

多点调力法激励纯模态的新方案研究

南京航空学院 伊立言 张益松

摘 要

本文探讨了作为模态试验方法之一的多点激振技术。针对某些实验仪器存在的相位移问题,提出了一种新的多点激振调力方案,并建议了一种识别纯模态下各模态参数的实用方法。经过计算和实验的考核,说明本文方法对于一般结构进行多点激振试验都是适用的。

一、引 言

多观激振技术是一种有效的模态分析方法^[1]。对于任一具有多自由度的弹性系统,施以单频激励,其强迫振动微分方程可简化为

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\} \sin \omega t \quad (1)$$

式中 $[M]$ 、 $[C]$ 和 $[K]$ 表示质量、阻尼和刚度矩阵, $\{F\}$ 和 $\{x\}$ 分别为激振力和位移响应向量。

如欲激励出只有与第 i 阶振型成正比的单模态振动, F 的分布必须满足如下规律:

$$\{F\} = \omega_i^2 [M]\{X\}_i \sqrt{(1 - \bar{\omega}_i^2)^2 + (2\bar{\omega}_i \xi_i)^2} \quad (2)$$

式中, $\bar{\omega} = \omega/\omega_i$, $\xi_i = C/(2K)$, ω 和 ω_i 分别为激振频率和第 i 阶固有频率, $\{F\}$ 和 $\{x\}$ 分别为激振力幅向量和响应幅值向量。

由于结构中质量刚度阻尼的分布往往是未知的,激振力需边试验边调整才能得到最佳分配,这就需要有判别准则,传统判别纯模态是相位准则,它要求各点位移(或加速度)响应与激振力的相位差为 90° 。工程上常用模态纯度因子(总平均相移)表示^[2]。

$$\sigma = \frac{\sum_{l=1}^n |A_l \cos \phi_l|}{\sum_{l=1}^n |A_l \sin \phi_l|} \quad (3)$$

其中, l 为测量的序号; $A_l (=|x_l(\omega)|)$ 、 ϕ_l 分别为响应的幅值和相位。 $\psi \rightarrow 90^\circ$ ($l=1, 2, \dots, n$) $\sigma \rightarrow 0$ 时,则达到纯模态。应用中往往先给定模态纯度 δ_0 ,则达到纯模态的判据为 $\sigma \leq \delta_0$ 。

用压电晶体片等作为激振元件时,会出现信号相位的移动^[3](畸变)。故激振力的初始相位难以确定,无法利用(3)式判别。况且,常规的振动试验设备都会引起信号相移,高频段更严重。所以建立新的多点调力方案和纯模态判据具有很大的实用价值。

二、幅值响应曲线的等效拟合

根据模态迭加理论,求解方程(1)可得各测点 l 处的位移响应 $X_l(\omega)$ 和相位差 ψ_l 如下

$$X_l(\omega) = H_{lr}/(1 - \bar{\omega}_r^2 + j2\xi_r \bar{\omega}_r) + H_R(\omega) + jH_I(\omega) \quad (4)$$

$$\varphi_l = \tan^{-1} \frac{H_{lr} \cdot 2\xi_r \bar{\omega}_r / ((1 - \bar{\omega}_r^2)^2 + (2\xi_r \bar{\omega}_r)^2) - H_I(\omega)}{H_{lr} \cdot (1 - \bar{\omega}_r^2) / ((1 - \bar{\omega}_r^2)^2 + (2\xi_r \bar{\omega}_r)^2) - H_R(\omega)} \quad (5)$$

式中, H_{1r} 相当于第 r 阶模态下的静态位移, 而 $H_R(\omega)$ 和 $H_I(\omega)$ 分别为其它模态成分总和的实部和虚部。按 (5) 式可作出第 1 测点在固有频率 ω_r 附近的幅频响应曲线, 如图 1 所示。

图中所示曲线为未调成纯模态的情况, 表现为多个模态并存。由 (6) 式可见, 只有当适调力出现单模态时 (即 $H_R(\omega), H_I(\omega) \rightarrow 0$)。

各测点响应才趋于单相 (同相或反相), 即

$$\varphi_1 = \tan^{-1} [2\zeta_r \bar{\omega}_r / (1 - \bar{\omega}_r^2)] \quad (l = 1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

当 $\bar{\omega}_r \rightarrow 1$ 时, $\varphi \rightarrow \pm 90^\circ$, 即此时各测点响应均与力信号正交。所以, 纯模态的适调过程, 就是不断降低各相邻模态的成分, 突出主模态的振动, 达到单一模态。

如图 1 中所示, 在 $\omega^{(1)}$ 至 $\omega^{(2)}$ 的频段内, 响应曲线类似于单自由度情况, 故可按后述方法, 取幅频曲线每三点数据 (激振频率及对应响应幅值), 求出等效的静态响应幅值 H_{1eq} 、固有频率 ω_{eq} , 阻尼比 ζ_{eq} 。据此拟合一条单自由度响应曲线, 称为等效响应曲线, 表达式为

$$X_{1eq} = H_{1eq} / (1 - \bar{\omega}_{eq}^2 + j2\zeta_{eq}\bar{\omega}_{eq}) \quad (7)$$

在未调出单一模态时, 用不同的几组数据 (每组三点) 所拟合的等效响应曲线是不重合的。对于单模态, 各组数据唯一地确定一条响应曲线。由此可见, 如果 r 阶模态在整个响应中所占比重越大, 它越接近单模态振动, 那么各组数据的固有频率和阻尼比方差越小, 各条等效响应曲线也越相似。当调整激振力的分布 (幅值和极性) 使得各组计算值完全一致, 各拟合曲线相互重合, 这时即为单一模态振动。

三、单模态下模态参数的测定

对于多自由度系统或弹性体, 当调整激振力分布得到较纯模态, 整个动力系统就等效于一个单自由度系统, 问题转化为如何识别单模态下的各个模态参数^[4]。文献^[5]提出的测量模态参数方法, 要求精确测出激振力的大小, 应用不方便。为此, 本文推导了另一种计算公式。

设测量所得的响应为加速度信号, 如图 2 所示。对于固有频率 ω_r 附近各点 ω 及对应加速度幅值 $C(\omega)$, 应满足

$$(\omega_r^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta_r \omega \omega_r)^2 = (P_r(\omega) / M_r C(\omega))^2 \quad (8)$$

记 $\lambda_r = \omega_r^2$, $\lambda = \omega^2$, $y_r = (2\zeta_r)^2$, $C = C(\omega)$, (4) 式变为 $(\lambda_r - \lambda)^2 + \lambda_r \lambda y_r = (P_r \lambda / M_r C)^2$

设有三个测点 $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \omega^{(3)}$, 对应幅值为 $C^{(1)}, C^{(2)}, C^{(3)}$, 代入上式, 得

$$\left. \begin{aligned} (\lambda_r - \lambda^{(1)})^2 + \lambda_r \lambda^{(1)} y_r &= (P_r \lambda^{(1)} / M_r C^{(1)})^2 \\ (\lambda_r - \lambda^{(2)})^2 + \lambda_r \lambda^{(2)} y_r &= (P_r \lambda^{(2)} / M_r C^{(2)})^2 \\ (\lambda_r - \lambda^{(3)})^2 + \lambda_r \lambda^{(3)} y_r &= (P_r \lambda^{(3)} / M_r C^{(3)})^2 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

消去 (P_r / M_r) , 并令 $t_{ij} = (\lambda^{(i)} C^{(j)} / \lambda^{(j)} C^{(i)})$, ($i = 3, j = 1, 2$), 解得

$$\lambda_r = \sqrt{\lambda^{(1)} \lambda^{(2)} - \frac{(t_{31} \lambda^{(2)} - t_{32} \lambda^{(1)}) (\lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}) (\lambda^{(3)} - \lambda^{(2)})}{(t_{31} \lambda^{(2)} - t_{32} \lambda^{(1)}) - (t_{31} \lambda^{(3)} - \lambda^{(1)}) + (t_{32} \lambda^{(3)} - \lambda^{(2)})}} \quad (10)$$

$$\omega_r = \sqrt{\lambda_r} \quad (11)$$

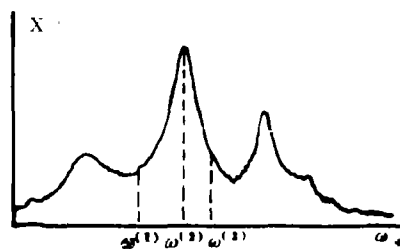


图 1 幅频特性曲线

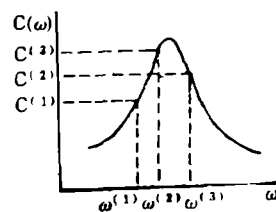


图 2 加速度幅频特性曲线

$$\zeta_r = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{(t_{32} - 1)\lambda_r^2 + t_{32}(\lambda^{(3)})^2 - (\lambda^{(2)})^2}{4\lambda_r(t_{32}\lambda^{(3)} - \lambda^{(2)})}} \quad (12)$$

只要测出某阶共振频率附近任意三个频率点所对应幅值, 即可完全确定 ω_r 和 ζ_r 。

以上公式利用加速度频响曲线推出若要利用位移或速度响应信号, 令 $t_{ij} = (A^{(i)} / A^{(j)})^2$ (对于位移测量) 或 $t_{ij} = (\lambda^{(j)} / \lambda^{(i)}) (B^{(i)} / B^{(j)})^2$ (对于速度测量), 其中 $A^{(i)}$ 和 $B^{(i)}$ 分别表示 $\omega^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$) 处的位移和速度响应幅值。

这里推导出的固有频率是精确值, 计算模态阻尼比的公式也是精确表达式。

四、纯度的新判据和调力过程

多点激振试验中, 不可能也无必要调出绝对的纯模态, 只要达到给定的纯度即可。

由图 1 中在 $\omega^{(1)}$ 和 $\omega^{(2)}$ 之间扫频得 e 组数据(每组三点), 可以相应算得 e 组等效固有频率和等效阻尼比: $(\omega_{eq})_1, (\zeta_{eq})_1, \dots, (\omega_{eq})_e, (\zeta_{eq})_e$ 。它们的均方值为

$$D_{\omega_{eq}} = \sqrt{\omega E_{\omega}^2 - (E\omega_{eq})^2}, \quad D_{\zeta_{eq}} = \sqrt{E\zeta_{eq}^2 - (E\zeta_{eq})^2} \quad (13)$$

式中 D 和 E 分别为均方值和平均值的算子。对于 n 个测点, 可得 n 个均方值 $(D_{\omega_{eq}})_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$)。调制激振力时, 只要使分散度趋于零。定义分散度指标为(14)式, 纯模态判据为(15)式:

$$d_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^M (D_{\omega_{eq}})_i, \quad d_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^M (D_{\zeta_{eq}})_i \quad (14)$$

$$d_1 \leq \varepsilon_1, \quad d_2 \leq \varepsilon_2 \quad (15)$$

其中 ε_1 和 ε_2 为给定的纯度要求, 即在满足(15)式时, 就达到了单一模态。再调整激振频率到固有频率位置, 此时即为纯模态。

激振力的调节过程有多种实施方案^[6], 只是反馈信息改用分散度指标。可根据最优化原理来确定最佳激振力的分布, 较简便的是采用最小二乘法指导调力, 其一般步骤如下:

(1) 先用一个激振器对试件进行频率粗扫, 得各阶模态的大致分布情况。

(2) 初步安排各激振器的位置和力幅, 在希望调纯的模态附近进行微扫, 每个传感器测得几组数据(激振频率和对应响应幅值, 由此求得其分散度 d_1 和 d_2)。

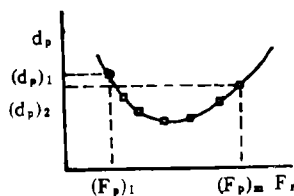


图 3 分散度对于激振力的变化图

(3) 仅变化第 p 个激振力 F_p , 而其他激振力保持不变, 可获得分散度 d_p 。将 F_p 变化 m 次, 求得 m 个分散值: $(d_p)_1, (d_p)_2, \dots, (d_p)_m$, 相应关系如图 3 所示。利用最小二乘法将图中各点拟合成二次曲线, 然后求曲线的极小值, 从而调整 F 至合适的幅值。

(1) 依次调整各激振力 F_p ($p = 1, 2, \dots, m$) 后, 获取最佳力分布。若分散度 d (d_1 和 d_2) 不满足(17)式, 重复第(3)步, 直到给定指标。

在达到最佳激振力分布的同时, 也求出了真实的固有频率和模态阻尼比。然而让激振频率等于固有频率, 就可以在纯模态下测量其余模态参数。

五、纯模态判据的验证试验

为考核调力方案和纯模态判据的有效性, 取如图 4 计算模型进行仿真试验。图中质量:

$m_1 = m_2 = 1$, 阻尼: $C_1 = C_3 = 3.2$, $C_2 = 0.4$; 刚度: $k_1 = k_3 = 12544$, $k_2 = 456$, 按振动理论可求得固有频率 $\omega_1 = 112$, $\omega_2 = 116$, 振型矩阵 $(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\xi_1 = 0.0143$, $\xi_2 = 0.0172$ 。

在 m_1 和 m_2 上分别装有一测量点, 其响应 x_1 和 x_2 为

$$x_{1,2} = [(1 - \bar{\omega}_1^2)H_1 \pm (1 - \bar{\omega}_2^2)H_2] \sin \omega t + [2\xi_1 \bar{\omega}_1 H_1 \pm 2\xi_2 \bar{\omega}_2 H_2] \cos \omega t$$

$$\text{式中 } H_1 = \frac{(F_1 + F_2)/(2\omega_1^2)}{(1 - \bar{\omega}_1^2)^2 + (2\xi_1 \bar{\omega}_1)^2} \quad H_2 = \frac{(F_1 - F_2)/(2\omega_2^2)}{(1 - \bar{\omega}_2^2)^2 + (2\xi_2 \bar{\omega}_2)^2}$$

由 x_1 或 x_2 表示的幅频特性如图 5 所示。曲线 1、2 分别表示两阶纯模态响应, 曲线 3 为其迭加响应幅值。

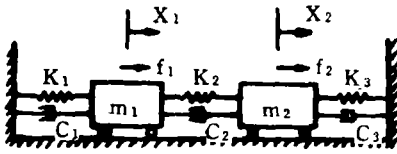


图 4 双质量弹簧系统的振动模式

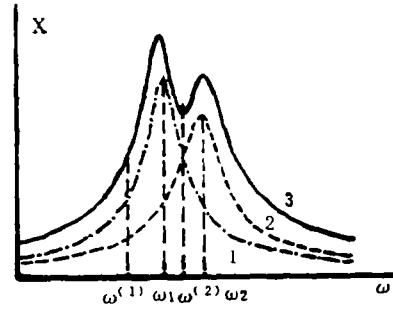


图 5 两自由度系统的测点响应

开始先用单点激励粗扫得类似曲线 1 的幅频特性曲线。为分离出第一阶模态, 对于不同的加力状态 F_1 和 F_2 , 在 $\omega^{(1)}$ 和 $\omega^{(2)}$ 之间扫频得 1 组 (12 个测点) 响应数据。设给定精度 $\varepsilon_1 = 0.03$, $\varepsilon_2 = 0.0003$, 初始加力状态 $F_1 = 10000$, 可按下列步骤改变激振力 F_2 进行适调。

(1) 令 $F_2 = 0$, 由扫频数据按 (14) 式求得 $d_1 = 0.240$, $d_2 = 0.0013$, 拟合的响应曲线如图 6a, 不合精度要求, 应进一步调力。

(2) 取 $F_2 = -5000$ 时, $d_1 = 1.025$, $d_2 = 0.0054$, 如图 6a 示, 显然应改变力的方向。

(3) 取 $F_2 = 5000$ 时, $d_1 = 0.084$, $d_2 = 0.0008$, 比 (1) 状态有所改善, 但精度还不

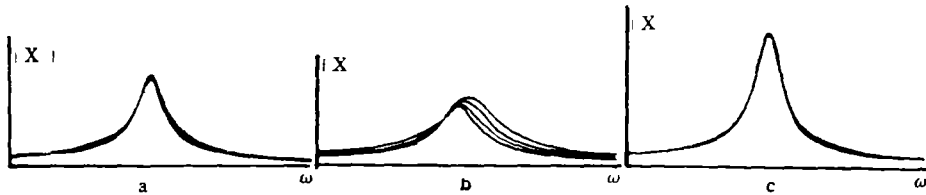


图 6 $F_2 = 0$ 时的响应 $F_2 = -5000$ 时的响应 $F_2 = 8000$ 时的响应

够。

(4) 取 $F_2 = 15000$ 时, $d_1 = 0.050$, $d_2 = 0.0005$, 还需进一步调力。

(5) 取 $F = 8000$ 时, $d_1 = 0.028 \leq \varepsilon_1$, $d_2 = 0.0003 \leq \varepsilon_2$, 满足纯度要求, 拟合得 6c 响应曲线。

当纯度要求高时, 可使最佳力分布为 $F_2/F_1 = 1$ 。本例题因只需改变一个力, 故采用上述步骤便于说明方法的可行性。对于实际问题, 激振力数目较多, 可采用前述最小二乘法进行。

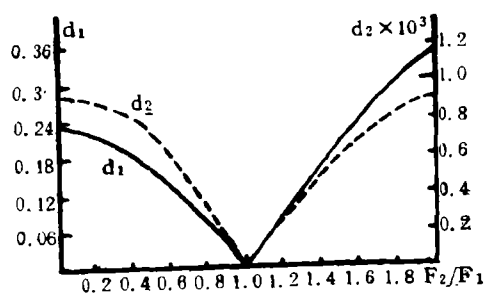


图 7 d_1 和 d_2 对于 (F_2/F_1) 的变化关系

对于多种不同的力分配,求得等效固有频率和阻尼比的分散度 d_1 和 d_2 ,两个测点在激振频率等于等效固有频率时的相角 φ_1 和 φ_2 ,以及总平均相移,均可算出。分散度对应激振力分配的变化曲线如图 7 所示。图中,实线表示 d_1 的变化,虚线为 d_2 。

由图看出,当 $(F_2/F_1) = 1$ 时, $d_1 = d_2 = 0$,达到最佳力分布。这时各组数据所得的等效固有频率和阻尼比一致, $\omega_1 = \omega = 112$, $\xi_1 = \xi = 0.0143$ 。图 7 所示,在激振力分配从两侧逼近

最佳分布时, d_1 和 d_2 均有效地指示了调力方向。

比较不同指标的灵敏度看出,力分配与分散度、相位、总平均相移存在一一对应关系。按照常规的模式纯度要求, $\sigma \leq 10\%$,即认为在 $(F_2/F_1) = 0.5 \sim 1.9$ 时都被认作达到了纯模态,显然误差很大。而在这样大范围内调整力,相位分散度在 5° 以内,人的视觉已无法在李萨如图上区别相位的变化。而用本文新指标,分辨力则足够高,充分显示了本文方法的优越性。

六、结 论

在振动试验中,由于某些仪器会引起信号的相移,不便利用传统调力方案。针对这一问题,本文建议一种行之有效的解决办法,首先定义了等效响应曲线和几个等效参数,提出了利用分散度指标作为判据。只需测取响应幅值信号,通过简单换算,即可指示调力方向并判别模式纯度。

本文方法不仅避免了力信号(大小和相位)测量上困难,还消除了不必要的测量误差,因而提高了试验精度。如在试验中配备计算机,自动发出扫描信号,给出模式纯度指示,和自动调力,则试验的精度和速度会有更大的提高。

参 考 文 献

- [1] Smith, S. and woods, A. A., "A Multiple Drive Admittance Technique for Vibration Testing of Complex structure", The Shock and Vibration Bulletin, 42(1972) 3(5), 15—23.
- [2] 林丽川, "多点激振的模式参数识别法", 中国机械工程学会, 机械设计学会, 机械阻抗与参数识别技术学术论文 1982 年 7 月。
- [3] 张益松、刘敏娟、伊立言, "压电陶瓷片在振动试验中的应用", 《实验力学》, 1987 年, 第 2 期。
- [4] Clough, R. W. and Penzien J., "Dynamics of structure", Mc Graw-Hill Inc., 1975.
- [5] 张善国, "模式参数的一种测试计算方法", 《振动与动态测试》, 1983 年, 第 2 期。
- [6] 黄嘉瑞, "飞机共振试验中最佳激振力的确定", 《航空与航天》, 1984 年, 第 2 期。

ADJUSTMENT OF RATIO OF ROTATION SPEED DIFFERENCE IN A TWIN-SPOOL TURBOJET ENGINE

Wu Zizhong and Shang Yi (*Nanjing Aeronautical Institute*)

Analyzing the concept and the function of the ratio of rotation speed difference in a twin-spool turbojet engine indicates that the ratio has an effect on the surge margins of the high and low pressure compressors and the match between the speed of high pressure compressor and the inlet gas temperature. It is proposed how to adjust the ratio of rotation speed difference reasonably. The results of the adjustments made by us are shown in good agreement with the trial run data. In addition, the effects of the ratio on the thrust, specific fuel consumption, speed of high pressure compressor and turbine inlet gas temperature are also considered.

NEW GASDYNAMICS FUNCTIONS WITH VARIABLE SPECIFIC HEAT TAKING MACH NUMBER AS INDEPENDENT VARIABLE

Peng Ying and Fan Zuomi (*Civil Aviation Institute of China*)

The new gasdynamics functions with variable specific heat proposed in this paper take Mach number as independent variable. The four existing methods, namely the thermodynamics method, two kinds of conventional gasdynamics functions with variable specific heat and another kind of new gasdynamics functions with variable specific heat are compared with the presented method in solving thermo dynamic processes with variable specific heat. It is shown that the proposed new method is the most convenient.

A NEW ADJUSTING SCHEME OF MULTI-POINT EXCITING PURE MDDE

Yi Liyan and Zhang Yison (*Nanjing Aeronautical Institute*)

A new technique of multi-point exciting for modal testing is discussed. In consideration of the trouble of phase shift in some experimental instruments, a new scheme is proposed to assign multi-point exciting forces and a practical method is provided to discern the modal parameters in pure modes. Calculations and experiments demonstrate that the new technique is applicable to the multi-point exciting experiments for general structures.