

非线性元件次谐波运动的等效线性化

西北工业大学 陈松淇 徐建康

摘 要

本文提出一个利用谐波平衡原理将非线性元件的作用力线性化的方法。非线性元件装于多自由度系统, 系统非线性元件处的运动含有与作用于系统的外谐波和力非同步的分量。文中给出等效线性力参数的表达式, 它们可通过一定的迭代步骤算出。文中以装有非同心的挤压油膜阻尼器的不平衡刚性转子的次谐波响应为例, 比较了用本文的方法与用Runge-Kutta法所得的计算结果。

非同步共振是非线性系统产生的重要现象之一。特别, 次谐波共振在一些实际的机械系统中常有发生, 例如, 装有挤压油膜阻尼器的转子系统在小阻尼情形就存在稳态的次谐波共振^[1]。对于旋转机械, 次谐波共振将使转轴作非协调进动, 从而使转轴承受疲劳应力。所以, 在设计阶段必须予以预测和控制。由于非线性元件作用于系统的非线性力可能十分复杂, 系统的稳态次谐波共振一般要通过对系统的微分方程的瞬态积分来求得。显然, 这对于多自由度系统是很麻烦的。本文提出一个等效线性化方法, 可以近似地但比较简捷地求得系统的稳态非同步共振。本文的方法包括了文献^[2]的方法。文献^[2]的方法只限于求同步共振的首次近似。

一、理 论

设含有非线性元件的多自由度系统非线性元件处作平面运动, 于是非线性元件作用于系统的力可用函数 $f(y, z, \dot{y}, \dot{z})$ 来表示。其中 y 与 z 是非线性力的作用点的绝对坐标, “.”表示对时间 τ 的导数。

设非线性力作用点的稳态运动为

$$Y = A_{10} + \sum_j \left(A_{1j} \cos \frac{j}{N} \lambda \tau - B_{1j} \sin \frac{j}{N} \lambda \tau \right) \quad (1)$$

$$Z = A_{20} + \sum_j \left(A_{2j} \cos \frac{j}{N} \lambda \tau - B_{2j} \sin \frac{j}{N} \lambda \tau \right)$$

其中 λ 与各谐波系数 A_{10} , A_{1j} , B_{1j} ($i=1, 2; j=1, 2, \dots$) 都是常数, λ 是外谐波和力的频率, N 是某个不大的正整数。式(1)中, 对应于 $j=N$ 的项代表与外力同步的运动分量, 而对应于 $j \neq N$ 的项代表与外力不同步的运动分量。

当 $N > 1$ 且 $j=1, 2, \dots$, 式(1)表示基频为 λ/N 的 $1/N$ 阶次谐波共振。当 $N=1$ 且 $j=1, 2, \dots$, 式(1)表示基频为 λ 的谐和共振 (含有高阶谐波分量)。当 $N > 1$ 且 $j=p, p+1, \dots$, 而 p 与 N 是互质整数, 则式(1)表示基频为 $p\lambda/N$ 的 p/N 阶超次谐波共振。

对于形式如式 (1) 的运动, 非线性力沿 y 与 z 的分量可线性化为

$$f_y \equiv f_1 = -f_{10} - k_1 y - c_1 \dot{y} + \sum_{j \neq N} \left(a_{1j} \cos \frac{j}{N} \lambda \tau - b_{1j} \sin \frac{j}{N} \lambda \tau \right) \quad (2)$$

$$f_z \equiv f_2 = -f_{20} - k_2 z - c_2 \dot{z} + \sum_{j \neq N} \left(a_{2j} \cos \frac{j}{N} \lambda \tau - b_{2j} \sin \frac{j}{N} \lambda \tau \right)$$

其中 f_{i0} ($i=1,2$) 是等效平均力, k_i ($i=1,2$) 是等效线性弹簧系数, c_i ($i=1,2$) 是等效线性阻尼系数, 而 a_{ij} 与 b_{ij} ($i=1,2; j=1,2,\dots, j \neq N$) 是等效外谐和力的幅值。

如果式 (1) 中不含 $j \neq N$ 的项, 即运动是与外谐和力同步的, 则式 (2) 中将不含等效外谐和力。等效外谐和力将保证等效线性系统存在非同步响应分量。

将式 (1) 代入式 (2) 并令 $(1/N)\tau = \bar{\tau}$, 所得等式左端的函数 f_y 与 f_z 是 $\varphi = \lambda \bar{\tau}$ 的周期函数, 周期为 2π 。展为富氏级数, 并令等式两端同阶谐波的系数相等 (谐波平衡原理), 得到

$$\begin{aligned} f_{10} + k_1 A_{10} &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) d\varphi \\ k_1 A_{1N} - \lambda c_1 B_{1N} &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) \cos N\varphi d\varphi \\ k_1 B_{1N} + \lambda c_1 A_{1N} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) \sin N\varphi d\varphi \\ k_1 A_{1j} - \frac{j}{N} \lambda c_1 B_{1j} - a_{1j} &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) \sin j\varphi d\varphi \\ k_1 B_{1j} + \frac{j}{N} \lambda c_1 A_{1j} - b_{1j} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) \cos j\varphi d\varphi \\ i=1,2; j=1,2,\dots, j \neq N \end{aligned} \quad (3)$$

方程 (3) 有解

$$\begin{aligned} k_1 &= -\frac{1}{\pi(A_{1N}^2 + B_{1N}^2)} \left[A_{1N} \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) \cos N\varphi d\varphi - B_{1N} \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) \sin N\varphi d\varphi \right] \\ c_1 &= \frac{1}{\lambda \pi(A_{1N}^2 + B_{1N}^2)} \left[A_{1N} \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) \sin N\varphi d\varphi + B_{1N} \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) \cos N\varphi d\varphi \right] \\ f_{10} &= -k_1 A_{10} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) d\varphi \\ a_{1j} &= k_1 A_{1j} - \frac{j}{N} \lambda c_1 B_{1j} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) \cos j\varphi d\varphi \\ b_{1j} &= k_1 B_{1j} + \frac{j}{N} \lambda c_1 A_{1j} - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) \sin j\varphi d\varphi \\ i=1,2; j=1,2,\dots, j \neq N \end{aligned} \quad (4)$$

可以看到, 等效力参数将由非线性力函数 $f(y, z, \dot{y}, \dot{z})$ 以及非线性力作用点的运动 (式 (1)) 所完全确定。然而运动是未知的, 所以问题还得通过一定的迭代步骤来求解。下面是

一个建议的迭代步骤的流程图(图1)。

其中① 对于给定的频率值 λ , 设定式(1)中的振幅参数值 A_{10}, A_{1j}, B_{1j} ($i=1, 2; j=1, 2, \dots$); ② 根据式(4)算得的等效力参数 $f_{10}, k_1, c_1, a_{1j}, b_{1j}$ ($i=1, 2; j=1, 2, \dots, j \neq N$); ③ 计算线性化系统的动力响应, 得到原非线性阻尼器处的振幅参数值 A_{10}, A_{1j}, B_{1j} ; ④ 如果算得的振幅参数值与原设值之差大于给定的允许误差, 则修正①处的振幅参数值, 重复同样的过程直到轨道收敛。

如果系统有几个非线性元件, 各个元件可以独立地线性化和独立地迭代。元件之间的耦合通过系统的动力特性来实现。

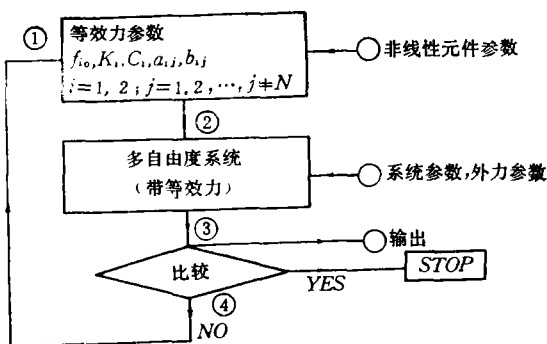
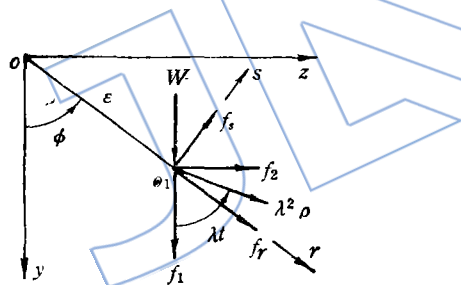


图1 流程图

二、算 例

为了说明方法的应用和精度, 我们考察装有非同心型挤压油膜阻尼器的不平衡刚性转子的稳态次谐波响应。简单起见, 设转子对称地支于两个相同的挤压油膜阻尼器支承。于是轴颈中心的无量纲运动方程可写成(见无量纲图2, 其中 $O_1(y, z)$ 表示轴颈中心的位置)〔4〕

$$\ddot{y} = W + f_1 + \lambda^2 \rho \cos \lambda \tau \quad \ddot{z} = f_2 + \lambda^2 \rho \sin \lambda \tau \quad (5)$$



(a) $B=0.12$ $W=0.20$ $\rho=0.40$ $\lambda=2.60$
(b) $B=0.09$ $W=0.10$ $\rho=0.30$ $\lambda=1.60$

图2 坐标系与力 (——等效线性化法,
.....K-R法)

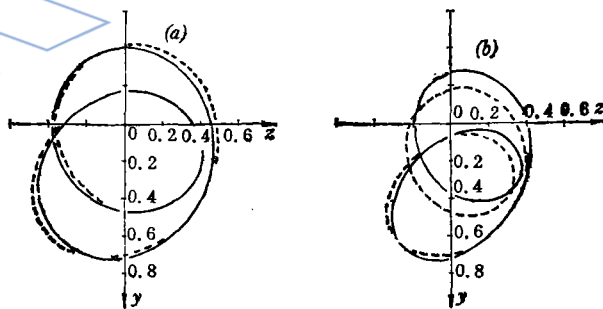


图3 用线性化方法与用Runge-Kutta法算得的轴心无量纲轨道比较
(阻尼器的无量纲间隙圆是单位圆)

其中 y, z 是轴颈中心的无量纲坐标 (相对于阻尼器的间隙无量纲化), W 是作用于转子系统的无量纲静载荷, ρ 是无量纲质量不平衡偏心率, f_1 ($i=1, 2$) 是无量纲挤压油膜力, 它们的表达式见文献〔4〕。

设轴颈中心的稳态轨道运动有式(1)的形式, 则挤压油膜力的分量可以线性化为式(2) (给以确定的 N 和 j), 其中的等效力参数按式(4)计算。于是, 下列有等效线性系统给以确定的 N 和 j 。

$$\ddot{y} + k_1 y + c_1 \dot{y} = W - f_{10} + \lambda^2 \rho \cos \lambda \tau + \sum_{j \neq N} \left(a_{1j} \cos \frac{j}{N} \lambda \tau - b_{1j} \sin \frac{j}{N} \lambda \tau \right) \quad (6)$$

$$\ddot{z} + k_1 z + c_1 \dot{z} = -f_{20} + \lambda^2 \rho \sin \lambda \tau + \sum_{j \neq N} \left(a_{2j} \cos \frac{j}{N} \lambda \tau - b_{2j} \sin \frac{j}{N} \lambda \tau \right)$$

对于给定的转速 λ , 设定式(1)中的一组振幅参数值 A_{10} , A_{1j} , B_{1j} , 然后由式(4)以及 f_1 表达式(4)计算相应的等效力参数 f_{10} , k_1 , c_1 , a_{1j} , b_{1j} , 这样就得到了等效线性系统, 式(6)。由此, 计算阻尼器处的响应, 将它们与原设的振幅参数值比较, 看是否达到了轨道收敛。如果所设的振幅参数值在计算值的给定误差范围之内, 就认为过程收敛, 再给定另一转速, 重复相同的过程。如果不在误差范围之内, 则算得的振幅参数值用来计算修正的等效力参数, 作为计算下一次响应之用。

典型的稳态轨道如图3所示。实线是按本文的等效线性化方法算得的, 虚线则按Runge-Kutta法对非线性微分方程(5)作瞬态积分而得。图3(a)与(b)的实线分别按轴颈中心的运动形式为式(1)、其中 $N=2$, $j=1, 2$ 以及 $N=2$, $j=1, 2, 3$ 算得。每一情形, 实线与虚线都相当符合。但是等效线性化方法可明显节省计算机时。

三、结 论

对于含有非线性元件的多自由度系统, 元件作用于系统的非线性力可以根据元件处确定的稳态运动用谐波平衡法线性化。每个元件的线性化可以独立地进行。系统的稳态响应可以通过一定的迭代步骤求得。

如果稳态响应中非同步谐波分量是主要的, 例如, 具有次谐波响应时, 则等效线性力的分量必须包含两个部分。第一部分是一个平均力, 一个线性弹簧力以及一个线性阻尼力之和。第二部分是一些等效外谐和力的和。这些外谐和力的频率与非线性元件处的非同步运动分量的频率相同。表征上述两部分等效力的参数, 可以通过谐波平衡法由原来的非线性力函数以及非线性元件处的稳态运动完全确定。

等效力中所含的等效外谐和力恰好保证线性化系统像原系统一样存在着非同步响应。

参 考 文 献

1. Nikolajsen, J.L. and Holmes, R., "Investigation of Squeeze-Film Isolators for the Vibration Control of a Flexible Rotor", Journal of Mechanical Engineering Science, Vol.21, No.4, 1979, pp.247-252.
2. 陈松淇, "挤压油膜阻尼器的等效线性化", 西北工业大学学报, Vol.4, No.2, Apr.1986, pp.137-146.
3. Greenhill, L.M. and Nelson, H.D., "Iterative Determination of Squeeze Film Damper Eccentricity for Flexible Rotor Systems", Journal of Mechanical Design, Trans. ASME, Vol. 104, No.2, 1982, pp.334-338.
4. 陈松淇、王国源、贾振波、徐建康, "刚性转子在无定心弹簧的挤压油膜阻尼器支承中的稳态不平衡响应", 西北工业大学学报, Vol.3, No.1, Jan.1985, pp.117-128.

(责任编辑 李其汉)

supersonic cascade flow field with detached shock waves is presented. With the solution of complete Euler flow equations by shock fitting method, a MCA cascade supersonic inlet flow field containing detached waves is computed. The calculated detached shock waves before the cascade and the pressure distribution in the supersonic region are satisfactory. From the calculated results of the flow field, the relation between the Mach number and the unique incidence, which meets the design requirements can also be obtained.

In our investigation, the loss-computational method of the supersonic cascade is also firstly presented, which correlates the computation of supersonic flow field with the wake method of subsonic profile. This method can determine the shock loss and the subsonic profile loss separately. Agreement between the calculated and the measured total loss is quite good.

EQUIVALENT LINEARIZATION OF A NONLINEAR ELEMENT WITH RESPECT TO SUBHARMONIC MOTIONS

Chen Songqi and Xu Jiankang

(Northwestern Polytechnical University)

Abstract

This paper presents a linearization technique for nonlinear force by the method of harmonic balance. The element which produces nonlinear force is incorporated into the multidegree-of-freedom system, the steady-state motions at the element have components that are non-synchronous with the external harmonic force exerted on the system. The equivalent force component is supposed to be composed of two parts. The first part is the sum of an average force, a linear spring force and a linear damping force just as in the case of linearization with respect to harmonic motions. The second part is the sum of the equivalent external harmonic forces having frequencies like those present in the non-synchronous motion components at the element. The unknown parameters that characterize the equivalent force may be expressed analytically by the original nonlinear force and the assumed steady-state motion at the element, and may be evaluated by an iterative procedure. The technique is illustrated and tested for the sub-harmonic whirling of an unbalanced rigid rotor incorporating squeeze-film damper, without centralizing spring. The obtained results agree well with those from the full transient solutions when using the Runge-Kutta method. But if the linearization technique is used, the computation time may be significantly reduced.