

结构陶瓷材料断裂强度统计预测模型

北京航空航天大学 杨晓光 熊昌炳

摘 要

根据最弱环理论,应用 Weibull 和 Batdorf 两种断裂强度统计预测模型,对结构陶瓷含体内裂纹情况下的断裂强度进行了统计分析和预测。通过应用三点弯曲试验得到的模型参数,计算了高速旋转下圆盘断裂强度的分布概率,并对两种预测模型的预测结果与试验结果进行了分析比较。

一、引 言

结构陶瓷,如 Si_3N_4 、 SiC 、 Al_2O_3 等,由于其具有优良的物理化学及力学性能,使得它在最近得到了越来越广泛的应用^[1]。一般说来,结构陶瓷材料高温强度高、重量轻、耐腐蚀、耐烧蚀、抗氧化及造价便宜。因此航空发动机这样的热力机械在用结构陶瓷替代原来热部件中的金属材料后,可省去原来热机中的冷却装置,提高整个热机的效率,减少耗油率。

但是由于结构陶瓷是强共价键化合物,使得它象大多数脆性材料一样,具有断裂时应变小,断裂韧性差及断裂强度分散性很大的特征。因此在对结构陶瓷零部件进行破坏或寿命预测时就必须进行统计及可靠性分析。最初处理这个问题的概率方法是 Weibull^[2]提出的,分析的基础是最弱环理论。该方法假设对于从简单试件得到的断裂数据存在一个唯一的强度分布,即 Weibull 分布。目前这种方法适于材料主要受拉伸应力的情况。当物体主要受压应力作用时,从研究的情况看^[3],微裂纹的扩展是一个不稳定的过程,单一裂纹的扩展并不一定引起材料最终的破坏。所以现在往往忽略压应力对材料破坏的影响。基于这样的思想,主要发展并应用了二种统计预测模型: Weibull/PLA 模型、Batdorf 模型。

二、断裂强度统计预测模型

结构陶瓷材料在生产过程中,不可避免地在材料中会产生很多微观缺陷。这些微缺陷是导致结构陶瓷材料破坏的根本原因。为了便于分析而又不失去实际意义,假设这些微缺陷均为随机分布的平面裂纹并且相互之间没有作用。则可认为微裂纹的存在不影响宏观应力应变场,即材料是宏观各向同性的。

1. Weibull/PLA 模型

基本假设:

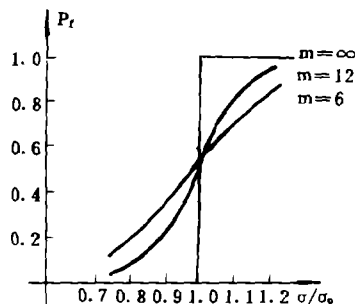


图1 Weibull 分布

- (1) 除纯压状态外, 最弱环理论是有效的。
- (2) 材料中存在大量微裂纹, 微裂纹是体内均匀分布的。
- (3) 材料的单轴断裂数据可由 Weibull 分布近似地表示:

$$\begin{aligned} p_f &= 1 - \exp\{-V[(\sigma - \sigma_*)/\sigma_*]^m\} & (\sigma \geq \sigma_*) \\ p_f &= 0 & (\sigma < \sigma_*) \end{aligned} \quad (1)$$

式中 p_f 为材料断裂概率, σ_* 为破坏应力门槛值, m 为 Weibull 参数, σ_* 是尺度参数, V 为受力体体积。典型的 Weibull 分布如图 1

对不均匀受力状态, (1) 式变为

$$p_f = 1 - \exp\left[-\iiint_V \left(\frac{\sigma - \sigma_*}{\sigma_*}\right)^m dv\right] \quad \sigma \geq \sigma_*, \quad p_f = 0 \quad \sigma < \sigma_* \quad (2)$$

Weibull 模型的一个重要特征是考虑了材料尺寸大小对断裂破坏的影响。考虑两个不同体积的受力体 V_1 和 V_2 , 分别具有平均单轴强度 $\bar{\sigma}_1$ 和 $\bar{\sigma}_2$, 则 $\bar{\sigma}_1/\bar{\sigma}_2 = (v_2/v_1)^{1/m}$, 该式表明了随着材料受力体积的增加, 材料平均单轴强度下降导致材料断裂概率增加。若令 (2) 式中 $\sigma_* = \sigma$, 则得到双参数形式的 Weibull 分布

$$p_f = 1 - \exp\left[-\iiint_V (\sigma/\sigma_*)^m dv\right] \quad (3)$$

Weibull 模型最先是针对单轴应力状态而言的, 当物体受多轴应力时, Weibull^[4]采用了所有方向的应力取平均值后计算材料断裂概率的方法进行分析, 从直觉上来看这似乎是可取的, 但很不严格。目前, 使用得最广泛的修正方法是主应力作用不相关假设 (PIA), 该假设认为各主应力相互无关地对脆性材料断裂破坏起作用。若 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, 分别是三个主应力, 则

$$p_f = 1 - \exp\left\{-\iiint_V [(\sigma_1/\sigma_0)^m + (\sigma_2/\sigma_0)^m + (\sigma_3/\sigma_0)^m] dv\right\} \quad (4)$$

这是一个非常方便的方法。但是根据以往的实际应用表明, 它低估了陶瓷材料的断裂破坏概率。因此根据简单试件的单轴试验得到基本参数后, 利用有限元方法, 在应用到复杂结构的可靠性设计上去时, 结果是非保守的。

2. Batdorf 模型

基本假设: (1) 平面微裂纹就方位而言在材料中是随机均匀分布的。微裂纹的快速扩展取决于裂纹本身的形状与和应力的相对方位。(2) 存在一个裂纹密度函数表征的裂纹分布;(3) 当 σ_e (等效应力, 为裂纹形状的函数) 超过临界断裂应力 σ_c 时, 断裂发生。

结构陶瓷断裂破坏的内在因素是材料中最弱的微裂纹达到了临界扩展状态。如果受力体的断裂是由一些不相关且单独作用的原因 (如微裂纹) 中的一个引起的, 同时每种原因只有非常小的破坏概率 (Δp_i), 则第 i 种原因不引起断裂破坏的概率为 $(p_i)_i = 1 - (\Delta p_i)_i$, 再考虑到这些微裂纹是相互无关的, 则总存活率 p_s 为:

$$p_s = \prod_i (p_i)_i = \prod_i [1 - (\Delta p_i)_i] \doteq \prod_i \exp[-(\Delta p_i)_i] = \exp[-\sum_i (\Delta p_i)_i] \quad (5)$$

现在确定 $(\Delta p_i)_i$ 。假设应力变化缓慢, 可认为在一个体单元中所有的裂纹都受到相同宏观应力作用。用 $N(\sigma_c)$ 表示单位体积中的裂纹数, 并且这些裂纹具有 $\leq \sigma_c$ 的断裂强度, 则在单元体 ΔV 内, 裂纹强度在 σ_c 与 $d\sigma_c + \sigma_c$ 范围内的裂纹数为 $\Delta V [dN(\sigma_c)/d\sigma_c] d\sigma_c$ 。临界断裂应力 σ_c 定义为垂直施加于裂纹表面引起材料断裂的宏观应力, 它不同于裂纹尖端附近的局部应力。由于裂纹群中任一裂纹引起断裂的概率还取决于它在宏观应力场中的方位。若用一固体角 Ω 表示所有可能断裂的裂纹平面法向, 则仅当 $\sigma_e \geq \sigma_c$ 及裂纹平面法向处在 Ω 中时断裂才发生。

考虑到裂纹是体内随机均匀分布的, 则体裂纹平面法向处在 Ω 内的概率为: $\Omega(\Sigma_1, \sigma_c)/4\pi$ 。 Σ 为应力状态。则:

$$(\Delta p_f)_i = [\Delta V \cdot \langle dN(\sigma_c)/d\sigma_c \rangle \cdot d\sigma_c] \cdot [\Omega/4\pi]$$

$$\text{所以(5)式变为: } p_f = 1 - \exp\left\{-\iiint_V \left[\int_0^\sigma \frac{\Omega}{4\pi} \cdot \frac{dN}{d\sigma_c} \cdot d\sigma_c\right] dV\right\} \quad (6)$$

由于 Ω 是与应力状态及断裂准则相关的量, 因此该模型也考虑了多轴应力状态及剪应力对材料破坏的影响。 $N(\sigma_c)$ 可假设为 Taylor 级数, 但是应用起来较复杂, 目前通常认为 $N(\sigma_c)$ 具有 Weibull 形式, 即: $N(\sigma_c) = K\sigma_c^m$, m, k 为试验确定的常数。

三、模型参数的确定

考虑到试验试件制造及夹具对心的方便, 目前确定模型参数通常用弯曲试验的三点弯曲试样(图2)。由材料力学可知, 最大拉压力为: $\sigma_M = (3PL/2WH^2)$, 选定 σ_M 为参考应力, 则试样内应力分布为 $\sigma = \sigma_M P(x, y)$, $P(x, y)$ 为函数。同理试验结果也可表示为

$$p_f = 1 - \exp[-C\sigma_M^m] \quad (7)$$

C 为常数。取对数后有:

$$\ln \ln[1/(1 - p_f)] = \ln C + m \ln \sigma_M \quad (8)$$

p_f 在实验点的值由下式确定: $(p_f)_i = i/(n+1)$, i 是实验时断裂应力从小到大的序号, n 为试件总数。因此在确定 $(p_f)_i$ 和 $(\sigma_M)_i$ 后, 用最小二乘法可以很容易求得 C 和 m 。

根据已求得的 C 和 m , 通过积分(3)式可得(9)式(只考虑试样受拉部分)与(7)式比较得(10)式

$$p_f = 1 - \exp\left\{-\left[\frac{LWH}{2(m+1)^2}\right]\left(\frac{\sigma_M}{\sigma_0}\right)^m\right\} \quad (9)$$

得:

$$\sigma_0 = [LWH/2(m+1)^2 C]^{1/m} \quad (10)$$

下面确定 Baldorf 模型参数 K 。由于材料弯曲时主要是单轴应力状态, 所以作用于裂纹平面的法向力为: $\sigma_n = \sigma \cos^2 \theta$, θ 为应力 σ 与裂纹平面法向夹角。应用最大正应力断裂准则:

$$\sigma_c = \sigma \cos^2 \theta \quad (11)$$

$$\Omega = 2 \int_0^\pi 2\pi \sin \theta d\theta = 4\pi(1 - \cos \theta_c) = 4\pi(1 - \sqrt{\sigma_c/\sigma}) \quad (12)$$

代入(6)式; 进行分部积分, 考虑到 $N(0) = 0$, 有

$$p_f = 1 - \exp\left[-\iiint_V \frac{K\sigma^m}{2m+1} dV\right] \quad (13)$$

$$p_f = 1 - \exp[-KLWH\sigma_M^m/2(2m+1)(m+1)^2] \quad (14)$$

$$\text{比较(14)与(7)式 } K = 2(m+1)^2(2m+1)c/WHL \quad (15)$$

四、断裂破坏概率预测及结果分析

对于一个形状复杂的部件, 由于其应力状态不再是单轴均匀的, 所以必须用有限元方法

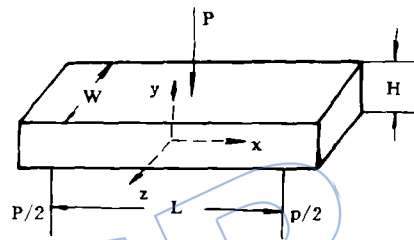


图2 三点弯曲试样

得到应力场。为了应用 Weibull/PLA 和 Batdorf 模型,对于计算得到的每一单元应力,可插值得到单元重心处的主应力,并且假设单元是均匀地在这主应力的作用下。根据最弱环理论,应用 (4) 式及 (6) 式可计算得到每单元的存活率 $(P_s)_i$, 因此整个部件的断裂破坏率为:

$$p_f = 1 - \prod_i (P_s)_i \quad (16)$$

n 为部件有限元单元划分的总数。

对于 Weibull/PLA 模型,为了遵守基本假设,假设当三个主应力中有压应力的绝对值超过最大拉应力三倍时,认为该单元处在纯压状态,这时该单元不会发生破坏而引起整个部件破坏,即 $(P_s)_i = 1$ 。反之如果仅仅存有主压应力,计算时就忽略这压应力。

对于 Batdorf 模型,为了确定三维应力状态下的 Ω ,必须确定裂纹形状及断裂准则。不失一般性,假定材料中微裂纹主要为圆形。因此当选用最大应变能释放率为断裂准则时,有:

$$\cos^4 \beta [D_2(\sigma_2 - \sigma_3)^2 \sin^4 \alpha] + \cos^2 \beta [D_1(\sigma_2^2 - \sigma_3^2) \sin^2 \alpha + 2D_2(\sigma_2 - \sigma_3) \sin^2 \alpha (\sigma_3 \sin^2 \alpha + \sigma_1 \cos^2 \alpha)] + D_1(\sigma_1^2 \cos^2 \alpha + \sigma_3^2 \sin^2 \alpha) + D_2(\sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_3 \sin^2 \alpha) \geq \sigma_c^2 \quad (17)$$

如图 3, $l = \cos \alpha$, $m = \sin \alpha \cos \beta$, $n = \sin \alpha \sin \beta$, $\bar{n}$ 为微裂纹平面法向, $D_1 = 1/(1-\nu/2)$, $D_2 = 1-D$, ν 为泊松比。

由于后面分析的是薄圆板 (HP-Si₃N₄) 在高速旋转时的破坏率,所以 (17) 式是针对平面应力状态的。由 (17) 式

$$\frac{\Omega}{4\pi} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \arccos \sqrt{\varphi} \sin \alpha d\alpha \quad (18)$$

令 $\varphi = \cos^2 \beta$,

把 (18) 代入 (6), 数值积分从 $\sigma = 0$ 至 $\sigma = \sigma_m$, 对积分时的每一应力水平,需数值积分 (18) 得到该应力水平下的 $\Omega/4\pi$ 。最后最终求得 p_f 。

为了对 Weibull/PLA 模型和 Batdorf 模型实际预测的结果与实验进行分析比较,本文根据热压氮化硅 (HP-Si₃N₄) 材料三点弯曲的试验结果,求得模型参数 σ_c , m , K 后,预测了 HP-Si₃N₄ 圆盘在某一转速下的破坏概率,预测结果与 Swank^[5] 的试验工作进行了比较,结果如图 4。

热压氮化硅陶瓷材料是在 1680℃ 的氮气下,以 420kg/cm² 的压力热压烧结 30min 制成。从烧结好的、直径为 60mm 的圆盘上切割出宽 $w = 4\text{mm}$, 高 $H = 3\text{mm}$, 长大约为 40mm 的三点弯曲试样条。实际三点弯曲试验的跨距 $L = 30\text{mm}$ 。在室温下进行试样的三点弯曲试验,记录下试样断裂时所施加的最大载荷,由 (8),

(10), (15) 式求得模型参数如下: $m = 8.50$, $\sigma_c = 84.55 \text{ Mpa} \cdot \text{m}^{0.3529}$, $K\sigma_c^m = 18.00$ 。比重由排水法测得,平均为 3.18g/cm³。用 ADINA 大型通用有限元程序计算得到陶瓷圆盘高速旋转时离心

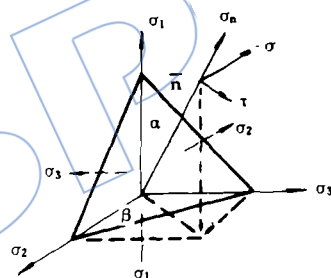


图3 三维应力关系

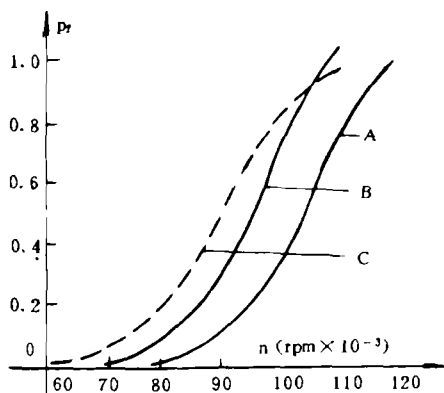


图4 模型预测 (实践) 与实验曲线 (虚线) 对比

力产生的单元应力, 然后数值计算得到破坏概率。圆盘半径: 内径 $r_i=6.35\text{mm}$, 外径 $r_o=41.275\text{mm}$, 厚 $t=3.8\text{mm}$ 。

图4的结果表明: Batdorf 模型(B)比 Weibull/PIA 模型(A)具有较好的预测能力。很明显, 应用 Weibull/PIA 模型时, 无需考虑体内裂纹的形状, 这也就使得它忽略了剪应力对断裂破坏的影响, 导致低估了材料的破坏概率。但是两者在低破坏率的情况下, 都与试验结果差别较大。试验表明: 体裂纹扩展引起的材料最终破坏并不总是材料破坏的原因。实际上, 大部分断裂破坏是由于加工时在材料表面产生的损伤引起的。因此分析时, 考虑这些理想化的表面裂纹对断裂破坏的影响, 有助于提高模型的预测能力。另一方面, 在材料生产过程中产生的微缺陷是各种各样的, 形状也很不相同, 这就使得在应用 Batdorf 模型确定这些因素时显得比较困难, 影响了结果的准确性。同时对于脆性材料, 确定材料裂纹快速扩展的准则也影响到了预测的准确性。通常应用最大正应力断裂准则和最大应变能释放率准则都是合适的。Petrovic^[6]和 Shetty^[7]的试验工作表明了断裂准则对预测这类结构陶瓷材料断裂破坏率的影响。因此应用与有限元方法相结合的预测模型时, 对材料的制造, 加工及破坏事故的分析有了较全面的了解后, 才可能较准确地进行结构陶瓷零部件的可靠性分析。

参 考 文 献

- [1] Maclean, A. F., "Brittle Materials Design, High Temperature Gas Turbine". AMMRC—CRT—74—59.
- [2] Weibull, W., "A Statistical Theory of the Strength of Materials". Ingeniors Vetenskaps Akademiens, Handlingar. No. 151. 1939.
- [3] Gyekenyesi, J. R., "SCARE—A Post—Processor Program to MSC/NASTRAN for the Reliability Analysis of Structural Ceramic Components." NASA TM—87188, 1986.
- [4] Weibull, W., "A Statistical Distribution Function of Wide Applicability." J. Applied Mech. Vol. 18, 1951.
- [5] Swank, L. R., "Correlation of Static Strengths and Speeds of Rotational Failure of Structural Ceramics" Am. Ceram. Soc. Bull., Vol. 60, No. 8, Aug. 1981.
- [6] Petrovic, J. J., "Mixed—Mode Fracture of H. P. Si_3N_4 ." J. Am. Ceram. Soc., Vol. 68, No. 6 June 1985.
- [7] Shetty, D. K., "Mixed—Mode Fracture Criteria for Reliability Analysis and Design with Structural Ceramics" 87—GT—70.

STATISTICAL FAILURE PREDICTION MODELS FOR STRUCTURAL CERAMICS

Yang Xiaoguang and Xiong Changbing

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics)

ABSTRACT The Weibull/PIA (Principle of Independent Action) and Batdorf models are applied to statistical analysis of fracture strength of structural ceramic components with crack in body under multiaxial stresses. As an example, the probability of failure distributions for H. P. Silicon Nitride disk fracture strength under high speed rotation has been estimated numerically with a finite element method on the basis of the model parameters obtained from 3— point bending experiments of H. P. Silicon Nitride, and compared with experimental data available from literature. The results indicate the considerable superiority of the Batdorf model over the Weibull/PIA model in accuracy and confirm the non-conservative nature of the latter.

A MULTI-OBJECTIVE OPTIMUM DESIGN METHOD FOR A RADIAL-AXIAL FLOW TURBINE WITH THE OPTIMUM CRITERIA OF BLADE TWIST AT OUTLET OF BLADES

Chen Lingen (Naval Academy of Engineering)

ABSTRACT This paper provides a multi-objective optimum design method for a radial-axial flow turbine stage. The method takes the parameters in mean radius, i. e. α_1 , β_2 , μ , $\bar{u}_1$, $m = (u_2 / w_2) \cos \beta_2$, and the criteria of blade twist at the outlet of the blades as design variables, and selects the internal efficiency in the design conditions and the total weight of the turbine stage as objective functions. The model presented is a nonlinear multi-objective programming problem of two objective functions with 29 constrained functions and 6 variables. The mathematical model for optimization and some analytical results of single- and multi-objective optimization for a variety of twisted blades are also presented in this paper. The numerical results demonstrate the validity and effectiveness of the method.

COMPUTATION OF THE DETACHED SHOCK SHAPE IN A SUPERSONIC OR TRANSONIC CASCADE

Hua Yaonan (Institute of Engineering thermophysics)

ABSTRACT A method is presented for determining the shape of the detached shock and the flowfield in the supersonic entrance region on an arbitrary stream surface of revolution. The equation of characteristics and the corresponding equation of compatibility are derived. The shape of the detached shock obtained is taken as the initial-value curve to calculate the flowfield in the supersonic entrance region by means of the method of characteristics. As an application of the present method, three stream surface of revolution in a transonic compressor rotor have been calculated. The results show that the method is effective and useful to determine rapidly the shape of the detached shock wave as well as the flowfield parameters in the supersonic entrance region, including the unique incidence angle in a supersonic or transonic compressor blade row.