

旋板泵过渡曲线的数学模型

西安远东机械制造公司 宋来升

摘 要

为了实现计算机辅助设计和辅助制造双作用式旋板泵定子过渡曲线,本文试提出过渡曲线的一种数学模型,用来取代目前常用的极坐标过渡曲线方程。利用这一数学模型便于分析、比较和评价各种过渡曲线的特性;扩大了过渡曲线的设计范围;有利于编写通用的计算机程序,为进一步实现过渡曲线的最佳设计创造了条件。

一、过渡曲线的数学模型

旋板泵定子过渡曲线是连接半径不同的两段同心圆弧的曲线。过渡曲线决定了旋板端部的运动轨迹,它对旋板泵的运转、性能、故障、噪音、寿命影响极大。因此,正确地设计和选择过渡曲线一直是旋板泵设计的重要环节。目前常用的几种过渡曲线,如阿基米德螺旋线、抛物线、正弦曲线等,都用极坐标方程表示,没有通用的数学模型,不便在统一的基础上进行分析比较,为此有必要寻找表达过渡曲线的通用的数学模型。

1. 通用数学模型和特征函数 为保证旋板泵正常工作,定子过渡曲线必须具备两个最基本的条件(见图1):过渡曲线 $\rho = \rho(\theta)$ 与两段圆弧曲线在转接点A、B连续,即满足 $\rho(\theta_1) = r$, $\rho(\theta_2) = R$;过渡曲线是连续递增函数, $d\rho/d\theta > 0$, $\theta_1 < \theta < \theta_2$ 。

为使过渡曲线的数学模型具有通用性,对用极坐标表示的过渡曲线方程 $\rho = \rho(\theta)$ 的自变量和因变量均作同一线性变换,以实现无量纲表示,且满足过渡曲线的基本条件。即

$\theta \rightarrow (\theta - \theta_1)/(\theta_2 - \theta_1)$, $\rho \rightarrow (\rho - r)/(R - r)$ 并令 $(\theta - \theta_1)/(\theta_2 - \theta_1) = u$ 于是得到了原极坐标下过渡曲线的映射:

$$(\rho - r)/(R - r) = f(u) \quad (1)$$

式(1)就是过渡曲线的通用数学模型, $f(u)$ 可称为过渡曲线的特征函数。

2. 几种常用的过渡曲线的特征函数经过简单数字变换,分别表示如下:

(1) 阿基米德螺旋线

$$f(u) = u \quad (2)$$

(2) 抛物线 a. 等加速段($0 \leq \varphi \leq \alpha/2$)

$$f(u) = 2u^2 \quad (0 \leq u \leq 0.5) \quad (3)$$

b. 等减速段 $\alpha/2 \leq \varphi \leq \alpha$

$$f(u) = -2u^2 + 4u - 1 \quad (0.5 \leq u \leq 1) \quad (4)$$

(3) 正弦曲线

$$f(u) = u - \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi u \quad (5)$$

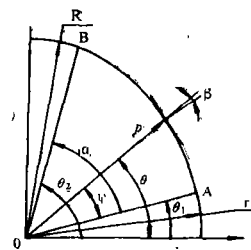


图 1

3. 多项式型特征函数 从理论上讲, 满足过渡曲线基本条件的特征函数 $f(u)$ 存在无穷多个, 其中, 基底为 $(u^0, u^1, u^2, \dots, u^n)$ 所构成的多项式线性空间 $R(u)_{n+1}$ 内, 特征函数的解很具有代表性, 它随边界条件不同, 得到基底的不同的线性组合, 因而得到次数不同的实系数多项式。由于多项式线性空间 $R(u)_{n+1}$ 可以逼近其他线性空间, 所以研究多项式型特征函数不仅可扩大过渡曲线的设计范围, 而且验证了数学模型(1)的通用性。

根据已知的边界条件, 确定多项式解的次数和系数的个数, 建立联立方程组求解, 此解仅为满足已知边界条件的解系中的一个解。

例如 边界条件: $f(0)=0, f(1)=1$, 解得 $f_1(u)=u$

又如 边界条件: $f(0)=0, f(1)=1, f'(0)=0, f'(1)=0$, 解得 $f_3(u)=-2u^3+3u^2$

二、用特征函数表征过渡曲线的性能

特征函数不仅可以表示过渡曲线, 而且还可以表征过渡曲线的性能。

1. 速度特性 $v = d\rho/dt = (R-r)(df(u)/du)(du/d\theta)(d\theta/dt)$

$$v = (R-r)\omega f'(u)/(\theta_2 - \theta_1) \quad (6)$$

2. 加速度特性 $a = dv/dt = (R-r)\omega^2 f''(u)/(\theta_2 - \theta_1)$ (7)

3. 旋板不脱空条件 旋板的离心加速度不小于定子过渡曲线相应点的径向加速度, 即 $\rho - (1/2)\omega^2 - (R-r)\omega^2 f''(u)/(\theta_2 - \theta_1) \geq 0$, l 为旋板长度, 整理有

$$\frac{R}{r} \leq \frac{1 - \frac{1}{2r}}{\frac{f''(u)}{(\theta_2 - \theta_1)^2} - f(u)} + 1 \quad (8)$$

4. 流量均匀性 流量均匀性取决于同时处于过渡曲线上的旋板径向速度之和, 其值为常数, 则流量不脉动。以常用的过渡曲线上有 2 个旋板为例。

$$\text{则有: } \Sigma V = \frac{(R-r)\omega}{\theta_2 - \theta_1} \left[f'(u) + f'\left(u + \frac{1}{2}\right) \right] \quad (9)$$

由式(9)及边界条件可以导出流量不脉动条件。

$$\text{设 } f'(u) + f'\left(u + \frac{1}{2}\right) = c_1, f(u) + f\left(u + \frac{1}{2}\right) = c_1 u + c_2$$

将 $u=0, u=(1/2)$ 分别代入上式, 得 $c_2=(1/2), c_1=2$,

$$f(u) + f(u + (1/2)) = 2u + f(1/2) \quad (10)$$

5. 压力角 (见图 1) 以直旋板为例, 由压力角的正切表示式得:

$$\beta = \arctg \frac{\left(\frac{R}{r} - 1\right) f'(u)}{(\theta_2 - \theta_1) \left[1 + \left(\frac{R}{r} - 1\right) f(u) \right]} \quad (11)$$

由以上计算可以看出, 旋板泵的特性均可以用特征函数及其导数直接表示, 因此使我们能够在无量纲的基础上对过渡曲线的各种性能进行分析比较。图 2~图 5 及是几种过渡曲线的特征函数及其导数和压力角特性曲线。

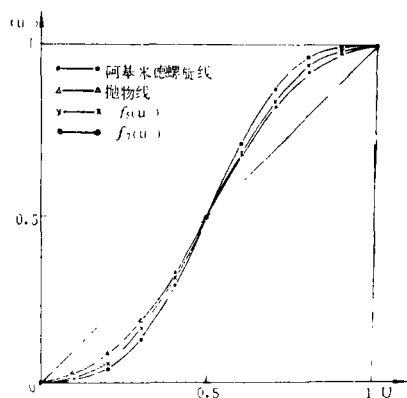


图 2 特征函数曲线

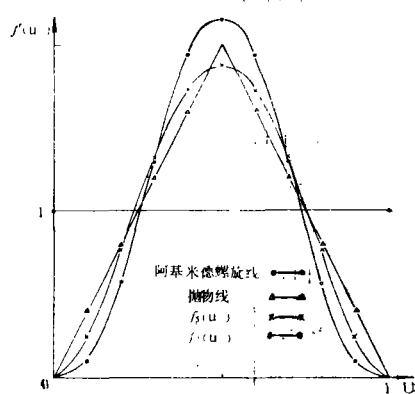


图 3 速度特征

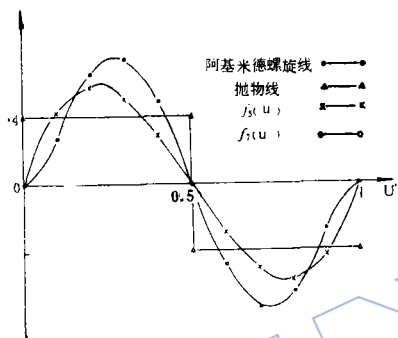


图 4 加速度特征

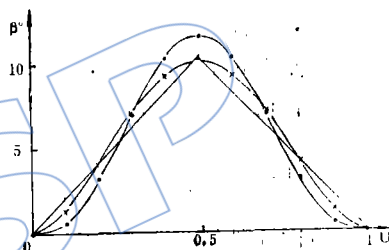


图 5 压力角特征

三、用特征函数评价过渡曲线及分析

1. 用特征函数评价过渡曲线

- (1) 没有硬冲点条件 特征函数的一阶导数连续, 且 $f'(0) = f'(1) = 0$
- (2) 没有软冲点的条件 特征函数的二阶导数连续, 且 $f''(0) = f''(1) = 0$
- (3) 评价过渡曲线径向位移量的变化, 可用定积分: $\int_0^1 |f(u) - u| du$, 其值越小越好, 一般应小于 0.1。
- (4) 因为 $\int_0^1 f'(u) du = 1$, 所以可用 $(f'(u))_{\max}$ 来比较过渡曲线的速度特性。其值越小越好, 一般 $(f'(u))_{\max} < 2$ 。
- (5) 过渡曲线的加速度特性, 可用 $(f''(u))_{\max}$ 评价, 其值越小越好, 一般应小于 6。
- (6) 流量均匀性可用式(13)求出 $((\Sigma V)_{\max} - (\Sigma V)_{\min})/2$ 其值为零最好, 一般应小于 0.1。
- (7) 旋板不脱空条件用公式(12)检查。
- (8) 压力角。可用公式(16)求 $\beta_{\max}$, 其值越小越好。

用以上评价方法计算一些过渡曲线。其结果列于下表。

	$f_1(u)$	$f_2(u)$	正 弦	$f_3(u)$	$f_5(u)$	$f_7(u)$	$f_4(u)$
$\int_0^1 f(u)-u du$	0	1/12	$1/\pi^2$	1/16	1/2	29/256	1/10
$[f'(u)]_{\max}$	1	2	2	1.5	1.875	2.1875	2
$[f''(u)]_{\max}$	0	4	2π	6	5.76	7.51	6
$\int_0^1 f''(u) du$	0	4	4	3	3.75	4.375	4
按旋板数为12, α 为 $\frac{\pi}{3}$ —计算	$\{R/r\}_{\max}$	∞	1.274	1.174	1.183	1.190	1.183
	$([\Sigma V]_{\max}-[\Sigma V]_{\min})/2$	0	0	0	0.375	0.117	0
	$[\beta]_{\max}(R/r \text{取} 1.1)$	5.45°	10.8°	10.8°	8.15°	10.15°	11.79°
“硬”、“软”冲点个数		2 个 硬冲点	3 个 软冲点	无	2 个 “软”冲点	无	无

2. 分析 由表 1 可以看出:

(1) 五次多项式比抛物线、正弦曲线的优点多一些, 我们在研制高速变流量旋板泵中采用了五次多项式特征曲线。

(2) 按公式(14)设计的流量不脉动的四次多项式:

$$f_4(u) = \begin{cases} -8u^4 + 8u^3 & 0 \leq u \leq (1/2) \\ 8u^4 - 24u^3 + 24u^2 - 8u + 1 & (1/2) \leq u \leq 1 \end{cases}$$

其性能与指标都接近正弦曲线。

(3) 七次多项式 $f_7(u)$ 其三阶导数在转接点连续, 从而保证, 这两点力的变化率连续, 因而该点受力状态很好, 但其它性能较差, 仅适于高压低速泵。

(4) 对任何给定的边界条件, 都可以在多项式线性空间 $R(u)_{n+1}$ 中找到其解系, 在解系中哪个解为最佳? 最佳设计的标准是什么? 本文推荐以过渡曲线的弧长最短为最佳。因为此时旋板泵的线速度最小, 相应的磨损、噪音、发热为最小。

A DYNAMICAL MATHEMATICAL MODEL AND DIGITAL SIMULATION FOR ANTI-SURGE CONTROL SYSTEM OF A TURBOFAN ENGINE

He Huizhu

(Northwestern Polytechnical University)

Abstract

An anti-surge control system of a certain turbofan engine is taken as an object, the dynamical mathematical model of this system has been developed and the simulation has been done on a digital computer. In the first step of the simulation the linear system is studied and the dynamical performances are calculated under four conditions, thereby the main influencing parameters of the dynamical performances are obtained. In the second step, the effects of nonlinearities of the dead-region and the backlash on the dynamical performances are studied. The digital simulation results indicate that the effects of two nonlinearities on the performances are opposite. The former enhances the relative stability of the system, but the latter reduces that. Both effects appear not to be in agreement with the superposition principle. Finally, the ways of improving the quality of the system are presented based on the results of the calculations.

A MATHEMATICAL MODEL OF TRANSITION CURVE OF VANE PUMP

Song Laisheng

(Far East Machinery Company)

Abstract

For purpose of the computer-aided design and computer-aided manufacture of the transition curve of the dual-purpose vane pump cam ring, a mathematical model of the transition curve is proposed instead of the commonly-used transition contour equation in polar coordinates. The characteristics of different contours can be analyzed, compared and evaluated by means of the mathematical model. The model is advantageous to compiling a generally applicable computer program and favourable for optimum design of the transition contour.