

单列叶栅紊流流场有限分析数值研究

南京航空学院 徐 雕 吴国钊

【摘要】 本文将有限分析方法用于曲线坐标系上紊流N-S方程数值计算,研究了高雷诺数时叶栅粘性紊流流场。有限分析方法在网格单元上对非线性偏微分方程进行线性化处理,在解析边界条件下求出线性化偏微分方程的解析解,以此解构造离散方程。有限分析方法能够根据对流的方向和大小自动改变格式系数,并具有数值扩散小、精度高和稳定性好等优点。本文以 $k-\epsilon$ 紊流模型模拟紊流,以壁面函数方法处理近壁区流动参数。计算结果与实验数据的吻合程度令人满意。

一、前言

陈景仁先生提出了一种新的数值计算方法——有限分析数值方法^[1,2] (Finite Analytic Method)。该方法的基本思想是在网格单元上求解局部线性化后的非线性偏微分方程,由微分方程的解析解构造离散代数方程。有限分析格式保留了原微分方程的解析特点,能够根据对流的方向和大小自动调整格式的系数,而不必象差分方法和控制体积方法那样在高雷诺数时须采用迎风格式。有限分析方法产生的数值格式来源于解析解,数值精度较高,格式的系数全为正值,数值稳定性好。

本文以有限分析方法计算了曲线坐标系上二维粘性紊流高雷诺数时叶栅流场,并与实验结果进行了比较,吻合程度令人满意。

二、基本方程的有限分析离散

非定常二维不可压粘性紊流N-S方程及 $k-\epsilon$ 紊流模型方程可写为:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial (u\Phi)}{\partial x} + \frac{\partial (v\Phi)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_t \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_t \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + S_\Phi \quad (1)$$

其中 Φ 、 ν_t 、 S_Φ 在气动方程中含义列于表1中。其中:

$$\nu_t = c_\mu \frac{k^2}{\epsilon}, \quad G = \nu_t \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\}$$

$$c_\mu = 0.09, \quad c_1 = 1.44, \quad c_2 = 1.92, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\epsilon = 1.3$$

对方程(1)进行无量纲化处理并将其变换到 $\xi-\eta$ 曲线坐标系上,经整理得曲线坐标系上无量纲紊流流动控制方程的一般形式^[3]为:

$$H \Phi_t + 2A \Phi_\xi + 2B \Phi_\eta = C \Phi_{\xi\xi} + D \Phi_{\eta\eta} + g \quad (2)$$

其中 $H = Re \cdot J$, $2A = Re \{ U - \tau - [\alpha(\nu_t)_\xi - \beta(\nu_t)_\eta] \} / J$, $D = \gamma / J$
 $2B = Re \{ V - \sigma - [\gamma(\nu_t)_\eta - \beta(\nu_t)_\xi] \} / J$, $C = \alpha / J$, $J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$

$$g = ReJS_{\Phi} - 2\beta\Phi_{\xi}\eta/J, \quad Re = u_{\infty}L\rho/\eta, \quad U = y\eta - x\eta, \quad V = -y\xi u + x\xi v$$

$$\alpha = x^2\eta + y^2\eta, \quad \beta = x\xi\eta + y\xi\eta, \quad \gamma = x^2\xi + y^2\xi, \quad \sigma = (yD_x - xD_y)/J$$

$$\tau = (xD_y - yD_x)/J, \quad D_x = \alpha\xi\xi - 2\beta\xi\eta + \gamma\eta\eta, \quad D_y = \alpha y\xi\xi - 2\beta y\xi\eta + \gamma y\eta\eta$$

表 1 Φ 、 η 、 S_{Φ} 的含义

方程	Φ	η	S_{Φ}
连续	1	0	0
x 向动量	u	$v^+ \eta$	$-(1/\rho) \cdot \partial/\partial\alpha + \partial(\eta\partial/\partial\alpha)/\partial\alpha + \partial(\eta\partial/\partial\alpha)/\partial\eta - (2/3) \cdot \partial/\partial\alpha$
y 向动量	v	$v^+ \eta$	$-(1/\rho) \cdot \partial/\partial\eta + \partial(\eta\partial/\partial\eta)/\partial\alpha + \partial(\eta\partial/\partial\eta)/\partial\eta - (2/3) \cdot \partial/\partial\eta$
紊动能	k	$(v^+ \eta)/\sigma_k$	$G - \epsilon$
紊动能耗散率	ϵ	$(v^+ \eta)/\sigma_{\epsilon}$	$c_1 G\epsilon/k - c_2 \epsilon^2/k$

α β γ α τ D_x 、 D_y 和 J 都是坐标函数, 与控制变量 Φ 无关。一旦物理平面与计算平面之间的关系确定, 这些函数的节点值也就确定了。因而, 这些函数值可以在数值迭代前计算出来, 存贮在数组中, 数值迭代时直接使用而不必每次迭代都计算它们。这样, 虽然控制方程在曲线坐标系上的形式较复杂, 但不增加太多计算工作量。

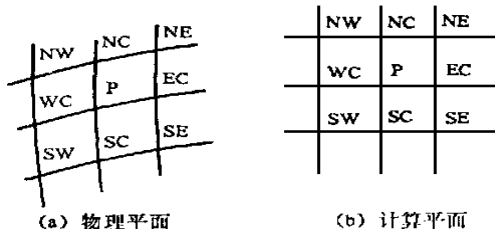


图 1 网格单元

图 1 所示九点局部网格上求解控制方程 (2)

$$\text{令} \quad U = U_p + U', \quad V = V_p + V' \quad (3)$$

下标 “p” 表示单元中心节点, 上标 “'” 表示单元其它节点值对中心节点的偏差。将 (3) 式代入 (2) 式, 整理得

$$2A_p\Phi_{\xi} + 2B_p\Phi_{\eta} = C_p\Phi_{\xi\xi} + D_p\Phi_{\eta\eta} + G \quad (4)$$

其中

$$G = g - H\Phi - h_c, \quad h_c = 2A'\Phi_{\xi} + 2B'\Phi_{\eta}$$

仍记 A_p 、 B_p 、 C_p 、 D_p 为 A 、 B 、 C 、 D , 则控制方程 (4) 可写成

$$2A\Phi_{\xi} + 2B\Phi_{\eta} = C\Phi_{\xi\xi} + D\Phi_{\eta\eta} + G \quad (5)$$

设 A 、 B 、 C 、 D 为常数, 则 (5) 式中的源项 G 可由变换消去, 令

$$\Phi = \bar{\Phi} + G(A\xi + B\eta)/2/(A^2 + B^2)$$

将其代入 (5) 式, 整理得

$$2A\bar{\Phi}_{\xi} + 2B\bar{\Phi}_{\eta} = C\bar{\Phi}_{\xi\xi} + D\bar{\Phi}_{\eta\eta} \quad (6)$$

(6) 式为椭圆型常系数微分方程, 须给出求解域的所有边界条件。本文以线性函数和指数函数构造其在网格单元上的解析边界条件, 因为这些函数也满足微分方程。以北边为例, 设

$$\bar{\Phi}_N(\xi) = a_N [\exp(2A\xi/C) - 1] + b_N\xi + C_N$$

a_N 、 b_N 、 C_N 为待定系数, 由该边界上三个节点的 $\bar{\Phi}$ 值决定

$$a_N = (\bar{\Phi}_{NW} + \bar{\Phi}_{NE} - 2\bar{\Phi}_{NC})/(4\sinh^2(Ah/C))$$

$$b_N = [(\bar{\Phi}_{NE} - \bar{\Phi}_{NW}) - \coth(Ah/C)(\bar{\Phi}_{NW} + \bar{\Phi}_{NE} - 2\bar{\Phi}_{NC})], \quad C_N = \bar{\Phi}_{NC}$$

方程 (6) 的一阶导数项也可径变换消去, 令

$$\bar{\Phi}(\xi, \eta) = W(\xi, \eta)\exp(A\xi/C + B\eta/D)$$

代入 (6) 式, 整理得

$$CW_{\xi\xi} + DW_m = (A^2/C + B^2/D)W \quad (7)$$

相应地, 边界条件的形式也将改变。仍以北边为例

$$W^N(\xi, k) = W_1(\xi) = \exp(-Bk/D)(a_N \exp(A\xi/C) + b_N \xi \exp(-A\xi/C) + (c_N - a_N) \exp(-A\xi/C)) \quad (8)$$

方程 (7) 与相应的边界条件 (8) 构成了一定解方程。方程 (7) 为二阶常系数线性偏微分方程, 应用线性方程的叠加原理, 可以将其 (及相应的边界条件) 拆成四个具有简单边界条件的微分方程的叠加, 即四个子问题的叠加

$$W(\xi, \eta) = W^E(\xi, \eta) + W^W(\xi, \eta) + W^N(\xi, \eta) + W^S(\xi, \eta) \quad (9)$$

北边的子问题可以写成

$$\begin{cases} CW_{\xi\xi}^N + DW_{\eta\eta}^N = (A^2/C + B^2/D)W^N \\ W^N(\xi, k) = W_1(\xi) \\ W^N(\xi, -k) = W^N(h, \eta) = W^N(-h, \eta) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

其它三个子问题类似。这四个子问题均可用分离变量法求解。仍以北边子问题为例, 令

$$W^N(\xi, \eta) = X(\xi) \cdot Y(\eta)$$

代入方程 (10) 得

$$\begin{aligned} X'' + \lambda^2 \cdot X &= 0 \\ X(-h) &= X(h) = 0 \end{aligned} \quad (11-1)$$

$$\begin{cases} Y'' - (A^2/C + B^2/D + C\lambda^2)Y/D = 0 \\ Y(-k) = 0 \\ Y(k) = W_1(\xi) \end{cases} \quad (11-2)$$

求解 (11), 并施以相应的边界条件, 可得方程 (10) 的解。将四个子问题的解叠加起来, 最终得原微分方程的解在网格中心节点的表达式

$$\begin{aligned} \Phi_p &= C_{NE}\Phi_{NE} + C_{NW}\Phi_{NW} + C_{SE}\Phi_{SE} + C_{SW}\Phi_{SW} + C_{EC}\Phi_{EC} \\ &\quad + C_{WC}\Phi_{WC} + C_{NC}\Phi_{NC} + C_{SC}\Phi_{SC} + C_p G \end{aligned} \quad (12)$$

系数的具体表达式及详细推导过程请参阅文献 [3]

如以 $\Phi = (\Phi^i - \Phi^{i-1})/\Delta t$, 代替离散格式 (12) 中的时间导数项, 还可以得到有限分析方法的时间推进格式

$$\Phi_p^i = \left(\sum_{i=1}^8 c_i \Phi^{i-1} + c_p (g - h_c + H \Phi_p^{i-1}/\Delta t) \right) / (1 + H c_p/\Delta t) \quad (13)$$

三、控制方程的数值求解

1. 压力修正方程 以 u 、 v 、 p 作为因变量求解控制方程的最大困难是速度压力耦合。本文采用压力扰动方法处理速度压力耦合, 其基本思想是假设压力场 p^* , 解动量方程, 得速度场 u^* 、 v^* 以此速度场代入连续方程, 得压力修正方程

$$A_p p' = A_E p_E' + A_W p_W' + A_N p_N' + A_S p_S' + S_p \quad (14)$$

解方程 (14), 得 p' , 从而作出速度 u^* 、 v^* 和压力 p^* 的修正^[3]

$$\begin{aligned} u &= u^* + u', \\ v &= v^* + v', \quad p = p^* + p' \end{aligned}$$

2 壁面函数 原则上在固壁上可以实施无滑移条件,但这需要在近壁区布置大量的网格才能反映出近壁区流动参数的大梯度变化和保证数值迭代的精度。本文采用壁面函数方法处理近壁区的流动,其基本思想是将试验结论引入数值计算,从而减少近壁区网格。

3 收敛准则 本文采用整体残差作为数值迭代收敛的判据,令

$$R_{\Phi} = (1 + c_p H / \Delta t) \Phi_p^n - \left[\sum_{i=1}^8 c_i \Phi_i^n + c_p (g - h_c + H \Phi_p^{n-1} / \Delta t) \right]$$

$$\text{当 } \sum_{i,j} |R_{\Phi_{i,j}}| < \delta_1, \quad |R_{\Phi_{i,j}}|_{max} < \delta_2$$

时认为数值迭代收敛, δ_1 、 δ_2 为给定的精度要求。

4 数值迭代程序 数值计算的具体求解主要过程如下: (1) 输入边界条件、参数和网格座标, 计算网格参数, 按一定规律布置初始流场; (2) 计算有限分析格式系数, 在假设的速度场及压力场 p^* 下求解动量方程, 得到准速度场 u^* 、 v^* ; (3) 以 u^* 、 v^* 计算压力修正方程的系数和单元残余质量源, 求解压力修正方程, 得 p' ; (4) 修正压力 p^* 和速度 u^* 、 v^* , 得 u 、 v 、 p ; (5) 求解紊动能 k 和紊动能耗散率 ϵ 方程, 计算新的紊流粘性系数 ν_t ; (6) 检查是否达到精度要求, 如未达到则以 u 、 v 、 p 作为 u^* 、 v^* 、 p^* 返回第 (2) 步, 直到达到精度要求为止。

为了加速收敛和提高数值迭代的稳定性, 本文采用了逐行交替迭代、低松弛、控制方程的源项线化和截面流量修正等措施。

四、数值计算实例

1 二维直通道内紊流流动 为了验证校核方法和所编制程序, 首先计算了简单的二维直通道内的紊流流动并与实验数据^[4]作了比较。为了严格地考核在任意坐标系下有限分析格式

的性能及本程序的普遍性, 将二维直通道的物理平面变换到了均匀网格的计算平面。由于计算域的对称性, 仅计算通道的下半部。网格布置如图 2 所示, 宽为 $D/2$, 长为 $2D$, 网格数为 41×19 , Y 向 19 条水平线按等比级数布置, X 向 41 条垂线

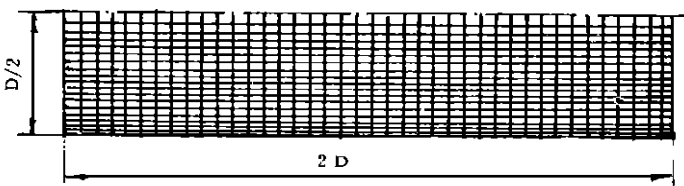


图 2 二维直通道网格布置

等间距布置。来流雷诺数为 30800, 进口速度和紊动

能均取自文献 [4], 紊动能耗散率的进口值由紊动能的生成与耗散平衡确定。轴对称线上的所有参数符合轴对称条件, 即 $\partial \Phi / \partial r = 0$ 。在出口边上所有参数不再变化, 即 $\partial \Phi / \partial x = 0$ 。初场按流场的进口值布置, 数值计算迭代 45 次得收敛解, 残差小于 1.0×10^{-3} 。图 3 为本文计算得到的出口速度 u 与测量值的比较, 只是在近壁区比测量值稍小, 这是由于紊流模型和壁面函数所造成的误差。从迭代收敛趋势上看, 进一步提高收敛精度增加迭代次数会更好。

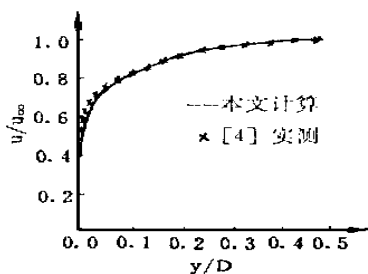


图 3 二维直通道速度分布

2 二维单列叶栅内紊流流动 本文还计算了单列叶栅二维粘性紊流流场, 并与实验结果^[5]作了比较。叶栅由 NACA 65 系列叶型构成, 来流雷诺数为 2.89

$\times 10^5$, 叶栅的几何参数及流动参数均取自文献 [5]。

采用贴体网格技术^[6]划分流场, 如图 4 所示, 网格点数为 51×19 , 51 条等 ξ 线, 19 条等 η 线。流场进口边规定速度 u 、 v , 压力 p , 紊流量 k 、 ϵ , 出口边上控制变量的 ξ 向一阶导数为零, $\partial\Phi/\partial\xi = 0$ 。近壁区使用壁面函数。周期边界上使用周期性条件。迭代时对应的周期边界上的参数取平均值。初场按一维势流布置。采用低松弛方法进行迭代, 速度的松弛因子为 0.7, 紊动能 0.5, 紊动能耗散率 0.3。收敛解的精度 1.0×10^{-3} 。

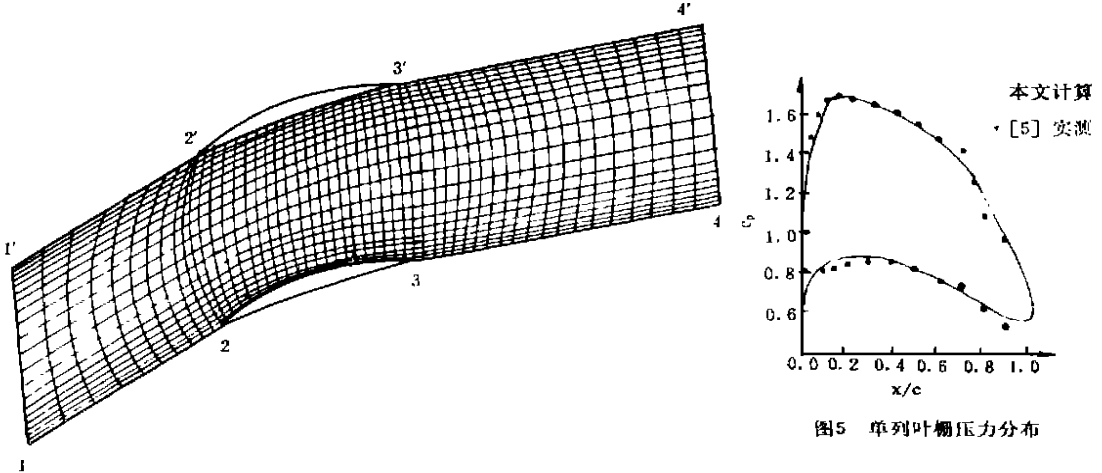


图4 单列叶栅流场网格

图 5 为本文计算的叶栅叶片表面压力分布与实验数据^[5]的比较, 压力系数 C_p 为

$$C_p = (p_\infty - p) / [(1/2) \rho_\infty v_\infty^2]$$

从图上可以看出, 除了叶片前后缘处误差较大外, 其它部分两者的吻合程度令人满意。

五、结 论

本文导出了曲线坐标系上有限分析方法求解紊流 N-S 方程的离散公式, 并将其应用于粘性紊流二维直通道和单列叶栅内部流场的数值计算。计算中使用了 $k-\epsilon$ 紊流模型和壁面函数。有限分析方法的数值稳定性好, 精度较高, 收敛速度较快, 其格式能据对流的方向和大小自动调整格式系数, 数值扩散小, 对网格要求较低。

通过数值计算, 在理论上研究了二维直通道和单列叶栅内部粘性紊流场, 与实验比较, 本文的数值计算结果令人满意。

参 考 文 献

- [1] Chen, C. J. and Li, P., "The Finite Analytic Method for Steady and Unsteady Heat Transfer Problem", ASME Paper 80-HT-86
- [2] Chen, C. J. et al., "Finite Analytic Solution of Heat Transfer in Two-Dimensional Cavity Flow", J. Numerical Heat Transfer, Vol. 4, 1981, p179
- [3] 徐雕, "串列叶栅的试验与理论研究", 博士学位论文, 南京航空学院, 1988 年 3 月。
- [4] Laufer, J., "Investigation of Turbulent Flow in A Two-Dimensional Channel", NACA TN-2123
- [5] Richard Felix, A. and Emery, J. C., "A Comparison of Typical National Gas Turbine Establishment and NACA Axial-flow Compressor Blade Section", NACA TN 3937, 1957
- [6] Thompson, J. F. et al., "Boundary Fitted Curvilinear Coordinate Systems for Solution of Partial Differential Equations on Fields Containing any Number of Arbitrary Two-dimensional Bodies", NASA CR-2729, 1977.

DEVELOPMENT OF ENGINE FAULT EQUATIONS

Fan Zuomin, Sun Chunlin, Lin Zhaofu, Gao Haichuan

(Civil Aviation Institute of China)

ABSTRACT The engine diagnosis problem lies in solution of the engine fault equations which express the relationships between the measurements and a large set of possible but improbable malfunctions. The engine fault equations are generally underdetermined and can be solved by the aid of Main Characteristic Parameter Model (MCPM) suggested by the authors. The engine fault equations are based on engine fault samples and can be called empirical fault equations. The empirical fault equations are similar to fault equations obtained by single factor experiments, but the engine fault samples are used instead of the results of special experiments. Differing from the small change equation, the empirical fault equations are easily obtained and are of great use for diagnosis of such faults which are difficult to be diagnosed by employing small change equations. Some practical examples of engine fault diagnosis are also given. The fault diagnosis results obtained from are very satisfactory.

FINITE ANALYTIC SOLUTION OF TURBULENT FLOW FIELD THROUGH CASCADE OF AIRFOIL

Xu Diao and Wu Guochuan (Nanjing Aeronautical Institute)

ABSTRACT The finite analytic method is used in the present study to calculate the turbulent flow field described with Navier-Stokes equations in body-fitted curvilinear coordinate system. The finite analytic method invokes the analytic solution of governing partial differential equations in formulating the algebraic equations that relates a nodal value in an element to its neighbouring nodal values. The major feature of the finite analytic method is its ability to simulate automatically the upwind influence of neighbouring nodal values according to direction and magnitude of convection. It is shown that the finite analytic method has good numerical stability and accuracy. The turbulent flow fields through a two-dimensional channel and a cascade of airfoil are numerically simulated by using finite analytic method in the present study. The $k-\epsilon$ turbulence model and wall function method are also employed. The agreement of numerical solution with experimental data is quite good.

FLOW FIELD MATRIX SOLUTION ON S_1 STREAM SURFACE IN A CENTRIFUGAL COMPRESSOR

Hua Yaonan (Academia Energetics R&D Center)

ABSTRACT The existing flow field matrix solution method on S_1 stream surface for the calculation of flow field in an axial compressor is extended to calculation of flow field in a centrifugal compressor. The stream function governing equation of fluid flow has been established with respect to non-orthogonal curvilinear coordinates. By the aid of artificial compressibility method, the discretization of the partial differential equation is accomplished with the standard central difference formula. The set of linear algebraic equations obtained is solved by means of the direct matrix method. The velocities at grid nodes are first determined