

有向单位系下的方程无量纲化法

北京航空航天大学 邱绪光

摘 要

本文所研讨以有向单位系使方程无量纲化的方法。将藉助若干实例使探讨深入化和具体化。方法本身具有普遍性，但非任何场合都能比不考究方向的单位系取得更好的效果。

一、导 言

日本甲滕好郎教授在六十年代曾提出过方向性量纲分析法^[1]，该方法在某些分析求解中有一定的实用价值。它结束了相似解中凭经验“任命”新自变量或以粗糙的量级法获得新自变量的历史，而是以较严格的科学方法以获得新自变量以使方程常微化。但更重要的是，在量纲分析法中打破了长度量纲只能用一个统一的长度量纲 $[L]$ 的传统观点。作为公用单位制，要求简洁性，当然可以设想沿运动方向测量各种向量物理量，即沿向量方向测量向量，因此只需单一的一个长度量纲；但当具体求解方程时，一般必须把所有向量变成坐标系中的各分量，一个统一的力学方程也变为各座标分向的力学方程，一个具有任意方向的长度量纲 $[\bar{L}]$ 也相应被分解为三个相互垂直而无互度关系的 L_x 、 L_y 和 L_z 是理所当然的。须知作为一个数理逻辑体系的相似理论和一个公用单位制的规定不可等同。

二、方向性量纲分析法

对不可压、层流平板附面层的布劳修斯课题，使用日本甲滕好郎的方向性量纲分析法。例如对于其 x 向分速 u ，据题意可列出如下方程：

$$u = f(u_\infty, x, y, \mu, \rho) \quad (1)$$

式中 u_∞ 为远前方均匀来流流速， μ 为动力粘性系数， ρ 为密度。仿其法可写出

$$u^{n_1} \cdot u_\infty^{n_2} \cdot x^{n_3} \cdot y^{n_4} \cdot \mu^{n_5} \cdot \rho^{n_6} \quad (2)$$

选基本量纲 L_x 、 L_y 、 τ 、 M/L_x ，以该4个独立量纲可配出上列6个物理量的全部量纲，据 π 定理已知将可产生两个无量纲量团。若使用传统的、只适于规定公用单位制的量纲制而只使用 L 、 τ 、 M 3个基本量纲，则将产生 u/u_∞ 、 y/x 、 $u_\infty x \rho / \mu$ 等3个无量纲量团。把式(2)写成：

$$(L_x/\tau)^{n_1} \cdot (L_x/\tau)^{n_2} \cdot L_x^{n_3} \cdot L_y^{n_4} \cdot [(M/L_x)(1/\tau)(L_y/L_x)^{n_5}] \cdot M/L_x L_y L_x^{n_6} \quad (3)$$

为使方程无量纲化，必须使上式中所含基本量纲的幂总和为零：对于 L_x 、 L_y 、 M/L_x 、 τ ，得

$$\text{对于 } L_x: n_1 + n_2 + n_3 - n_5 - n_6 = 0 \quad \text{对于 } L_y: n_4 + n_5 - n_6 = 0$$

$$\text{对于 } M/L_x: n_5 + n_6 = 0 \quad \text{对于 } \tau: -n_1 - n_2 - n_5 = 0$$

解以上不完整代数方程, 可得: $n_5 = -n_6$, $n_4 = 2n_6$, $n_3 = -n_6$, $n_2 = n_6 - n_1$,

按 π 定理, 依据上述结果, 配出两个无量纲量团: $(u/u_\infty)^{n_1}$, $(u_\infty \rho y^2 / \mu x)^{n_6}$

首先, 凭经验令 $n_1 = 1$, $n_6 = 1/2$; 其次, (2) 式和 (3) 式只是取得无量纲量团的一种方法, 这种结果可使我们把 (1) 式写成:

$$u/u_\infty = f(y/\sqrt{vx/u_\infty}) \quad (\text{式中 } v = \mu/\rho) \quad (4)$$

此外, 对物性参数 μ (它本应和方向无关, 至少传统概念如此), 它的量纲为什么可写成 $[(M/L_2)(1/\tau)(L_1/L_2)]$ 它来自: $\tau_{yx} = \mu \partial u / \partial y$ (这时 $\partial v / \partial x \approx 0$) 或 $\mu = \tau_{yx} / (\partial u / \partial y)$,

τ_{yx} 作用于 oxy 平面上, 它应有 $[M(L_1/\tau^2)/L_1L_2]$ 的量纲, 上面的力写成 ML_1/τ^2 是因为该力只能使流体微团获得 x 向的加速度。该表面力作用于 L_1L_2 面 (即 $dx \cdot dz$ 面) 上。

由以上分析可见, 使用方向性量纲分析法颇有难处, 可算该法的缺点。但如不采用它而仅使用传统旧观念, 则只能把 (1) 式写成:

$$u/u_\infty = f(u_\infty \rho x' \mu, y/x) \quad (5)$$

从而导致方程不可能常微化的结论, 从而无法分析求解。

三、向量单位系下的方程无量纲化法

该法所循原则为: 测量单位必须与所测的量应具有相同的方向。现仍先以不可压流平壁附面层课题为例。本课题所应服从的微分方程组为:

$$\left. \begin{array}{l} \text{连续方程} \quad \partial u / \partial x + \partial v / \partial y = 0 \\ \text{动量方程} \quad u \partial u / \partial x + v \partial u / \partial y = \nu \partial^2 u / \partial y^2 \end{array} \right\} \quad (6)$$

今以 $u \equiv u/u_0 \cdot u_0 \equiv \bar{u} \cdot u_0$, $v \equiv v/v_0 \cdot v_0 \equiv \bar{v} \cdot v_0$, $x \equiv (x/x_0) \cdot x_0 \equiv \bar{x} \cdot x_0$, $y \equiv (y/y_0) \cdot y_0 \equiv \bar{y} \cdot y_0$ 以及 $\nu \equiv (\nu/v_0) \cdot v_0 \equiv \bar{\nu} \cdot v_0$ 诸恒等变量式一一代入 (6) 式并把它恒等地变为如下的相对型:

$$\left. \begin{array}{l} \partial \bar{u} / \partial \bar{x} + (\bar{v} x_0 / u_0 y_0) (\partial \bar{v} / \partial \bar{y}) = 0 \\ \bar{u} \partial \bar{u} / \partial \bar{x} + (\bar{v} x_0 / u_0 y_0) \bar{v} (\partial \bar{u} / \partial \bar{y}) = (\bar{\nu} x_0 / u_0 y_0^2) \bar{\nu} (\partial^2 \bar{u} / \partial \bar{y}^2) \end{array} \right\} \quad (7)$$

可以把 u_0 、 x_0 、 U_0 、 y_0 及 ν_0 理解成某种测量单位, 但对单位系的大小暂时不做规定。但任何数理方程都默认其单位系为服从高斯单位选择规则的科学单位系。依据高斯规则, 应有:

$$U_0 x_0 / u_0 y_0 = 1 \quad \text{及} \quad \nu_0 x_0 / u_0 y_0^2 = 1 \quad (8)$$

这意味着, 依据高斯单位选择的单位系在单位选择上既有很大的自由度, 又存在一定的约束, (8) 式即这种约束的具体表现。

而依据相似第三定理, 应尽可能选择表微现象外部条或外部信息量, 即单值条件量, 来构成符合高斯规则的单位制。如今共需 5 个测量单位 (u_0 、 U_0 、 ν_0 、 x_0 及 y_0), 减去两个约束, 意味着可自由地选三个, 但这三个测量单位本身应是独立的——无互度关系的。由题意可知, 除 u_0 可用 u_∞ 取代、 ν_0 可用 ν 取代以外, 课题本身在 x 向、 y 向均无特征尺度, 更不存在 U 的特征量, 在假设平壁向下游为无限长之后, 只能以自变量 x 作为 x 向一切长度的测量单位。在选定 $x \equiv x_0$ 、 $u_\infty \equiv u_0$ 及 $\nu \equiv \nu_0$ 之后, 由约束条件 (8) 可得

$$y_0' = \sqrt{\nu x_0 / u_0} = \sqrt{\nu x / u_\infty} \quad \text{及} \quad U_0' = \sqrt{u_\infty \nu / x} \quad (9)$$

于是 (7) 式成为:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}/\partial\bar{x} + \bar{x}^k/\partial\bar{y}^k &= 0 \\ \bar{u}\bar{u}/\partial\bar{x} + \bar{v}^k\bar{u}/\partial\bar{y}^k &= \bar{v}\partial^2\bar{u}/\partial\bar{y}^k \equiv \partial^2\bar{u}/\partial\bar{y}^k \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

(10) 式就因变量对自变量的函数关系写出:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &\equiv u/u_\infty = f_1 x/x, \quad y/\sqrt{vx/u_\infty} = f_1 y/\sqrt{vx/u_\infty} \equiv f_1(\eta) \\ \bar{v} &\equiv v/v_\infty = U/\sqrt{vx/u_\infty} = f_2(\eta) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

由 (9) 式所表达的 y^k 及 U^k 称准则性测量单位或受约束的高斯单位, 而 $\bar{U}^k$ 及 $\bar{y}^k$ 称准则性无量纲量。

(1) 式表明, 在取用 $\eta = y/\sqrt{vx/u_\infty}$ 作为自变量后, 方程 (6) 式可以常微化。当然, 在真正的分析求解中是先把 $u \equiv \partial\psi/\partial y$ 及 $v = -\partial\psi/\partial x$ 代入使两个因变量 u 及 v 先变为一个因变量 ψ 从而先使两个方程变为一个方程, 如此可取得 $\psi^k = \sqrt{u_\infty vx}$, 但仍然有 $\eta \equiv y/\sqrt{vx/u_\infty}$ 。

更复杂一点的课题是竖壁自然对流, 以等壁温 ($T_w = \text{const}$) 的热边界条件为例。当使用了 $\theta \equiv T - T_\infty$ 以取代 T 、以 $\partial\psi/\partial y$ 取代 u 及 $-\partial\psi/\partial x$ 取代 v 之后, 其所适用之微分方程组为:

$$\left. \begin{aligned} (\partial\psi/\partial y)(\partial^2\psi/\partial x\partial y) - \partial\psi/\partial x &= v\partial^3\psi/\partial y^3 + \beta g\theta \\ (\partial\psi/\partial y)(\partial\theta/\partial x) - (\partial\psi/\partial x)(\partial\theta/\partial y) &= a(\partial^2\theta/\partial y^2) \\ h(T_w - T_\infty) &\equiv h \cdot \theta_w = -\lambda(\partial\theta/\partial y)_{y=0} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

仿照上例当以 ψ_o 、 x_o 、 y_o 、 θ_o 、 v_o 、 a_o 、 λ_o 、 β_o 、 g_o 作为测量单位来分别度量其相应的变量 ψ 、 x 、 y 、 θ 、 v 、 a 、 λ 、 β 、 g 并以这些变量构成恒等变量式 $\bar{\psi} \equiv \psi/\psi_o$ 、 $\bar{x} \equiv x/x_o$ 、 $\bar{y} \equiv y/y_o$ 、 $\bar{\theta} \equiv \theta/\theta_o$ 、 $\bar{v} \equiv v/v_o$ 、 $\bar{a} \equiv a/a_o$ 、 $\bar{\lambda} \equiv \lambda/\lambda_o$ 、 $\bar{\beta} \equiv \beta/\beta_o$ 、 $\bar{g} \equiv g/g_o$ 代入 (12) 式之后, 可得如下之相对型方程组:

$$\left. \begin{aligned} (\partial\bar{\psi}/\partial\bar{y})(\partial^2\bar{\psi}/\partial\bar{x} \cdot \partial\bar{y}) - (\partial\bar{\psi}/\partial\bar{x})(\partial^2\bar{\psi}/\partial\bar{y}^2) &= (v_o x_o/y_o \psi_o) \bar{v}(\partial^3\bar{\psi}/\partial\bar{y}^3) + (\beta_o g_o \theta_o x_o y_o^2/\psi_o^2) \bar{\beta} \bar{g} \bar{\theta} \\ (\partial\bar{\psi}/\partial\bar{y})(\partial\bar{\theta}/\partial\bar{x}) - (\partial\bar{\psi}/\partial\bar{x})(\partial\bar{\theta}/\partial\bar{y}) &= (a_o x_o/y_o \psi_o) \bar{a}(\partial^2\bar{\theta}/\partial\bar{y}^2) \\ h\bar{\theta}_w &= -(\lambda_o/h_o y_o) \bar{\lambda}(\partial\bar{\theta}/\partial\bar{y})_{\bar{y}=0} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

和前面的附面层课题一样, 是 x 、 y 双向的半无限课题。共需十个测量单位, 存在四项约束条件, 今从单值条件量中选取 x 、 g 、 v 、 $\theta_w = T_w - T_\infty$ 、 λ 、 β 以取代 x_o 、 g_o 、 v_o 、 θ_o 、 λ_o 、 β_o , 而四项独立的约束条件中定出 ψ_o 、 y_o 、 a_o 及 h_o 。

由 $v_o x_o/y_o \psi_o = \beta_o g_o \theta_o x_o y_o^2/\psi_o^2 = 1$ 可得: $y_o^2 = v^2 x/\beta g \theta_w^{1/4}$, 由 $v_o x_o/y_o \psi_o = a_o x_o y_o \psi_o = 1$ 可得: $a_o = v$, 由 $v_o x_o/y_o \psi_o = 1$ 可得: $\psi_o^2 = v x_o/y_o = (v^2 \beta g \theta_w x^3)^{1/4}$, $h_o = \lambda/y_o = \lambda^4 \beta g \theta_w/v^2 x^{1/4}$, 当采用准则性测量单位后, 在数学形式上 (13) 式将全同于原出发方程 (12) 式, 把未知函数写成自变量的函数后可得:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\psi}^k &= \psi/\psi_o^k = \psi/(v^2 \beta g \theta_w x^3)^{1/4} = f_1 y/(v^2 x/g \beta \theta_w)^{1/4}, Pr \\ \bar{h}^k &= h/h_o^k [h^4 \beta g \theta_w/v^2 x^{1/4}] = f_3(\eta, Pr) \\ \bar{\theta} &= (T_w/T_\infty - T_\infty) = f_2(\eta, Pr) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式中 $\eta \equiv y/(v^2 x/g \beta \theta_w)^{1/4}$

用来剖析该法的基本概和方法要领有此二例足矣, 尽管可举出许多分析实例。

应当指出, 该法本身具有普适性, 处处可用, 但视课题性质不同, 用该法所得好处不同。在各分向特征尺度都存在的情况下, 有向单位系分析法和无向单位系分析法所得结果一样。但是, 在任何情况下, 正确运用该法不会带来错误。

四、理论问题

凡数理方程,皆以默认其方程中所含物理量的单位选择符合高斯单位选择规则,正因为这样,数理方程中的各项具有量纲上的一致性或所谓齐次性,而且,由于符合高斯单位选择规则的科学单位制有无穷多个,因此,一方面可以不具体指明数理方程所用单位系,另一方面,可以索性以量纲取代单位,即只取单位的代数意义,而不论其大小(弃去它们的算术意义。)关键在于,公用单位制的制定法和相似理论中对单位制的处理法,只在服从高斯法则上有一致性,在别的方面则不能混为一谈。公用单位制要求简洁性、永恒不变性和普遍性,这种单位制的制订,一方面不和方程求解相联系,一方面以自然界一切科学定律普遍发生作用及各类现象都可能发生为基础。但相似理论以分析特定的具体现象为目标,相似理论在单位系的选择和制定是和该类特定具体现象的分析求解或实验求解相联系的。例如,由于公用单位制既然不和具体求解方程相联系,因此完全可以设想顺向量方向度量向量,力学方程也可以用和座标系无关的向量方程,从而根本不存在 $\vec{L}$ 分解为 L_x 、 L_y 及 L_z 的必要性。但是,对于和具体现象的分析求解或实验求解密切相关的相似理论来说,既然使用座标系是不可避免的,则把 $\vec{L}$ 分解为 L_x 、 L_y 、 L_z 也是自然合理的,因为这时一切向量都已分解为各座标分向的分量,连同力学方程本身都被写成各个分向的。

再如,公用单位制只能以各类能量均可能转化的普遍的能量转化守恒律为基础,但是相似理论则应以被研究现象实际存在的能量转化守恒律为基础。对于公用单位制的制订,完全可以用机械能度量热能、电能及别种能量,只要这种转化是可能的。但在相似理论中,在具体处理固体热传导课题、及可以忽略胀缩功和耗散能的流体力学或对流换热等课题时,由于未产生机械能和热能之间的转化,因此,不产生机械能度量热能或热量的实际可能性,因为无转化即无可度量,这时热量量纲 $[Q]$ 或某个含热能的单位(例如导热系数 λ 或比热 c)便具备了作为独立量纲或独立单位的资格。公用单位制以客观规律存在的可能性为基础,而相似理论则以被研究的具体现象中是否存在该实验转化现象的实际存在性为基础。

不了解公用单位制和相似理论中所使用单位制的巨大区别,就不可能了解相似理论本身。混乱产生于许多人总把公用单位制的制定法和相似理论中单位制的处理法混为一谈。

参考文献

- [1] 甲藤好郎,“传热学概论”,养贤堂发行,1964年。

DERIVATION OF DIMENSIONLESS EQUATIONS FROM METHOD OF ANALYSIS OF DIRECTIONAL UNIT SYSTEM

Qiu Xuguang

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics)

ABSTRACT In this paper the dimensionless equations are derived from the method of analysis of directional unit system, and two examples are presented in illustration. The important principle is suggested that the choice and treatment of the unit system in the similarity theory is quite different from those of public unit systems such as SI system or engineering unit system, even though all they must conform to the Gauss's rule of selection of unit system. For the former the flexibility and the particularity is necessary, because in the similarity theory the particular and actually phenomenon is investigated, and for the latter the invariance and the universality is necessary, as it is based on possibility of occurrence of all phenomena.

APPLICATION OF FINITE-ELEMENT METHOD TO CALCULATING STRESS FIELD IN NOZZLE INSERT OF SOLID ROCKET MOTOR

Sun Jufang

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics)

ABSTRACT The finite-element method is applied to analyzing the two-dimensional stress field in the graphite insert of a composite nozzle under pressure and transient temperature loads in a solid rocket motor. The mechanical models, basic approaches and numerical examples are presented in this paper. The anisotropy of the material is considered in the computation. A compression technique of variable bandwidth is applied to the stiffness matrix $[K]$ of the integral structure in order to save main storage. The calculated results are agreed with the experimental data very well.

TECHNICAL NOTES

A SPLINE INTEGRAL EQUATION METHOD FOR ROTATING VARIABLE-THICKNESS DISC

Liu Xingye and Zheng Jianjun

(Tianjin University)

ABSTRACT The integral equations of rotating disc with variable thickness are derived by means of the ring fundamental solution of elasticity. Then the integral equations are solved by spline function method. Also, this method is applied to the rotating variable-thickness disc with circular