

离散单元节点编号的优化

燃气涡轮研究所 梁彩容

一、引言

用有限元素方法分析构件时,通常要产生一个高阶的总刚度矩阵 $[K]$,它是一个稀疏对称、带状分布的矩阵。在求解表示刚度矩阵 $[K]$ 、节点力矢量 $\{Q\}$ 以及节点位移矢量 $\{U\}$ 之间的平衡关系的线性代数方程组: $[K]\{U\} = \{Q\}$ 时,所需要的计算时间及计算机的存储量,在矩阵大小一定的条件下,主要取决于总刚度矩阵 $[K]$ 的带宽。计算时间和存储量与带宽的平方成正比。

总刚度矩阵 $[K]$ 是有限元素法中所有数组中最大的一个数组。就平面问题而言,设结构共有 N 个节点,则总刚度矩阵应有 $2N \times 2N$ 个元素。这个数量很大,往往会超出计算机的容量。而存储量的大小是由矩阵的带宽决定的。带宽的大小又取决于由某一行(列)中从主对角线到非零元素所对应的最大列号(行号)之差,亦即取决于单元节点的编号。所以单元节点编号的优化,对提高工作效率,缩小占机内存量非常必要。

二、优化的基本原理

结构的总刚度矩阵有下面的特性:矩阵的元素是稀疏带状分布。整个刚度矩阵 $[K]$ 的绝大多数元素都是零。这是因为和某一个节点相关的节点数一般不超过9个(对等应变的三角单元而言),非零元素很少,它往往只占总元素的5%左右^[2]。整体网格分得越密,则 $[K]$ 的稀疏性越突出。要节省内存就要想办法使这些非零元素尽量密集在主对角线附近。由于单元节点的编号一般是按一定顺序排列的,所以总刚度矩阵这些非零元素是分布在主对角线的附近,形成带状区域。现以图1a和1b加以说明。

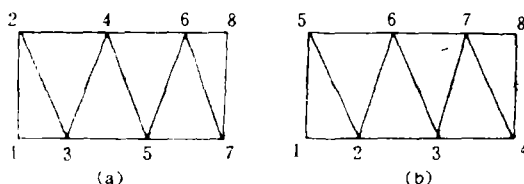


图1 单元节点编号

由单元刚度矩阵叠加起来的总刚度矩阵分别为下形式:

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{cccccc}
 K_{11} & & & & & \\
 K_{12} & K_{22} & & & & \\
 K_{13} & K_{23} & K_{33} & & & \\
 & K_{24} & K_{34} & K_{44} & & \\
 & & K_{35} & K_{45} & K_{55} & \\
 & & & K_{46} & K_{56} & K_{66} \\
 & & & & K_{57} & K_{67} & K_{77} \\
 & & & & & K_{68} & K_{78} & K_{88}
 \end{array} \right] \quad \text{对 称} \\
 \text{(1a)}
 \end{array}$$

现分析它们的带宽。因为总刚度矩阵是一个对称矩阵, 即 $K_{ij} = K_{ji}$, 由图 1 的 2 号原理决定的。计算时只考虑上三角或下三角阵。在包括主对角线元素在内的上三角区域内, 每行具有的元素个数叫半带宽, 用 “d” 表示。它可用下式计算: $d = (\text{行号} - \text{列号}) \times \text{最大差值} + 1) \times 2$ 。图 1a 的相邻节点号的最大差值为 3, $d = 6$ 。如按最大带宽存储上三角, 则需要 76 个内存单元。图 1b 的相邻节点号的最大差值为 1, $d = 10$, 共需要 112 个内存单元以存 K 。显然就存储单元和计算时间而论, 图 1a 的效率比图 1b 高。这种差异是由节点编号的顺序引起的, 所以单元节点编号优化的原则就是节点编号的规则应使相邻节点之间编号的差值尽可能小。

三、优化的方法^[3]

根据上述单元节点编号优化的基本原理, 具体做法如下:

1. 由网格自动生成 (或人工划分) 得到一个原始的单元节点编号 (图 2a)。一般这个节点编号不一定最好。计算原始节点编号总刚度矩阵下三角元素按行排成一维数组的总长度, 这里称为总带宽, 用 “WIDTH” 表示, 将其贮存起来以作比较。图 2a 中 $WIDTH = 200$ 。

2. 将新方案的节点编号 1 置于原始节点编号 1 的位置, 然后按单元顺序进行编号 (图 2b)。

3. 按新节点编号的顺序分别找出与相邻节点的原始编号。如新节点编号 1 相邻节点为: 2、6、5; 新节点号 2 相邻的节点为: 1、6、3、7 等。这些节点若已有新编号 (如 1、2、6 节点), 则不再给予新的编号, 其余节点顺序给予新的编号, (图 2c)。接着对刚编上号的节点顺序找出相邻节点的原始编号, 无新编号的节点顺序给予新编号, 以后照此进行, 直至所有节点有新的编号为止。

4. 每当一个单元的所有节点有新的编号后, 计算当前的总带宽, 若其值大于迄今已记录在内存中的总带宽, 则终止此编号方案, 进行另一新方案; 若所有节点已有新编号, 其总带宽大于已记录的总带宽, 此方案仍弃之。反之, 若小于已记录的总带宽, 则以此方案暂定为 “较佳”, 将其总带宽代替原存于内存的总带宽, 以后以它作为比较。

5. 将新节点编号 1 置于原始编号 2 的位置, 按单元顺序, 按照三、四步骤进行, 直到新节点编号 1 放置在原始节点编号最后的位置。最终总能找到一个总带宽最小的编号方案, 这就是所要求的比较优的节点编号。图 2 的计算模型, 用该方法找到较优的节点编号如图 3。其总刚度矩阵下三角元素按行排成一维数组的总长度 $WIDTH = 148$ 。

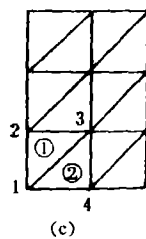
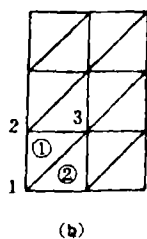
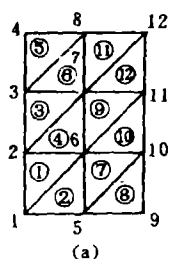


图2 单元节点新编号

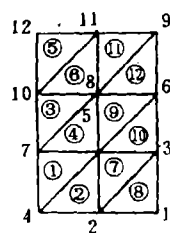


图3 单元节点最优编号

四、算 例

有一双连通的计算模型, 共划分为20个单元, 18个节点。原始节点编号如图4a。其 $WIDTH = 330$, 按本方法得到较优的节点编号如图4b。其 $WIDTH = 282$ 。

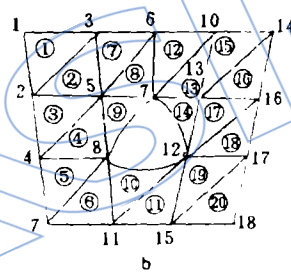
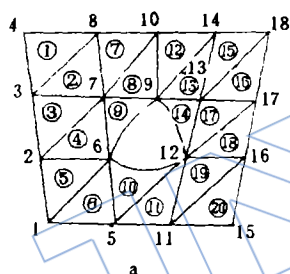


图4 节点优化算例

参 考 文 献

- [1] Y. K. Cheung and M. F. Yeo "A Practical Introduction to Finite Element Analysis" Pitman Publishing Limited, 1979.
- [2] 蒋友谅, "有限元法的基础" 国防工业出版社.
- [3] 郑祺选, "有限元节点编号的优化方法", 北京航空学院学报.

hole. Its computing program is so simple as to work on the IBM-PC computer. Due to the spline interpolation, very high accuracy of the numerical solution can be achieved even if few elements are chosen. The numerical results obtained by this method is almost completely consistent with the exact solution. Obviously, this method overcomes the shortcomings of the finite element method or finite difference method in need of solving huge systems of algebraical equations.

OPTIMIZATION OF DISPERSED ELEMENT NODE SERIAL NUMBER

Liang Cairong (Gas Turbine Establishment)

ABSTRACT The computer time and storage necessary for structure finite-element analysis are mainly dependent on the bandwidth of the general rigidity matrix $[K]$, if its dimension is fixed. According to the sparse characteristic of the general rigidity matrix and the principle of decreasing matrix bandwidth, an optimization of element node serial number is provided. It is simple and suitable for different elements, not only for the single-loop, but also for the multi-loop.

AN INVESTIGATION ON STAGNATION PRESSURE ERRORS DUE TO ROTATION STATE BEHIND A ROTOR

Tang Guocai (Nanjing Aeronautical Institute)

ABSTRACT This paper proposes that the errors in stagnation pressure measurement due to rotation state behind a rotor should include perception errors in addition to the weighting error and dynamic response errors. The analysis and experimental data show that the stagnation pressure in wake may be higher than that in the main flow, so the weighting error may be positive. These two conclusions are contrary to the affirmation of reference [1]. This paper also puts forward various approaches to minimize the errors due to the rotation state.

ACTIVE CONTROL OF INLET DISTORTED FLOW FIELD IN COMPRESSOR INLET

Xu Liping

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics)

ABSTRACT The feasibility of alleviating the destabilizing effect of the inlet circumferential total pressure distortion on an axial compressor by active control of individually adjustable inlet guide vanes (LAIGV) has been qualitatively analyzed under the parallel compressor hypothesis. The result shows that when the distortion is quasi-steady it is possible to use the actively controlled LAIGV with a relatively simple proportional control scheme to adjust the flow angle, and thus to prevent the compressor entering the unstable state. For a typical blade setting the angular adjustment of LAIGV needed to cope with 10% total pressure distortion is of only few degrees.