

用多层网格法解二维无粘跨音叶栅流动

南京航空学院 盛春华 王立成

摘 要

本文给出一种较有效的多层网格构成形式,并提出“预测—修正”壁面边界处理法。通过采用当地时间步和引入余差光滑处理法,进一步提高了格式的收敛性和稳定性。作为算例,本文对二维无粘跨音速叶栅流动求解,计算结果与试验数据对比表明,本算法收敛快和计算精度好。

多层网格方法可以显著提高非定常 Euler 方程组及 N-S 方程组的求解速度,这已由文献[1~7]得到证实。多层网格方法的基本思想是,首先在细网格层中求出参数的修正量,然后将其转换到下层粗网格层中进行求解。使细网格中的变化能迅速传到整个流场。在求粗网格的修正量后,将其插值到细网格层中参数的修正量(而非参数本身)进行插值,因此格式仍维持了细网格的精度。采用不同的细网格基本格式以及对细网格参数采取不同的修正方式,可以构成不同的多层网格算法。这直接影响算法的求解精度和加速效果。另一个重要因素是关于边界条件(主要是壁面边界)的处理。此外,时间步长以及人工粘性项的选取也会对算法的精度和速度产生一定影响。本文就上述诸方面进行了数值试验,取得一些有益的结论。

一、基本方程和算法

1. 基本方程 二维非定常 Euler 方程组的守恒形式为:

$$U_t = -(F_x + G_x) \quad (1)$$

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho u h_0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ \rho v h_0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$h_0 = \frac{e + p}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \quad (3)$$

上式中, ρ 、 p 为气体的密度和压力, e 、 h_0 为单位体积的内能和总焓, u 、 v 为 x 、 y 方向上分速度, γ 为气体比热比。

2. 算法 多层网格算法分细网格层基本格式和粗网格层加速格式,网格点数按 2^p+1 的规律选取 (p 为自然数, $p \geq 2$)。计算时所有气流参数均设在网格节点上。

细网格层计算格式 细网格层采用显式的一步 Lax-Wendroff 有限体积积分格式^[1]。

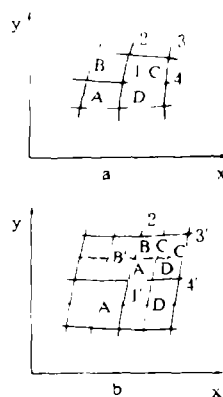


图1 a: 细网格层单元
b: 粗网格层单元

对图 1a 中单元 C , 参数 U 的一阶变化量可近似表示为

$$\begin{aligned} \Delta U_c = (\Delta t / \Delta v) \{ & [(F_1 + F_2)(y_2 - y_1) - (G_1 + G_2)(x_2 - x_1)] \\ & - [(F_3 + F_4)(y_3 - y_4) - (G_3 + G_4)(x_3 - x_4)] \\ & + [(G_1 + G_4)(x_4 - x_1) - (F_1 + F_4)(y_4 - y_1)] \\ & - [(G_2 + G_3)(x_3 - x_2) - (F_2 + F_3)(y_3 - y_2)] \} / 2 \end{aligned} \quad (4)$$

式中 Δt 为时间步长, Δv 为单元 C 的面积。Ni^[1]提出一种分配公式来确定节点 1 的修正量。根据这分配公式, 1 点的修正量为周围相邻四个单元 A 、 B 、 C 、 D 对该点的贡献之和:

$$\delta U_1 = (\delta U_1)_A + (\delta U_1)_B + (\delta U_1)_C + (\delta U_1)_D \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} (\delta U_1)_A &= (1/4)(\Delta U_A + \Delta f_A + \Delta g_A), & (\delta U_1)_B &= (1/4)(\Delta U_B + \Delta f_B + \Delta g_B) \\ (\delta U_1)_C &= (1/4)(\Delta U_C + \Delta f_C + \Delta g_C), & (\delta U_1)_D &= (1/4)(\Delta U_D - \Delta f_D + \Delta g_D) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

其中 Δf 、 Δg 表示参数 U 的二阶变化量^[1]。这里须指出, 上述修正量公式在计算某些叶型流动时(网格分布较不正规时)可能导致求解不收敛, 一种较为可靠的替代是不采用(6)式的算术平均作法, 而是用节点, 周围四个单元面积进行加权平均, 即

$$\left. \begin{aligned} (\delta U_1)_A &= (\Delta V_A / \overline{\Delta V})(\Delta U_A + \Delta f_A + \Delta g_A), & (\delta U_1)_B &= (\Delta V_B / \overline{\Delta V})(\Delta U_B + \Delta f_B - \Delta g_B) \\ (\delta U_1)_C &= (\Delta V_C / \overline{\Delta V})(\Delta U_C - \Delta f_C - \Delta g_C), & (\delta U_1)_D &= (\Delta V_D / \overline{\Delta V})(\Delta U_D - \Delta f_D + \Delta g_D) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其中 $\overline{\Delta V} = \Delta V_A + \Delta V_B + \Delta V_C + \Delta V_D$ 。采用上述修正量公式, 可以避免因网格尺寸变化剧烈而导致的不收敛情况。对于均匀网格, 式(7)即转变为式(6)。

在求出节点 1 的修正量 δU_1 后, 下一时间步 1 点的新值为

$$U_1^{n+1} = U_1^n + \delta U_1 \quad (8)$$

粗网格层加速格式 粗网格可在上层细网格中相隔去掉一条网格线而获得, 如划去图 1b 中的虚线。在粗网格中单元 C 的变化不是由式(4)确定, 而是由上层细网格单元 A 、 B 、 C 、 D 各节点的修正量 δU 的加权平均确定:

$$\Delta U_c' = (\delta U_A \Delta V_A + \delta U_B \Delta V_B + \delta U_C \Delta V_C + \delta U_D \Delta V_D) / (\Delta V_A + \Delta V_B + \Delta V_C + \Delta V_D) \quad (9)$$

其中 $\delta U_c = 1/4 (\delta U_1 + \delta U_2 + \delta U_3 + \delta U_4)$, δU , ΔV 均为细网格层的参数。在求粗网格单元的变化量 $\Delta U_c'$ 后, 类似细网格层作法, 粗网格节点 1' 的修正量为相邻单元 $A'B'C'D$ 对 1' 点贡献之和

$$\delta U_{1'} = (\delta U_{1'})_A + (\delta U_{1'})_B + (\delta U_{1'})_C + (\delta U_{1'})_D \quad (10)$$

当求出粗网格各点修正量 δU^{2n} 之后, 将 δU^{2n} 按线性关系插回到细网格中, 并按公式(9)将 δU^{2n} 转换为下一层粗网格层变化量 ΔU^{4n} , 求出修正量 δU^{4n} ……, 直到最粗网格层执行完为止。一种较为有效的作法是, 再次求出粗网格修正量后, 不立即对细网格参数进行修正, 而是在所有各层粗网格修正量都求出后, 再对细网格参数进行一次性修正。这样作能更好地使细、粗网格层的参数相互匹配, 以获得较佳的收敛效果。

3. 边界条件处理 进口采用无反射边界处理方法^[1], 即认为计算域外的单元参数的一阶变化 ΔU 为零。这样处理有助于消弱于进出口扰动波的反射, 使收敛加快。

壁面边界的处理是本算法中的一个关键问题。如果处理不当, 不仅会带来精度下降, 收敛变慢, 甚至可导致发散。壁面边界的处理在文献[1]中未作说明, 本文作者尝试了不同的处理方法, 如用压力外推公式^[7]加局部等熵关系; 以及在壁面外设虚单元插值求解^[8]。结果表明, 前一种方法对一般二维流动问题可取得比较满意的结果, 但这种方法在处理三维流动边界时却极为困难。后一方法则不甚理想, 不仅收敛速度慢, 而且求解精度受插值关系影响很大。作者根据多次实践, 针对本算法的特点, 采用所谓“预测—修正”的处理方法, 取得了

较好的效果。具体作法是：对图 2 中壁面边界点 1，先按无反射值设确定其修正量 δU_1 ，显然此值仅为内点值的一半。因此将 δU_1 乘 2 作为壁面点修正量的“预测值” δU_1 。一般情况下求出的速度不满足的壁面相切条件，故下一步还要对速度分量进行“修正”，使修正后的速度与壁面相切。这样处理是合理的，因为当解趋于收敛时，各单元参数的变化量 ΔU 趋于零，因此壁面点的修正量 δU 也将趋于零。而且这种处理方法不需要进行外推插值，并容易推广到二维流情况。粗网格的边界处理与细网格相同，这样有助于加速收敛。如果按文献 [8] 中所述的在粗网格层取 *Dirichlet* 问题，尽管不会影响最终结果，但会使收敛速度减慢。

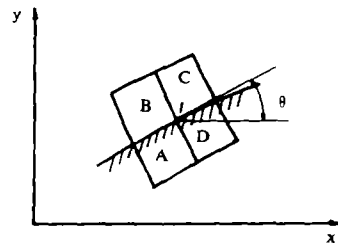


图 2 壁面边界单元

4. 时间步长 由于采用显式格式，时间步长必须满足 *CFL* 条件。保证稳定的时间步长与单元几何尺寸及当地流动条件有关，即

$$\Delta t \leq \min \left[\Delta v / (|l u \Delta y' - v \Delta x'| + a \Delta l), \Delta v / (|l u \Delta y'' - v \Delta x''| + a \Delta m) \right] \quad (11)$$

$$\Delta l = [(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2]^{1/2} \quad \Delta m = [(\Delta x'')^2 + (\Delta y'')^2]^{1/2}$$

式中 $\Delta x'$ 、 $\Delta y'$ 、 $\Delta x''$ 、 $\Delta y''$ 为单元的几何尺度^[1]， a 为当地音速。根据上式可确定出不同单元的时间步长（即当地时间步长）。采用当地时间步长可使收敛速度有所提高。

5. 人工粘性阻尼 为了抑制计算过程中的数值振荡（尤其在激波位置附近），必须加入一定的人工粘性。对于多层网格算法，由于将粗网格修正量插回到细网格时也会带来一定的误差，因此更要求格式具有消除各种频率误差的能力。本文仍选用 *Ni* 推荐的人工粘性项^[1]

$$\delta U^* = \mu (U_A + U_B + U_C + U_D - 4 \cdot U_1) \quad (12)$$

$$\mu = \sigma (\Delta t / \Delta x' + \Delta t / \Delta y'')$$

上式中 σ 为人工粘性因子。 $Ni^{[1]}$ 的人工粘性实际是以节点周围四个单元参数的平均值对节点参数进行光滑处理。需要指出的是，上述人工粘性只能用在细网格层中，粗网格层不能使用。否则会导致求解不收敛。

6. 余差光滑处理 一种提高格式稳定性的有效方法就是对修正量（余差） δU 进行光滑处理。这在文献 [7、10] 中都被采用。显式的余差光滑形式为

$$\delta U^R = (1 + \epsilon_x \delta_x^2)(1 + \epsilon_y \delta_y^2) \delta U \quad (13)$$

式中 δ_x^2 、 δ_y^2 为二阶空间差分因子， ϵ_x 、 ϵ_y 为 x 、 y 方向上的光滑系数。在求出网格各点修正量 δU 后，按上式对它进行光滑处理，以光滑后的值 δU^R 对参数进行修正。采用余差光滑措施可明显改善格式的稳定性，从而可以选择较大的时间步而不致引起发散。

二、算 例

为了验证算法的精度和收敛速度，选用了四组国外发表的跨音速叶栅通道数据进行了数值计算，并与试验结果作了对比。

第一算例选自文献 [11] 中的压气机叶栅数据。图 3 为通道的网格点分布，取 64×17 个网格点，采用四层网格求解。叶栅进口 Ma 数选为 $Ma_1 = 0.82$ 和 $Ma_1 = 1.03$ 两种状态。对亚音速来流 ($Ma_1 = 0.82$)，进口条件取来流总压 P_0 、总温 T_0 和气流进气角 α 。对跨音速来流 ($Ma_1 = 1.03$)，进口则给定 P_0 、 T_0 和气流某一方向的分速 (u 或 v)，以保证此时气流的唯一攻

角条件。叶型表面按文中所述方法处理,叶栅前后取周期边界条件。图 4a、b 分别为两种状态下计算出的叶型表面 C_p 曲线分布与文献[11]中的试验结果。可见计算值与试验基本相符,尤其在跨音速下解出的叶背表面上激波位置与实际测量结果非常接近。但两种状态下求出的叶栅通道出口与进口的静压比 P_2/P_1 略大于测量值,出口气流方向角 β 较实际流动小。这可能是格式中未考虑粘性的缘故。

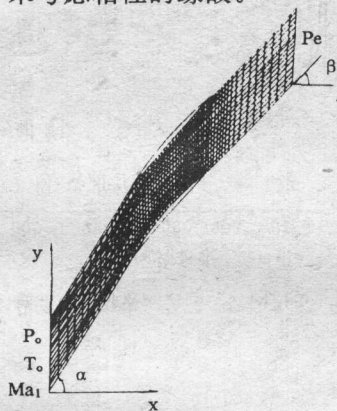


图 3 通道网格分布(65×17)

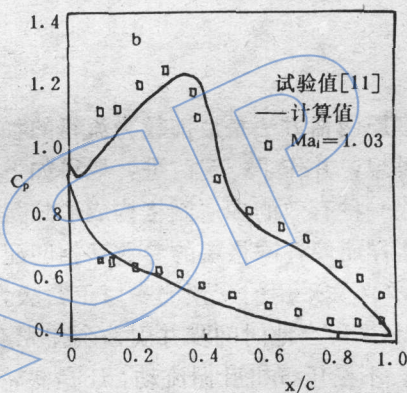
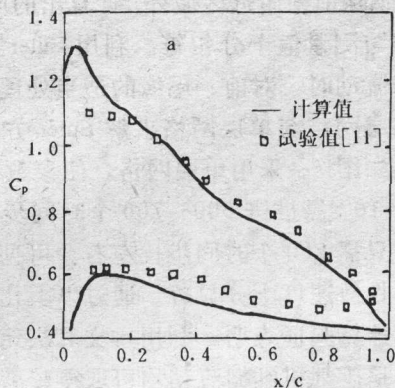
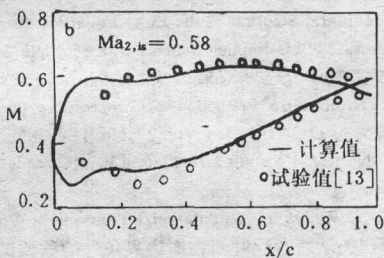
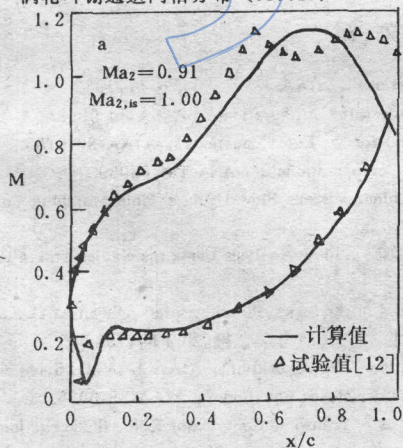
图 4 叶型表面 C_p 曲线分布

图 5 涡轮叶栅通道网格分布 (65×17)

图 6 叶型表面 Ma 数分布

另一算例选自四个欧洲风洞联合测量的涡轮叶栅试验数据^[12],图 5 给出其涡轮叶栅通道(BS 型)的网格分布,仍取 65×17 网格点。图 6a 为计算出的叶型表面 Ma 数分布与文献

[12] 中的测量值的对比。可见在叶型压力面计算值与试验值极为吻合,但在吸力面接近尾缘的超音速区两者相差较大。这可能与尾缘区的网格取法有关。

图 6b 为对文献 [13] 中一种涡轮叶栅通道 (B9 型) 计算所得的结果与试验值的比较。这里网格点数取为 33×9 , 采用三层网格 6 求解。从图可见,除前缘附近区域外,计算出的叶型表面 Ma 数分布与测量值十分相符。利用 Euler 方程求解涡轮叶栅流动时,对前、尾缘的适当处理很重要。

多层网格与单层网格求解 Euler 方程的收敛速度对比如图 7。采用单层网格,使参数 U 的最大误差降至 10^{-4} 需推进 600~700 个时间步;而采用四层网格只需 200 个时间步长左右。可见多层网格法对提高收敛速度十分显著。通过以上几组不同叶栅流动的计算验证表明,利用本文算法无论求解涡轮叶栅还是压气机叶栅流动均可取得较满意结果。

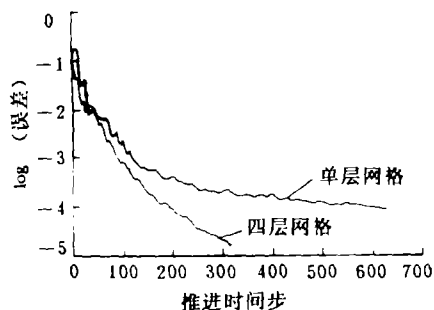


图 7 单层网格与多层网格收敛速度对比

三、结 论

多层网格方法是目前较为流行的加速收敛的方法,本文的工作主要根据文献 [1] 的多层网格思想,并作了一定改进,取得如下几点结论:

1. 一种有效的多层网格构成形式是在求出所有各层网格修正量后再对细网格参数进行修正,这样能使各网格层的参数互相匹配,以获得较快的收敛效果。
2. 本文采用的“预测—修正”法为一种与格式相匹配的简便准确的壁面边界处理方法。
3. 采用当地时间步并引入余差光滑处理方法可进一步提高格式的收敛速度和稳定性。
4. 不论压气机叶栅流动,还是涡轮叶栅流动,采用本文的算法求解都能取得满意的精度和收敛速度,因而具有一定工程实用价值。

参 考 文 献

- [1] Ni, Ron-Ho "Multiple-Grid Scheme for Solving the Euler Equations", AIAA J. Vol. 20, No. 11, 1982
- [2] Jameson, A. "Multigrid Solution of the Euler Equations for Aircraft Configurations", AIAA 84-0093.
- [3] Jameson, A., Yoon, S., "LU Implicit Scheme with Multiple Grid for the Euler Equations", AIAA-86-0105.
- [4] Johnson, Gary M. "Convergence Acceleration of Viscous Flow Computations", NASA TM-83039.
- [5] Davis, Roger L., Ni, Ron-Ho "Prediction of Compressible, Laminar Viscous Flow Using a Time-Marching Control Volume and Multigrid Technique", AIAA J., Vol. 22, No. 11, 1984.
- [6] Davis, Roger L., Ni, Ron-Ho and Carter, James E., "Cascade Viscous Flow Analysis Using the Navier-Stokes Equations", AIAA 86-0033.
- [7] Habashi, W. G., "Advances in Computational Transonic", Vol. 4 in the series, Pineridge press, Swansea U. K.
- [8] 张耀科, 沈孟育, "关于跨音速叶栅物面边界条件的数值试验", 空气动力学学报, 第 4 期, 1982 年。
- [9] Johnson, Gary M., "Concurrent-Processing Adaptation of a Multiple-Grid Algorithm", AIAA J., Vol. 25, No. 6, 1987.
- [10] Swanson, R. C. "A Multistage Time-Stepping Scheme for the Navier-Stokes Equations", AIAA 85-0035.
- [11] Schreiber, M. A., Starken, H., "Experimental Cascade Analysis of A Transonic Compressor Rotor Blade Section" 83-GT-209.
- [12] Kiock, R., et al., "The Transonic Flow Through a Plane Turbine Cascade as Measured in Four European Wind Tunnels", Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, Vol. 108, April, 1986.
- [13] Sato, T., Aoki, S. and Nagayama, T. "Extensive Verification of the Denton New Scheme From the User's point of View: Part I - Comparison of Calculated and Experimental Results" 86-GT-58.

SOLUTION FOR TWO-DIMENSIONAL INVISCID TRANSONIC CASCADE FLOWS WITH MULTIPLE-GRID ALGORITHM

Sheng Chunhua and Wang Licheng

(Nanjing Aeronautical Institute)

ABSTRACT This paper gives an efficient form of multiple-grid scheme and presents a "prediction-correction" method for processing the boundary conditions on a solid wall. The convergence and the stability of the scheme can be further improved by using local time stepping and residual smoothing. Finally, two-dimensional inviscid transonic cascade flows are calculated. The comparison between the calculated and the measured results shows that this scheme possesses very fast convergence speed and satisfactory accuracy.

APPLICATION OF UPWIND FACTOR METHOD TO TRANSONIC CASCADE CALCULATION

Wang Licheng, Zhang Huimin, Lu Xiaoling

(Nanjing Aeronautical Institute)

ABSTRACT In this paper the upwind factor method is extended to treating the two-dimensional transonic flows. The Navier-Stokes equations with $k-\epsilon$ turbulence model are discretized in a non-orthogonal body-fitted coordinate system, and the upwind factor method is employed to ensure the numerical stability of the scheme. The maximum local time step is determined by the criterion that the coefficients in discretized equations must be non-negative.

The numerical experiments are carried out for DFVLR transonic cascade for inlet Mach number of 0.82 and 1.05, and numerical results are compared with the experimental data in good agreement. Also, the numerical results are compared with the results calculated with a four stage Runge Kutta time stepping scheme of an Euler code.

A NEW HYBRID SCHEME OF FLUX VECTOR SPLITTING-HARTEN'S TVD AND ITS APPLICATION

Wang Baoguo and Chen Naixing

(Institute of Engineering Thermophysics)

ABSTRACT A new high-resolution hybrid implicit scheme for solving the unsteady Euler flow equations to obtain steady solutions is provided in curvilinear coordinates. This scheme is mainly based on Steger-Warming's implicit flux vector splitting technique and Harten's numerical flux function. With the hybrid scheme, we obtain the discretized linear system with diagonally dominant coefficient matrix which enhances the convergence rate by use of the Line Gauss-Seidel relaxation procedure including backward and forward sweeps.

The numerical procedures were applied to three examples for steady transonic flows in a channel. Computational results shows the convergence rate is very high due to the very big time steps. The scheme is capable of obtaining weak solutions for system of hyperbolic conservation equations. It also can exclude expansion shocks and lead only to physically relevant solutions. The new algorithm reaches steady shock solutions on the grid with a one or two point monotone transition.