

定向结晶涡轮叶片可靠性分析

西北工业大学 吕文林 段振龙

【摘要】 本文在正交异性材料定向结晶涡轮叶片的应力有限元分析的基础上，以一种简单的破坏模式列出了可靠度的计算方法。首先利用 Hill 准则建立临界函数（破坏函数），对于多随机变量及非线性破坏函数利用二阶矩方法及 Hasofer-Lind 方法找出破坏点和这种破坏模式的可靠度。并用 Monte-Carlo 方法予以验证。

一、引言

定向结晶式称定向凝固技术，是在铸造时合金沿叶高无晶界，晶界平行于叶片的纵向轴线形成柱状结晶的一种工艺技术。其机械性能在两个方向为不同值，称之为正交异性。本文为了探索对航空发动机零件的可靠度计算方法，以定向结晶的涡轮叶片为研究对象，暂选定一种简单的破坏模式也即是按照 Hill 强度准则，不超过高温强度为安全状态，否则即为破坏失效。其它情况拟在今后研究。

随机量的选择是考虑到能用 Monte-Carlo 方法来校验方法的正确性，而暂不考虑必须用概率有限元才能计算的随机量。

二、定向结晶材料的应力分析

1. 正交材料的广义虎克定律 参见图 1，定向结晶方向为 z 、 x 、 y 方向为叶片的横截面，应力与应变的关系仍用下式表示

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\}$$

经推导^[1] $[D]$ 矩阵可用下式表示

$$[D] = A \begin{bmatrix} \frac{E_D - \gamma_2^2 E_T}{(1 + \gamma_1) E_D} & \frac{\gamma_1 E_D + \gamma_2^2 E_T}{(1 + \gamma_1) E_D} & \gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{D_1 E_D + \gamma_2^2 E_T}{(1 + \gamma_1) E_D} & \frac{E_D - \gamma_2^2 E_T}{(1 + \gamma_1) E_D} & \gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_2 & \gamma_2 & \frac{E_D(1 - \gamma_1)}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E_T}{2A(1 + \gamma_1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{G_{TD}}{A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{G_{TD}}{A} \end{bmatrix}$$

式中下标 “D” 为定向结晶的正方向；下标 “T” 为横截面的 x 、 y 平面。

$$A = E_T E_D / (1 - \gamma_1) E_D - 2\gamma_2^2 E_T$$

$$\gamma_1 = \gamma_{xy} = \gamma_{yz} ; \quad \gamma_2 = \gamma_{xz} = \gamma_{yz}$$

$$G_{TT} = E_T / 2(1 + \gamma_{xy}) ; \quad E_x = E_y = E_T , \quad E_D = E_z$$

除 [D] 阵形式不同以外，其它公式及计算方法均与各向同性的三维单元计算相同。

将涡轮叶片分成三维 20 节点等参单元进行有限元计算后，得出危险点的应力分量。

2. 强度准则 对于各向同性材料可利用 Mises 准则，对于定向结晶材料利用 Hill 准则列出下式

$$k_1(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + k_2(\sigma_3 - \sigma_1)^2 + k_3(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + k_4\tau_{12}^2 + k_5\tau_{23}^2 + k_6\tau_{31}^2 = 1$$

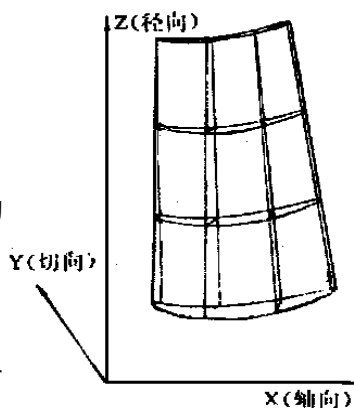


图 1 涡轮叶片的形状和座标系

式中 $k_1, k_2, \dots, k_6$ 是表征正交异性材料各向异性的性能参数，为了将系数 $k_1, k_2, \dots, k_6$ 与基本强度极限联系起来，可考察单向受力情况而得到，用 F 表示单向受力时的强度极限。

$(k_2 + k_3)F_1^2 = 1$ ，仅 $\sigma_1 \neq 0$ ，其它应力分量为 0； $(k_3 + k_1)F_2^2 = 1$ ，仅 $\sigma_2 \neq 0$ ，其它应力分量为 0； $(k_1 + k_2)F_3^2 = 1$ ，仅 $\sigma_3 \neq 0$ ，其它应力分量为 0； $k_4F_{12}^2 = 1$ ，仅 $\tau_{12} \neq 0$ ，其它应力分量为 0； $k_5F_{23}^2 = 1$ ，仅 $\tau_{23} \neq 0$ ，其它应力分量为 0； $k_6F_{31}^2 = 1$ ，仅 $\tau_{31} \neq 0$ ，其它应力分量为 0；

由上式可以解出 k 值与强度极限的关系式

$$2k_1 = 1/F_2^2 + 1/F_3^2 - 1/F_1^2 ; \quad 2k_2 = 1/F_3^2 + 1/F_1^2 - 1/F_2^2$$

$$2k_3 = 1/F_1^2 + 1/F_2^2 - 1/F_3^2 ; \quad k_4 = 1/F_{12}^2 ; \quad k_5 = 1/F_{23}^2 ; \quad k_6 = 1/F_{31}^2$$

并注意到 $F_1 = F_2$ ，Hill 准则可写成下式

$$(\sigma_2 - \sigma_3)^2 / 2F_3^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 / 2F_3^2 + (1/F_1^2 - 1/2F_3^2)(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \tau_{12}^2 / F_{12}^2 + \tau_{23}^2 / F_{23}^2 + \tau_{31}^2 / F_{31}^2 = 1$$

将上式中符号转换如下：

F_1, F_2	换为 σ_T	非结晶方向的纯拉强度
F_3	换为 σ_D	结晶方向的纯拉强度
F_{23}, F_{31}	换为 τ_{TD}	结晶-非结晶方向的平面上纯剪强度
F_{12}	换为 τ_{TT}	非结晶-非结晶方向的平面上纯剪强度

经转化，Hill 准则可写成下式（应力角标 1, 2, 3 转换为 x, y, z ）

$$g = 1 - (\sigma_x - \sigma_y)^2 / \sigma_D^2 - (\sigma_x \sigma_y + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_z - \sigma_y \sigma_z) / \sigma_D^2 - \tau_{xy}^2 / \tau_{TT}^2 - (\tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) / \tau_{TD}^2 = 0 \quad (1)$$

在可靠性分析中 (1) 式表示定向结晶材料的一种破坏模式的临界方程（破坏方程），并且 $g \leq 0$ 表示失效破坏， $g > 0$ 表示安全。

三、可靠性分析

假定各随机变量的分布均为正态分布，如非正态分布时可参考有关资料^[3]进行转化。如果每一随机变量的变异系数较小，以及原函数中对变量有两次以上的运算，则可以假设这个综合的单一函数可近似符合正态分布^[6]。根据以上的论断，式 (1) $g(x)$ 可按正态分布进行数

学运算。其破坏概率可写成:

$$P_f = P[g(x) \leq 0]$$

$g(x)$ 的均值 μ_g 方差 σ_g 的计算一般不是基本随机量 X_i 的简单代数组合, 在航空发动机零件的可靠性分析中, 其随机量对应力的影响, 一般须用随机有限元确定其分布函数的参数。为了能用 Monte-Carlo 方法验证计算方法的正确性, 本文仅选定四个强度随机量及密度、转速共六个简单的随机量。将 $g(x)$ 的分布变为标准正态 $N(0, 1)$ 分布后, 则其破坏概率可改写成

$$P_f = P[g(x) \leq 0] = P[(g(x) - \mu_g)/\sigma_g \leq -\mu_g/\sigma_g]$$

记 $\beta = \mu_g/\sigma_g$, 称之为可靠性指标。

由于 $(g(x) - \mu_g)/\sigma_g$ 服从标准正态分布, 所以破坏概率

$$P_f = P[g(x) \leq 0] = \Phi(-\beta)$$

可靠度则为

$$Re = 1 - P_f = P[g(x) > 0] = \Phi(\beta)$$

式中的 $\Phi(\cdot)$, 表示标准正态累积分布函数, 因此只要能求出临界函数的均值及方差, 通过 $\beta = \mu_g/\sigma_g$ 即可求出可靠度 Re 。

将用 Tyler 展开公式, 可将 $g(x)$ 在破坏点展开,

$$g(x) = g(x^*) + \sum_{i=1}^n [(\partial g / \partial x_i)^* (x_i - x_i^*)] \quad (2)$$

$$\text{临界函数的期望值 } E[g(x)] = g(x^*) + \sum_{i=1}^n [(\partial g / \partial x_i)^* (E[x_i] - x_i^*)] \quad (3)$$

$$\text{其方差 } Var[g(x)] = \sum_{i=1}^n ((\partial g / \partial x_i)^2 Var[x_i]) \quad (4)$$

角标* 代表为破坏点的值 (关于破坏点的求法见下文), 如果 x_i 取为均值, 那么 (3) 式可写成:

$$E[g(x)] = g[E(x)]$$

方差形式与 (4) 相同只是 $(\partial g / \partial x_i)$ 在均值点上取值。在破坏点上取值的结果要比均值点结果准确, 但破坏点在开始计算时是不知道的, 利用 Hasofer-Lind 方法通过迭代可求出破坏点, 并可计算出较准确的可靠度。

首先在迭代计算中各基本随机变量的初值, 取为它们的均值。计算 $(\partial g / \partial x_i)^*$ 以后, 可通过 (3), (4) 式求出 β 值, 并按下式求出 α

$$\alpha = (\partial g(x) / \partial x_i)^* \sqrt{Var[x_i] / \left(\sum_{i=1}^n ((\partial g(x) / \partial x_i)^2 Var[x_i]) \right)^{1/2}} \quad (5)$$

然后, 用最危险点 β 和 α , 求得新的破坏点

$$x_i = \mu_{xi} - \alpha \beta \sqrt{Var[x_i]} \quad (6)$$

得到新的破坏点, 可重复计算逼近真实破坏点, 当前后两次计算得到的 β 相差不大之后, 可认为已经逼近破坏点。

上面计算均假定各随机变量为正态分布, 否则可按有关文献转化为正态分布。

对于定向结晶叶片的破坏方程 (1) 式, 按上述方法, 首先需求出其均值及方差。

$$E[g] = 1 - (\sigma_x^* - \sigma_y^*)^2 / \sigma_T^2 - (\sigma_x^* \sigma_y^* + \sigma_z^* - \sigma_x^* \sigma_z^*) / \sigma_\theta^* - \tau_y^{*2} / \tau_T^{*2} - (\tau_z^{*2} + \tau_x^{*2}) / \tau_D^{*2} + \sum_{i=1}^n ((\mu_{xi} - x_i^*) (\partial g / \partial x_i)^*) \quad (6)$$

$$Var[g] = (\partial g / \partial x)^T [c] (\partial g / \partial x)^* \quad (7)$$

$$[c] = \begin{bmatrix} Var[x_1] & CoV[x_1, x_2] & \dots & CoV[x_1, x_n] \\ & Var[x_2] & \dots & CoV[x_2, x_n] \\ & & \ddots & \\ & & & Var[x_n] \end{bmatrix} \quad (8)$$

式中 $\{x\}^T = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ 。如各随机变量都认为是相互独立的, 则 $CoV[x_i, x_j] = 0$ ($i \neq j$)

对 $g(x)$ 的偏导数, 通过 (1) 式可得:

$$\begin{aligned} \partial g / \partial x_i = & (-2(\sigma_x - \sigma_y) / \sigma_T^2 - (\sigma_x - \sigma_z) / \sigma_D^2) \partial x / \partial x_i + (2(\sigma_x - \sigma_y) / \sigma_T^2 \\ & - (\sigma_y - \sigma_z) / \sigma_D^2) \partial y / \partial x_i + ((\sigma_x + \sigma_y - 2\sigma_z) / \sigma_D^2) \partial z / \partial x_i - 2(\tau_{xy} / \tau_T^2) (\partial \tau_{xy} / \partial x_i) \\ & - 2(\tau_{yz} / \tau_{TD}^2) (\partial \tau_{yz} / \partial x_i) - 2(\tau_{xz} / \tau_D^2) (\partial \tau_{xz} / \partial x_i) \end{aligned} \quad (9)$$

如果基本随机变量是强度值, $\sigma_T, \sigma_D, \tau_T, \tau_{TD}$, 则有

$$\partial g / \partial \sigma_T = 2(\sigma_x - \sigma_y)^2 / \sigma_T^3 \quad (10)$$

$$\partial g / \partial \sigma_D = 2(\sigma_x \sigma_y + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_z - \sigma_y \sigma_z) / \sigma_D^3 \quad (11)$$

$$\partial g / \partial \tau_T = 2\tau_{xy} / \tau_T^3 \quad (12)$$

$$\partial g / \partial \tau_{TD} = 2(\tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) / \tau_{TD}^3 \quad (13)$$

对于破坏点的上述值, 即将破坏点的各随机量代入即可得出。

对于 ω, ρ 的随机变化虽然反映在应力的六个分量的随机变化, 需用随机有限元计算, 但本文假定为均温情况下, 所以应力与 ω 的平方成正比, 与密度成线性关系所以可写成下式:

$$\begin{aligned} \text{因为 } \sigma / \sigma_m = (\omega / \omega_m)^2, \quad \text{则 } (\partial \sigma / \partial \omega)^* &= (\sigma_m / \omega_m^2) 2\omega \\ \sigma / \sigma_m = \rho / \rho_m, \quad \text{则 } (\partial \sigma / \partial \rho)^* &= (\sigma_m / \rho_m) \end{aligned}$$

式中下标 “ m ” 代表随机量的均值。将上式代入 (9) 式, 即可得 $(\partial g / \partial \omega)^*, (\partial g / \partial \rho)^*$ 。同理可参加上述迭代过程, 而无需随机有限元法进行计算。

在用 Monte-Carlo 方法进行校验时, 首先将破坏函数改写成

$$g(x) = 1 - (\rho_o \omega)^2 \{ (\sigma_x - \sigma_y)^2 / \sigma_T^2 + (\sigma_x \sigma_y + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_z - \sigma_y \sigma_z) / \sigma_D^2 + \tau_{xy}^2 / \tau_T^2 + (\tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) / \tau_{TD}^2 \} \quad (14)$$

式中 ρ_o, ω 为随机系数, 其均值为 1, 离差系数 (变异系数) 分别等于 ρ, ω 随机量分布的离差系数值, 这样利用 Monte-Carlo 方法就方便了, 不再改变公式 (14) 中的应力分量的值。计算时按照如下步骤:

- (1) 按照 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 各随机量的分布, 产生 n 个伪随机数。
- (2) 将所产生的伪随机数代入 $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 式中。
- (3) 如果 $g(x) \leq 0$ 按破坏计数 F 加 1, 否则为安全计数 S 加 1。
- (4) 按总计数可求出破坏概率 $P_f = F / (S + F)$ 及其可靠度 $Re = S / (S + F)$

上式方法简单可行, 但计算次数一般要上万次、十万次或更多, 因此计算时间较长, 在本文中引用本法做为校验用。

四、算 例

本文按某发动机一级涡轮叶片的形状和工作条件, 假定叶片材料为 DZ-22 定向结晶材料该材料性能数据为 $E_D = 10008.16 \text{ MPa}$, $E_T = 132000 \text{ MPa}$, $G_{TD} = 90918.4 \text{ MPa}$, $\rho = 8.7 \text{ g/cm}^3$, $\gamma_1 = 0.274$, $\gamma_2 = 0.343$

表 1 基本随机量的取值

变 量	$\rho \text{ g/cm}^3$	$n \text{ r/min}$	$\sigma_T \text{ MPa}$	$\sigma_D \text{ MPa}$	$\tau_{TT} \text{ MPa}$	$\tau_{TD} \text{ MPa}$
均 值	8.7	11440	288.62	336.73	218.87	218.87
方 差	0.189	32400	20.41	27.78	11.73	11.73
离差系数	0.05	0.016	0.05	0.05	0.05	0.05

利用三维有限元程序, 计算在均值情况下危险点的应力为: $\sigma_x = 92.5\text{MPa}$, $\sigma_y = 249.08\text{MPa}$, $\sigma_z = 343.59\text{MPa}$, $\tau_{xy} = 0.8377\text{MPa}$, $\tau_{yz} = 110.27\text{MPa}$, $\tau_{zx} = -9.27\text{MPa}$ 。

表 1 中离差系数是按牟致忠^[6]和冯元行^[5]建议给出的。转速的离差系数选取值较大, 主要为了减少用 Monte-Carlo 法校验的计算时间。

仅考虑四个强度随机量计算结果: 迭代七次 β 值依次为 5.44221, 4.443518, 4.387964, 4.387568, 4.387520, 4.387510, 4.387508。第一次和第七次迭代的 R_e 可靠度和 P_f 破坏概率分别为 0.99999997, 2.7×10^{-8} ; 0.9999943, 5.7×10^{-6} 。第一次为均值点结果, 第七次为破坏点结果。破坏点为 $\sigma_T = 242.61\text{MPa}$, $\sigma_D = 306.69\text{MPa}$, $\tau_{TT} = 218.87\text{MPa}$, $\tau_{TD} = 192.38\text{MPa}$ 。

Monte Carlo 模拟结果: 计算次数为 100000 和 1000000 的计算时间分别为 513.24 和 5092.25%; R_e 可靠度分别为 1.0000, 0.999992; 最后的 P_f 破坏概率为 8.0×10^{-6} , 对应的 β 为 4.31~4.32。

计及 ρ , ω 及强度等六个随机变量的计算结果迭代四次, β 值逐次为 2.407259, 2.137186, 2.13384, 2.13384。第一次和第四次的 R_e 可靠度和 P_f 破坏概率分别为 0.992、0.9835 和 0.008、0.0135, 第一次为均值点结果, 第四次为破坏点结果。因转速的方差值取的较大, 故可靠度较小。破坏点为 $\rho = 9.199\text{g/cm}^3$, $R.P.M = 12627.6\text{r/min}$, $\sigma_T = 278.8\text{MPa}$, $\sigma_D = 328.83\text{MPa}$, $\tau_{TT} = 218.88\text{MPa}$, $\tau_{TD} = 212.49\text{MPa}$ 。

Monte Carlo 模拟结果: 计算次数分别为 1000, 10000, 100000, 计算时间分别为 57.23%, 746.42%, 7600.86%。 R_e 可靠度分别为 0.986, 0.9831, 0.98228。 P_f 破坏概率分别为 0.14, 0.0169, 0.01772。对应的 β 分别为 2.19~2.20, 2.12~2.13, 2.10~2.11。

计算时间都是在带有 8037 的 IBM PC/XT 机上计算得出的。

综上所述得出如下结论: (1) 计算定向结晶叶片一种简单的破坏模式的可靠度, 采用二阶矩和 Hasofer-Lind 的迭代方法与 Monte-Carlo 方法对比中可以看出是可行的, 其结果可信, 计算时间节省。(2) 用破坏点所得到的结果比均值点计算的结果准确度要高。(3) 当 β 很大时, Monte-Carlo 的模拟方法, 计算次数很大, 在百万次甚至更多, 耗时较大。(4) 本文目的在于建立计算定向结晶叶片可靠度的方法, 并予以验证。但由于原始数据不全, 文中有许多数据是根据各种书籍、资料取的估计值, 只可用作本文算例数据, 不可引用。

参 考 文 献

[1] 吕文林, "定向结晶叶片应力分析", 西工大科技资料, DZH8807
[2] Hasofer A. M., and Lind N. C., "Exact and Invariant Second Moment Code Format", J. Eng. Mech. ASCE 100(EM1) 1974.
[3] Chen X. and Lind N. C., "Fast Probability Integration by Three-Parameter Normal Tail Approximation", Structural Safety(1983) 269-276
[4] Wirsching, P. H.,artz, K. S., Lee, J., "An Overview of Relibility Method in Mechanical Design, "AIAA/ASME/ASCE/AHS 28th Structures, Structural Dynamic and Material Conference, Monterey California, April 6-8 1987 pp260-267
[5] 冯元生, "结构系统可靠性基础", 西北工业大学, 1987 年 5 月。
[6] 牟致忠, "机械零件可靠性设计", 机械工业出版社, 1988 年 3 月。

STUDY ON TRAVELLING WAVE VIBRATION OF BLADED DISKS IN TURBOMACHINERY

Yan Litang (*Beijing University of Aeronautics and Astronautics*)

ABSTRACT

The exciting sources for axial vibration of disk, especially the new axial gas dynamic force induced by travelling waves and its properties, and influence on the vibration of disks are studied. It is shown that the travelling wave induces new gasdynamic force which can damp out the forward traveling wave vibration and induces the self-exciting vibration for the backward travelling wave vibration. Because it is unavoidable that various distributed stationary forces act on the disk, the resonance in company with the self-exciting stationary wave vibrations is excited during the critical speeds of disk. The resonance, in essentials the self-exciting vibration, is the reason for dangerous stationary wave vibration. This is a new conception. The equation for calculating the instability of the stationary wave vibration of the disk is also given in the paper.

ENERGY DAMAGE THEORY OF THERMO-FATIGUE AND CREEP LIFE

Xiong Changbing (*Beijing University of Aeronautics and Astronautics*)

ABSTRACT

A new life prediction method of temperature and load damage for high temperature components of engine is presented. In consideration of the interaction between thermo-fatigue and creep, the new method includes the damage summation of elastic energy, plastic energy and creep energy of material. The precise finite element method of thermal-elastic-plastic-creep conditions is used to solve the correlation of multiple physical parameters of material (stress, strain, Young's modulus, thermal expansive coefficient, yield limit, plastic hardening exponent, creep hardening exponent, etc.) with temperature effect. In the new method the correction can be made according to the changes of temperature and time, so that it expands the applicable area of general damage mechanics. This paper makes reference to the experimental results of famous 'Strain Range Partitioning (SRP)' and 'Strain Energy Partitioning (SEP)' methods. The calculated results by the presented method locate between the experimental results of SRP and SEP methods. The new method has the advantages in clearness of physical concept, convenience of calculation and wide range for application. It is satisfactory for engineering practice in life prediction of high temperature components.

RELIABILITY ANALYSIS OF DIRECTIONALLY- SOLIDIFIED TURBINE BLADE

Lu Wenlin, Duan Zhenlong (*Northwestern Polytechnical University*)

ABSTRACT

This paper is based on stress analysis of directionally-solidified turbine blade with the Finite Element Method. The reliability analysis method with a simple failure model is proposed. The failure function is established by Hill Criterion. The second order moment method and Hasofer-Lind method for multiple random variables and nonlinear failure function are used to find the failure point and reliability of the failure model. The methods are checked by Monte-Carlo method.