适合生长温度大多数在 $20 \sim 30^\circ\text{C}$, 少数种类可能 $45 \sim 47^\circ\text{C}$ 高温^[9], 因此酵母菌在 $10 \sim 30^\circ\text{C}$ 之间随着温

度的升高也是快速增长的,在 $10 \sim 30^\circ\text{C}$ 之间酵母菌的增长方式类似细菌(见图2),即取温度对乳酸菌、酵母菌影响函数分别为 $\psi_1(c, x)$ 、 $\psi_2(c, y)$ 为如下函数形式

$$\begin{aligned}\psi_1(c, x) &= \phi_1(c) x \\ \psi_2(c, y) &= \phi_2(c) y\end{aligned}\quad (5)$$

其中: $\phi_1(c)$ 、 $\phi_2(c)$ 是随温度变化 c 的对乳酸菌和酵母菌数量增长影响系数,可设为 c 的连续函数.

表1 不同温度下保温6h对生牛奶细菌总数的影响

温度/ $^\circ\text{C}$	细菌总数 $\times 10^3$ 个/mL				
	牧场1	牧场2	牧场3	牧场4	平均数
4	100	11	6	12	32.25
10	248	20	10	20	74.5
15	367.04	36.4	16.7	33.4	113.385
20	480	48	30	50	152
25	1 152	104.64	150	208.5	403.785
30	7 200	140	154	360	1 963.5

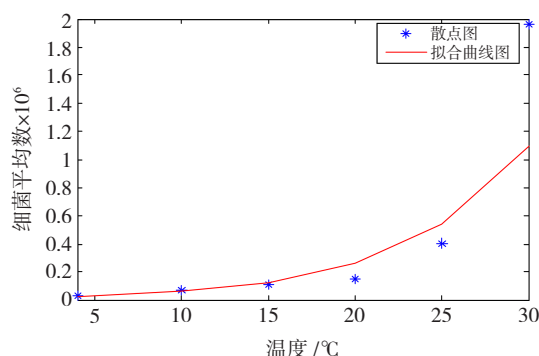


图2 不同温度下保温6h生牛奶细菌总数变化

经上述分析,得到了各变量的形式,把式(2)~(5)代入模型(1)中,得到如下的形式

$$J(E) = \begin{bmatrix} -\frac{m_1 x l_1}{(s+l_1)^2} - \frac{m_2 y l_2}{(s+l_2)^2} - d_0 & -\frac{m_1 s}{\delta_1(s+l_2)} & -\frac{m_2 s}{\delta_2(s+l_2)} \\ \frac{m_1 x l_1}{(s+l_1)^2} & \frac{m_1 s}{s+l_1} - d_1 - py - 2\alpha_1 x + \phi_1(c) & -px \\ \frac{m_2 y l_2}{(s+l_2)} & kpy & \frac{m_2 s}{s+l_2} - d_2 + kpx - 2\alpha_2 y + \phi_2(c) \end{bmatrix} \quad (9)$$

定理2 模型(6)满足条件 (H_1) 、 (H_2) 时, $E_0(0, 0, 0)$ 是模型(6)的不稳定的平衡点, $E_1(0, x^*, y^*)$ 是局部渐近稳定的平衡点.

证明: 由式(9)可得在平衡点 $E_0(0, 0, 0)$ 处 $J(E_0)$ 行列式 D 及迹 T 分别为

$$\left. \begin{aligned} \frac{ds(t)}{dt} &= -\frac{m_1 s(t)}{\delta_1(s(t)+l_1)} x(t) - \frac{m_2 s(t)}{\delta_2(s(t)+l_2)} y(t) - d_0 s \\ \frac{dx(t)}{dt} &= x \left(\frac{m_1 s(t)}{s(t)+l_1} - d_1 - py - \alpha_1 x + \phi_1(c) \right) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= y \left(\frac{m_2 s(t)}{s(t)+l_2} - d_2 + kpx - \alpha_2 y + \phi_2(c) \right) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$s(0) > 0, x(0) > 0, y(0) > 0$

由生态意义只在区域 $\Omega = \{ (s, x, y) : s \geq 0, x \geq 0, y \geq 0 \}$ 中研究模型(6).

2 模型的稳定性分析

模型(6)的平衡点,满足下列方程组

$$\left. \begin{aligned} s \left(-\frac{m_1}{\delta_1(s+l_1)} x - \frac{m_2}{\delta_2(s+l_2)} y - d_0 \right) &= 0 \\ x \left(\frac{m_1 s}{s+l_1} - d_1 - py - \alpha_1 x + \phi_1(c) \right) &= 0 \\ y \left(\frac{m_2 s}{s+l_2} - d_2 + kpx - \alpha_2 y + \phi_2(c) \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

由式(7)易求得模型(6)的平衡点 $E_0(0, 0, 0)$ 、 $E_1(0, x^*, y^*)$. 其中

$$\left. \begin{aligned} x^* &= \frac{\alpha_2(\phi_1(c) - d_1) - p(\phi_2(c) - d_2)}{kp^2 + \alpha_1 \alpha_2} \\ y^* &= \frac{kp(\phi_1(c) - d_1) + \alpha_1(\phi_2(c) - d_2)}{kp^2 + \alpha_1 \alpha_2} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

定理1 若模型(6)满足

$(H_1): \phi_1(c) > d_1, \phi_2(c) > d_2$

$(H_2): \alpha_2(\phi_1(c) - d_1) > p(\phi_2(c) - d_2)$

则模型(6)有两个非负平衡点 $E_0(0, 0, 0)$ 、 $E_1(0, x^*, y^*)$.

模型(6)对应 Jacobian 矩阵为

$$D = -d_0(-d_1 + \phi_1(c))(-d_2 + \phi_2(c))$$

$$T = \phi_1(c) + \phi_2(c) - d_0 - d_1 - d_2$$

若模型满足条件 (H_1) 、 (H_2) 时, $D < 0$ 且 $T > 0$,

所以 $E_0(0, 0, 0)$ 是不稳定的.

再由式(9)可得在平衡点 (E_1) 处的模型(6)所

对应的特征方程为

其中:

$$\lambda^3 + b_1 \lambda^2 + b_2 \lambda + b_3 = 0$$

$$b_1 = \frac{m_1}{\delta_1 l_1} x^* + \frac{m_2}{\delta_2 l_2} y^* + d_0 + d_1 + p y^* + 2\alpha_1 x^* - \phi_1(c) + d_2 - k p x^* + 2\alpha_2 y^* - \phi_2(c) =$$

$$\frac{m_1}{\delta_1 l_1} \frac{\alpha_2(\phi_1(c) - d_1) - p(\phi_2(c) - d_2)}{k p^2 + \alpha_1 \alpha_2} + \frac{m_2}{\delta_2 l_2} \frac{k p(\phi_1(c) - d_1) + \alpha_1(\phi_2(c) - d_2)}{k p^2 + \alpha_1 \alpha_2} +$$

$$\frac{\alpha_1(\alpha_2(\phi_1(c) - d_1) - p(\phi_2(c) - d_2)) + k p \alpha_2(\phi_1(c) - d_1) + \alpha_1 \alpha_2(\phi_2(c) - d_2) + d_0 k p^2 + d_0 \alpha_1 \alpha_2}{k p^2 + \alpha_1 \alpha_2}$$

$$b_2 = (-d_1 - p y^* - 2\alpha_1 x^* + \phi_1(c))(-d_2 + k p x^* - 2\alpha_2 y^* + \phi_2(c)) + k p^2 x^* y^* + (-d_1 - p y^* - 2\alpha_1 x^* + \phi_1(c)) \left(-\frac{m_1}{\delta_1 l_1} x^* - \frac{m_2}{\delta_2 l_2} y^* - d_0 \right) + (-d_2 + k p x^* - 2\alpha_2 y^* + \phi_2(c)) \left(-\frac{m_1}{\delta_1 l_1} x^* - \frac{m_2}{\delta_2 l_2} y^* - d_0 \right)$$

$$b_3 = \left(\frac{m_1}{\delta_1 l_1} x^* + \frac{m_2}{\delta_2 l_2} y^* + d_0 \right) (-d_1 - p y^* - 2\alpha_1 x^* + \phi_1(c)) (-d_2 + k p x^* - 2\alpha_2 y^* + \phi_2(c)) +$$

$$\left(\frac{m_1}{\delta_1 l_1} x^* + \frac{m_2}{\delta_2 l_2} y^* + d_0 \right) k p^2 x^* y^* = \left(\frac{m_1}{\delta_1 l_1} \frac{\alpha_2(\phi_1(c) - d_1) - p(\phi_2(c) - d_2)}{k p^2 + \alpha_1 \alpha_2} + \right.$$

$$\left. \frac{m_2}{\delta_2 l_2} \frac{k p(\phi_1(c) - d_1) + \alpha_1(\phi_2(c) - d_2)}{k p^2 + \alpha_1 \alpha_2} + d_0 \right) \left(\frac{\alpha_2(\phi_1(c) - d_1) - p(\phi_2(c) - d_2)}{k p^2 + \alpha_1 \alpha_2} \right) \times$$

$$\left(\frac{k p(\phi_1(c) - d_1) + \alpha_1(\phi_2(c) - d_2)}{k p^2 + \alpha_1 \alpha_2} \right) (\alpha_1 \alpha_2 + k p^2)$$

$$b_1 b_2 - b_3 = -2 \left(-\frac{m_1}{\delta_1 l_1} x^* - \frac{m_2}{\delta_2 l_2} y^* - d_0 \right) (-d_1 - p y^* - 2\alpha_1 x^* + \phi_1(c)) (-d_2 + k p x^* - 2\alpha_2 y^* + \phi_2(c)) -$$

$$\left(-\frac{m_1}{\delta_1 l_1} x^* - \frac{m_2}{\delta_2 l_2} y^* - d_0 \right)^2 (-d_1 - p y^* - 2\alpha_1 x^* + \phi_1(c)) - \left(-\frac{m_1}{\delta_1 l_1} x^* - \frac{m_2}{\delta_2 l_2} y^* - d_0 \right)^2 (-d_2 +$$

$$k p x^* - 2\alpha_2 y^* + \phi_2(c)) - (-d_1 - p y^* - 2\alpha_1 x^* + \phi_1(c))^2 \left(-\frac{m_1}{\delta_1 l_1} x^* - \frac{m_2}{\delta_2 l_2} y^* - d_0 \right) - (-d_1 -$$

$$p y^* - 2\alpha_1 x^* + \phi_1(c))^2 (-d_2 + k p x^* - 2\alpha_2 y^* + \phi_2(c)) - (-d_2 + k p x^* - 2\alpha_2 y^* + \phi_2(c))^2 \left(-\frac{m_1}{\delta_1 l_1} x^* - \frac{m_2}{\delta_2 l_2} y^* - d_0 \right) - (-d_2 + k p x^* - 2\alpha_2 y^* + \phi_2(c))^2 (-d_1 - p y^* - 2\alpha_1 x^* + \phi_1(c)) - k p^2 x^* y^* [(-d_1 - p y^* - 2\alpha_1 x^* + \phi_1(c)) + (-d_2 + k p x^* - 2\alpha_2 y^* + \phi_2(c))]$$

由条件 (H₁), (H₂) 知 $b_1 > 0, b_3 > 0$, 得到

$$\left(\frac{m_1}{\delta_1 l_1} x^* + \frac{m_2}{\delta_2 l_2} y^* + d_0 \right) = \left(\frac{m_1}{\delta_1 l_1} \frac{\alpha_2(\phi_1(c) - d_1) - p(\phi_2(c) - d_2)}{k p^2 + \alpha_1 \alpha_2} + \frac{m_2}{\delta_2 l_2} \frac{k p(\phi_1(c) - d_1) + \alpha_1(\phi_2(c) - d_2)}{k p^2 + \alpha_1 \alpha_2} + d_0 \right) > 0$$

$$(-d_1 - p y^* - 2\alpha_1 x^* + \phi_1(c)) = -\alpha_1 \left(\frac{\alpha_2(\phi_1(c) - d_1) - p(\phi_2(c) - d_2)}{k p^2 + \alpha_1 \alpha_2} \right) < 0$$

$$(-d_2 + k p x^* - 2\alpha_2 y^* + \phi_2(c)) = -\alpha_2 \left(\frac{k p(\phi_1(c) - d_1) + \alpha_1(\phi_2(c) - d_2)}{k p^2 + \alpha_1 \alpha_2} \right) < 0$$

从而可以判断出 $b_1 b_2 - b_3 > 0$, 因此由 Hurwitz

$$m \leq x \leq M, m \leq y \leq M \quad (10)$$

判别法^[8] 得出平衡点 E_1 是局部渐近稳定的. 证毕.

由于所研究的系统可视为一次性细菌培养机理模式, 从而随着乳酸菌 $x(t)$ 和酵母菌 $y(t)$ 的繁殖营养液乳糖 $s(t)$ 将逐渐减少的, 最终趋于零.

定理 3 若模型 (6) 满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = 0$, (H₁) 及

$$(H_3): \phi_1(c) - d_1 - pM > 0,$$

则存在正常数 $m > 0$, 存在 $T > 0$, 当 $t \geq T$ 时, 有

$$\text{其中 } M = \max \left\{ \frac{\frac{m_1 s_0}{s_0 + l_1} - d_1 + \phi_1(c)}{\alpha_1}, \frac{\frac{m_2 s_0}{s_0 + l_2} + \phi_2(c) - d_2}{\alpha_2} + \frac{k p \left(\phi_1(c) - d_1 + \frac{m_1 s_0}{s_0 + l_1} \right)}{\alpha_1 \alpha_2} \right\}$$

证明: 由模型(6)的第2个方程,有

$$\dot{x}(t) \leq x(t) \left(\frac{m_1 s_0}{s_0 + l_1} - d_1 + \phi_1(c) - \alpha_1 x \right)$$

由比较原理及(H₁)可得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq \frac{\frac{m_1 s_0}{s_0 + l_1} - d_1 + \phi_1(c)}{\alpha_1} \quad (11)$$

由模型(6)的第3个方程有

$$\dot{y}(t) \leq y(t) \left(\frac{m_2 s_0}{s_0 + l_2} - d_2 + kp \frac{\frac{m_1 s_0}{s_0 + l_1} - d_1 + \phi_1(c)}{\alpha_1} - \alpha_2 y + \phi_2(c) \right) \quad (12)$$

由比较原理及(H₁), 可得到

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} y(t) \leq \frac{\frac{m_2 s_0}{s_0 + l_2} + \phi_2(c) - d_2}{\alpha_2} + \frac{kp \left(\phi_1(c) - d_1 + \frac{m_1 s_0}{s_0 + l_1} \right)}{\alpha_1 \alpha_2}$$

取

$$M = \max \left\{ \frac{\frac{m_1 s_0}{s_0 + l_1} - d_1 + \phi_1(c)}{\alpha_1}, \frac{\frac{m_2 s_0}{s_0 + l_2} + \phi_2(c) - d_2}{\alpha_2} + \frac{kp \left(\phi_1(c) - d_1 + \frac{m_1 s_0}{s_0 + l_1} \right)}{\alpha_1 \alpha_2} \right\} \quad (13)$$

由式(11)、(12)可知, 存在 $T_1 > 0$, 当 $t \geq T_1$ 时, 有 $x(t) \leq M, y(t) \leq M$.

再由模型(6)第2个方程和 $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{s}(t) = 0$ 知, 有

$$\dot{x}(t) \geq x(t) (-d_1 - pM - \alpha_1 x + \phi_1(c)) \quad (14)$$

由比较原理及(H₁)、(H₃)可得

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} x(t) \geq \frac{1}{\alpha_1} (\phi_1(c) - d_1 - pM)$$

再由模型(6)第3个方程和 $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{s}(t) = 0$ 知

$$\dot{y}(t) \geq y(t) \left(-d_2 + kp \frac{1}{\alpha_1} (\phi_1(c) - d_1 - pM) - \alpha_2 y + \phi_2(c) \right) \quad (15)$$

则由比较原理及(H₁)、(H₃)有

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} y(t) \geq \frac{1}{\alpha_2 \alpha_1} (kp (\phi_1(c) - d_1 - pM) + \alpha_1 (\phi_2(c) - d_2))$$

取 $m = \min \left(\frac{1}{\alpha_1} (\phi_1(c) - d_1 - pM), \frac{1}{\alpha_2 \alpha_1} (kp (\phi_1(c) - d_1 - pM) + \alpha_1 (\phi_2(c) - d_2)) \right)$

$$d_1 - pM) + \alpha_1 (\phi_2(c) - d_2))$$

由式(14)、(15)可知, 存在 $T_2 > 0$, 当 $t \geq T_2$ 时有 $x(t) \geq m, y(t) \geq m$.

取 $T = \max(T_1, T_2)$, 当 $t \geq T$ 时, 有式(10)成立^[8]. 证毕.

3 数值模拟

选取参数 $k = 0.85, p = 0.015, \alpha_1 = 0.02, \alpha_2 = 0.12, \phi_1(c) = 9, \phi_1(c) = 9, \phi_2(c) = 5, s_1 = 5, x_0 = y_0 = 1, \delta_1 = \delta_2 = 200, m_1 = 0.8, m_2 = 0.08, d_0 = 0.1, d_1 = d_1 = 0.15, l_1 = l_2 = 1$, 由模型(6)可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{ds(t)}{dt} &= \frac{0.8s(t)}{200(s(t)+1)}x(t) - \frac{0.08s(t)}{200(s(t)+1)}y(t) - 0.1s \\ \frac{dx(t)}{dt} &= x(t) \left(\frac{0.8s(t)}{s(t)+1} - 0.15 - 0.015y - 0.02x + 9 \right) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= y(t) \left(\frac{0.08s(t)}{s(t)+1} - 0.15 + 0.85 \times 0.015x - 0.12y + 5 \right) \\ s(0) &> 0, x(0) > 0, y(0) > 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

可计算出 $E_1(0, x^*, y^*) = (0, 381, 80.7)$, 易知式(16)满足定理2和定理3, 取初值为 $s_0 = 5, x_0 = y_0 = 1$, 利用 MATLAB 软件对模型(16)进行数值模拟, 得到的模型局部稳定性和有界性数值模拟结果如图3所示. 从图4更能明显看出牛奶的状态稳定在所计算出的平衡点 $E_1(0, x^*, y^*) = (0, 381, 80.7)$ 附近. 因此得到按以上定理给出的条件对贮存的牛奶进行控制, 可以使牛奶保持在稳定的状态, 进而达到延长牛奶的保质期.

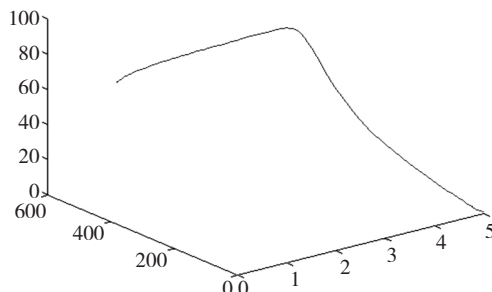


图3 平衡点变化的三维图

4 牛奶变质的临界条件的确定

根据发达国家的调查, 一般鲜牛奶中不可避免

的细菌是 $10^2 \sim 10^3$ 个/mL^[8], 对鲜奶的质量影响较小, 若当细菌总数达到 $10^6 \sim 10^7$ 个/mL 或更高时, 鲜奶出现令人觉察或检出的缺陷, 并导致牛奶及其制品腐败变质^[9]. 当细菌的总数为 1.2×10^6 个/mL 时, 奶稍粘稠, 有少许凝块, 已接近腐败^[9]. 又根据表 1 及图 2 的相关信息可知, 温度的升高有助于细菌繁殖, 加速了原料奶变质进程. 控制温度是保证牛奶质量的重要方法之一.

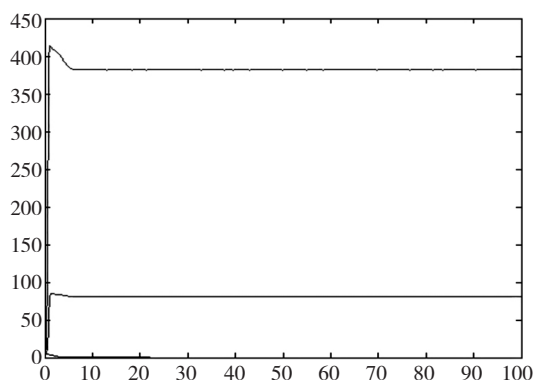


图4 平衡点变化的二维图

由定理 2 和定理 3 知, 牛奶中乳酸菌和酵母菌的数量最终变化控制均在范围 $[n, M]$ 内. 为了确保牛奶的质量至少要求牛奶菌群数量不能超过使其变质的数量上限 1.2×10^6 个/mL. 由于只考虑乳酸菌和酵母菌相互作用对原料奶质量的影响, 因此把这两种菌的数量近似的取为原料奶中的细菌总量. 而由式(8)可知 $x^* = f(c)$, $y^* = g(c)$ 是关于温度 c 的非线性函数, 并随温度 c 上升 x^* 、 y^* 的数量均不断增长. 又根据图 2 细菌的散点图变化趋势及统计分析, 可得出细菌随温度增长符合指数函数^[10], 设 Z 是乳酸菌和酵母菌总数量, 可有

$$Z = ae^{bc} \quad (17)$$

其中 a, b 是正常数.

由表 1 的细菌平均数数据及曲线拟合的方法, 可得

$$Z = 14878.21046e^{0.14348863c} \quad (18)$$

其相关指数 $R^2 = 0.724831279$. 将牛奶变质的

上限 1.2×10^6 个/mL 代入式(18), 得到牛奶变质的临界温度 $c^* \approx 30.596$.

从表 1 可以看出牛奶中细菌在 30°C 时的增长倍数已经很大^[8], 从而影响牛奶的质量, 所以拟合的临界温度是合理的. 从图 2 的拟合曲线可以看出拟合结果所产生的误差是因为本文模型假设不考虑外界因素的污染对原料奶细菌繁殖的影响, 从而导致拟合的效果不是很理想, 但也能反映细菌繁殖的变化规律. 为了保证牛奶质量, 应严格控制牛奶的贮存温度及外界环境的卫生情况, 达到延长牛奶的保质期.

5 结 语

本文不仅对文 [8] 进行了改进和推广, 同时利用在统计分析方法给出了牛奶变质的临界温度, 为控制贮存原料奶的温度提供一个可参考的理论依据.

参 考 文 献:

- [1] 夏全, 缪爱龙, 章燕. 牛奶变质过程的观察 [J]. 江苏卫生保健, 2007, 9(3): 22-23.
- [2] 陈燕飞. 牛奶中细菌生态演变及其保鲜与加工 [J]. 加工工艺, 2006, 6(4): 18-20.
- [3] 郭秀微. 原料奶中细菌增殖情况及检测问题的研究 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨理工大学: 应用科学学院, 2009: 27-31.
- [4] 陈兰荪. 生物动力学 [M]. 北京: 科学出版社, 2009: 252-353.
- [5] 马知恩, 周义仓. 常微分方程定性理论与稳定性方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2001: 51-71.
- [6] 蒙名燕, 阮征, 李汴生. 不同贮存条件对生牛奶品质影响的研究 [J]. 中国乳品工业, 2005, 33(12): 49-51.
- [7] 孙万儒. 酵母菌 [J]. 生物学通报, 2007, 42(11): 5-10.
- [8] 史春光, 董平, 王环宇. 生鲜牛乳细菌增长情况及因素分析 [J]. 中国乳品工业, 2000, 28(1): 32-35.
- [9] 徐艳辉, 张雷. 鲜牛奶中的微生物检测及其对保质期的影响 [J]. 食品研究与开发, 2001(22): 17-18.
- [10] 齐欢. 数学模型方法 [M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 2000: 206-216.

(编辑: 温泽宇)